MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

ANALYSE 2 Novembre 2011 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

CORRECTION

Exercice 1 Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f une fonction de classe C^1. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$
(Cette question doit vous rappeler celle posée dans l'examen précédent, et relative au lien qui existe entre $\cos(kt)$ et e^{ikt}.)
4. À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer deux réels a et b tels que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$
Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$
5. Déduire des questions précédentes que $S_n \underset{+\infty}{\to} \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que
$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

<u>*Correction*</u> :

1. (a) On sait que $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k, k+1]$. On intègre cette inégalité entre k et $k+1$ et on trouve la partie gauche de l'inégalité demandée. De même, on sait que $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \in [k-1, k]$, et on intègre cette inégalité.

(b) On somme ces inégalités pour k allant de n à $+\infty$, et on trouve :

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$

soit encore

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}.$$

Puisque $\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, on en déduit le résultat demandé.

2. Une intégration par parties donne

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt = (-1)^{n+1}\frac{2}{2n+1}f(\pi) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt.$$

Or,

$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt\right| \leq \int_0^\pi |f'(t)|dt,$$

et donc on a

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

3. C'est un calcul classique. On écrit $\cos(kt) = \Re(e^{ikt})$ et on utilise la somme d'une série géométrique de raison différente de 1 (puisque $t \in]0,\pi]$). On obtient

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \Re\left(\frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right) = \frac{1}{2} + 2\Re\left(e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(\frac{nt}{2})\cos(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}. \end{aligned}$$

Une formule trigonométrique donne

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\left(\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) + \sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

4. On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt &= \left[(at^2+bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at+b)\frac{\sin(nt)}{n}dt \\ &= 0 - \left(\left[(2at+b)\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -2a\frac{\cos(nt)}{n^2}dt\right) \\ &= -\frac{-(2a\pi+b)(-1)^n+b}{n^2}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est égale à $\frac{1}{n^2}$ si et seulement si $b=-1$ et $a=\frac{1}{2\pi}$. On déduit alors

$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt + S_n = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On a donc prouvé que

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\pi f(t)A_n(t)dt,$$

avec $f(t) = \frac{at^2+bt}{\sin(\frac{t}{2})}$. Pour conclure, il s'agit de prouver que f est de classe C^1 en 0. Clairement, f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$. Pour prouver que f est dérivable en 0 et que sa dérivée y est continue, on peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée. On remarque ainsi que, pour $t \in]0,\pi]$,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{(2at+b)\sin(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}(at^2+bt)\cos(\frac{t}{2})}{4\sin^2(\frac{t}{2})} \\
&= \frac{(2at+b)(\frac{t}{2}+o(t^2)) - \frac{1}{2}(at^2+bt)(1-\frac{t^2}{2}+\circ(t^2))}{t^2+\circ(t^2)} \\
&= \frac{\frac{a}{2}t^2+\circ(t^2)}{t^2+\circ(t^2)} \underset{t\to 0}{\to} \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^1 en 0. On peut alors appliquer le résultat des questions précédentes.

6. On a

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = -\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

d'après la première question.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$. On suppose enfin qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

1. Montrer que $R \geq R'$.
   On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.
2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on ait $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.
3. En déduire que $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(\ell-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (\ell+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que
$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
où P est un polynôme, et $(\ell-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (\ell+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

<u>*Correction*</u> :

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$|a_n| \leq (\ell+1)|b_n|.$$
Soit maintenant $r > 0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$|a_n|r^n \leq (\ell+1)|b_n|r^n$$
et donc, si la suite $(|b_n|r^n)$ est bornée, la suite $(|a_n|r^n)$ l'est aussi. On conclut en utilisant la définition du rayon de convergence, celui de $\sum_n a_n x^n$ étant donné par
$$R = \sup\{r \geq 0; (|a_n|r^n) \text{ est bornée}\}.$$
2. Fixons $N \geq 1$ tel que $\sum_{n=0}^{N} b_n \geq 2M$. Posons ensuite $P(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$. On a $P(1) \geq 2M > M$. Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de la continuité de P en 1.
3. Soit $M > 0$ et soient N, δ donnés par la question précédente. Alors, puisque b_n est positif pour tout n, on a, pour chaque $x \in]0, 1[$,

$$g(x) \geq \sum_{n=0}^{N} b_n x^n.$$

En particulier, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a $g(x) \geq M$. Ceci prouve bien que g tend vers $+\infty$ en 1.

4. On écrit simplement que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n) x^n + \sum_{n=0}^{N} b_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= P(x) + \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \end{aligned}$$

où on a posé $P(x) = \sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n) x^n$ et $c_n = b_n$ si $n \leq N$, $c_n = a_n$ sinon.

5. On fixe $\varepsilon > 0$ et on décompose f comme précédemment. D'une part, on a

$$(\ell - \varepsilon) b_n \leq c_n \leq (\ell + \varepsilon) b_n$$

et donc, en multipliant par x^n et en sommant pour $n = 0, \dots, +\infty$, on déduit que

$$(\ell - \varepsilon) g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq (\ell + \varepsilon) g(x).$$

D'autre part, puisque P est un polynôme, donc continu en 1, et parce que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to 1$, on sait que

$$\frac{P(x)}{g(x)} \to 0 \text{ quand } x \to 1.$$

On en déduit l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$-\varepsilon \leq \frac{P(x)}{g(x)} \leq +\varepsilon.$$

Finalement, en sommant toutes ces inégalités, on trouve que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$\ell - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\frac{f}{g}$ tend vers ℓ en 1.

