**MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques** **La Mi-Voix - ULCO**

**ANALYSE 2** Novembre 2012 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les deux exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

**Exercice 1**

1. On considère la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ :
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$ :
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$
   puis que
$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$
2. On considère la suite $(K_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$
   Montrer que la suite $(K_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera $K$ la limite de cette suite (on ne demande pas de calculer $K$).
3. On pose pour tout entier naturel non nul $n$ non nul
$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}.$$
   On admet la formule de Stirling :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$
   Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
4. Montrer que, pour tout entier $n$ non nul, on a :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.$$
5. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et que pour tout entier $n \geq 1$ :
$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$
6. (a) Montrer que pour tous réels $a$ et $b$ on a : $(a+b)^2 \geq 4ab$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul,
$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 \leq \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}.$$
7. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ :
$$0 \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}.$$

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $p \geq k$ :

$$0 \leq a_p - a_k \leq \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}.$$

(c) En déduire que, pour tout entier $k$ non nul :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leq \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}.$$

**Exercice 2** *Les nombres de Bernoulli.*

On désigne par $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) &= \dfrac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) &= 1 \end{cases}$.

$\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Démontrer que $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner le tableau de variations de $f$.
   (c) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$ et préciser les équations des asymptotes quand elles existent.
   (d) Tracer la courbe dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est égale à 2cm.
2. (a) Démontrer que $f$ admet un développement limité d'ordre $n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0.
   (b) Trouver ce développement limité pour $n = 4$.
3. (a) Démontrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner ce développement.
   (b) En déduire que $f$est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'elle admet une dérivée $n$-ième sur $\mathbb{R}$ quel que soit l'entier naturel $n$.
   (c) Calculer $f^{(k)}(0)$ pour $0 \leq k \leq 4$.

   On appelle nombres de Bernoulli, les nombres $B_k = f^{(k)}(0)$ où $k$ est un entier naturel.
4. (a) Démontrer que les nombres $B_k$ sont des nombres rationnels.
   (b) Démontrer que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, $B_{2p+1} = 0$.
5. (a) En remarquant que $(e^x - 1)f(x) = x$ et en dérivant $(n+1)$ fois membre à membre cette égalité, démontrer que $B_n$ vérifie

$$\begin{cases} B_0 &= 1 \\ B_n &= \dfrac{-1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k \end{cases}.$$

   (b) En utilisant ce résultat, calculer $B_6$.
6. (a) En posant $z = \dfrac{1}{y}$, résoudre l'équation différentielle

$$(E) : xy' + (x-1)y + y^2 = 0.$$

   (b) Vérifier en particulier que $f$ est solution de $(E)$.
7. (a) Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = xf'(x) + (x-1)f(x) + f^2(x)$. En calculant $g^{(n)}(0)$, trouver une autre relation de récurrence liant les nombres $B_n$.
   (b) Montrer que les nombres $b_n = \dfrac{B_{2n}}{(2n)!}$ vérifient $\begin{cases} b_0 &= 1 \\ b_1 &= \dfrac{1}{12} \\ &\vdots \\ b_n &= \dfrac{-1}{2n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$.
   (c) En déduire la valeur du nombre de Bernoulli $B_8$. On résumera les résultats trouvés dans un tableau de la forme :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_n$ | | | | | | | | | | |

8. En utilisant la question 7.(b), démontrer que $B_{2n}$ est du signe de $(-1)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.