MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

ANALYSE 2 Novembre 2010 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents et calculatrice interdits

(Les quatre exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *Équation fonctionnelle de Cauchy* (6 points)

On désigne par f une fonction monotone vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$,
$$f(ra) = rf(a). \tag{2}$$
(On montrera successivement que $f(0) = 0$, que f est impaire, que (2) est vraie pour $r \in \mathbb{N}$, puis que (2) est vraie pour tout nombre rationnel positif avant de conclure.)
2. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout réel x.
3. Montrer que l'identité est l'unique fonction non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y) \text{ pour tous réels } x,\ y.$$

Exercice 2 *Transcendance de* $\sum_n 10^{-n!}$ (7 points)

1. Démontrer que la série de terme général $10^{-k!}$ est convergente.

Posons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}$.

2. Démontrer que $0 < S < 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S - a_n < 2.10^{-(n+1)!}$. Démontrer que S n'est pas rationnel (on considérera $x = \dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel et on montrera que pour n assez grand, $|x - a_n| > S - a_n$).
3. Soit P un polynôme non nul à coefficients entiers. Notons p son degré.
   (a) Démontrer que pour tout n on a $10^{p.n!}P(a_n) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Démontrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que, pour tout n on ait $|P(S) - P(a_n)| \leq M.10^{-(n+1)!}$ (on pensera à utliser le théorème des accroissements finis).
   (c) On suppose que P n'a pas de racines rationnelles. Démontrer que $P(S) \neq 0$ (on prouvera pour cela que $|P(S)| > 0$).

(On démontre ainsi que S est transcendant. *En effet, soit un nombre algébrique non rationnel x, racine d'un polynôme à coefficients rationnels P. Quitte à décomposer P (dans $Q[X]$), on peut supposer qu'il est irréductible (en effet, x est racine d'un des facteurs). Puisque x n'est pas rationnel et P est irréductible, P n'a pas de racines rationnelles. Multipliant P par le PPCM des dénominateurs de ses coefficients, on peut supposer que P est à coefficients entiers. D'après 2., S n'est pas racine de P, donc $x \neq S$. Cela prouve que S est distinct de tout nombre algébrique non rationnel. Comme de plus il n'est pas rationnel, il n'est pas algébrique.)*

Exercice 3 *Comparaison série intégrale* (7 points)

1. Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Démontrer que la série de terme général $f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$ converge.

2. Démontrer que la suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge ; on note γ sa limite. (On pensera à utiliser 1. en posant $f(t) = \frac{1}{1+t}$.)
3. Démontrer qu'un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma$ au voisinage de $+\infty$ est donné par $\frac{1}{2n}$ (on utilisera $\sum_{k=2}^{n} u_k$ avec $u_k = \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k}$).
4. En déduire des développements limités des sommes partielles de $\frac{1}{2k}$ et de $\frac{1}{2k+1}$.
5. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ - BONUS - *Théorème de Rolle* (2 points)

Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.