Exercice 3 *Capes externe de mathématiques, session 2012, 1ère composition.*

Étant donnée une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition "f n'est pas uniformément continue sur I".
2. On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne de rapport k, où k est un réel strictement positif, si pour tout couple (x, y) d'éléments de I on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.

3. (a) Montrer que pour tous réels x et y on a :

$$||y| - |x|| \leq |y - x|.$$

(b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a :
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{et} \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}.$$
   (b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
5. (a) En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction h est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?
6. Soit F une application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$F(x) \leq ax + b.$$
   (a) Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |x-y| \leq \eta_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq 1.$$
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Soit n_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leq \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.
   (c) Montrer que :
$$|F(x_0) - F(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|.$$
   (d) Conclure.
7. (a) Les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}$?
   (b) La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?
8. Théorème de Heine.
Soit $I = [a,b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine : *si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I.*
On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a;b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.
   (a) Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n>1}$ et $(y_n)_{n>1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geq 1$:
$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon.$$
   (b) Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ convergentes telles que pour tout entier $n \geq 1$:
$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon.$$
   (c) Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}.$$
   (d) Conclure.
9. Soit J un intervalle d'intérieur non vide. Si une fonction G est uniformément continue sur tout intervalle $[a,b]$ inclus dans J, G est-elle nécessairement uniformément continue sur J ?

Correction :

1. La négation de la continuité uniforme s'écrit

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\eta>0,\ \exists(x,y)\in I^2,\ (|x-y|\leq\eta \text{ et } |f(x)-f(y)|>\varepsilon).$$

2. Soit f une fonction lipschitzienne sur I. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star$. On pose $\eta=\dfrac{\varepsilon}{k}$. Soient x et y dans I tels que $|x-y|\leq\eta$. On a alors $|f(x)-f(y)|\leq k|y-x|\leq\varepsilon$. Ceci prouve que f est uniformément continue sur I.
3. (a) On écrit que $y=(y-x)+x$, ce qui implique que $|y|=|(y-x)+x|\leq|y-x|+|x|$ d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi, $|y|-|x|\leq|y-x|$.
   Si on écrit $x=(x-y)+y$, on a $|x|\leq|x-y|+|y|$ soit $-|x-y|\leq|y|-|x|$.
   On obtient bien le résultat.

   (b) Montrons que f est lipschitzienne.
   $$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{1+|x|}-\frac{1}{1+|y|}\right|=\left|\frac{|y|-|x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right|\overset{3.(a)}{\leq}\frac{|y-x|}{(1+|x|)(1+|y|)}$$
   Comme $\dfrac{1}{1+|x|}\leq1$ et $\dfrac{1}{1+|y|}\leq1$, on a $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$. La fonction f est donc lipschitzienne de rapport 1, ce qui implique que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. (a) • $\forall x,y\in\mathbb{R}_+$, $0\leq x+y\leq x+y+2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$. En utilisant la croissance de la fonction $\sqrt{\ }$, on obtient le premier résultat soit : $\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$.
   • On peut procéder de deux manières :
   – En utilisant la concavité de la fonction $\sqrt{\ }$: si $x\leq y$, $\sqrt{x-y}\geq\sqrt{x}-\sqrt{y}$. Si $x\geq y$, $\sqrt{x-y}\geq\sqrt{x}-\sqrt{y}$. Finalement, $\sqrt{|x-y|}\geq|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$.
   – En utilisant la décroissance de la fonction $x\mapsto\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ pour $h\geq0$ fixé. Cette fonction atteint son maximum en $x=0$. Ainsi, $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\leq\sqrt{h}$. On pose ensuite $h=y-x$ et on obtient le résultat.

   (b) Soit $\varepsilon>0$. Alors, $\exists\eta=\varepsilon^2$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$,
   $$|x-y|\leq\eta\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\overset{4.(a)}{\leq}\sqrt{|x-y|}\leq\sqrt{\eta}=\varepsilon.$$
   La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est donc bien uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) On a $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=\left|(\sqrt{x}-\sqrt{y})\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right|=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x+y}}\overset{4.(a)}{\leq}\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ n'est pas borné, la fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas lipschitzienne.
5. (a) On verra par la suite qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue (théorème de Heine). On insiste sur l'importance de travailler sur un intervalle fermé borné. En effet, la fonction $x\mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pourtant elle n'est pas uniformément continue. La preuve : soit $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, alors $\forall\eta>0$, $\exists(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$,
   $$|x_n-y_n|=|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}|<\eta \text{ et } |x_n^2-y_n^2|=|\sqrt{n}^2-\sqrt{n+1}^2|=1>\varepsilon$$
   ce qui prouve la non continuité uniforme de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. (On a utilisé la caractérisation de l'uniforme continuité avec les suites soit :“$f:A\to E$ est uniformément continue si et seulement si pour tout couple de suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$”).

   (b) Une fonction lipschitzienne sur un intervalle I d'intérieur non vide est uniformément continue sur I. Par contraposée, comme $x\mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
6. On donne à la page suivante une idée graphique de ce qu'est la continuité uniforme et du résultat souhaité à savoir la possibilité de majorer toute fonction uniformément continue par l'équation d'une droite. La fonction bleue $x\mapsto x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, on peut promener le même rectangle de taille fixée le long du graphe, ce dernier n'en sort jamais. La fonction rouge $x\mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Quoi qu'on fasse, si on fait tendre x vers de grandes valeurs, le graphe va finir par sortir du rectangle de taille fixée.
   Le résultat qu'on souhaite établir décrit simplement la succession des rectangles à l'aide d'une droite.

(a) F est une application uniformément continue donc pour $\varepsilon > 0$ donné, en particulier $\epsilon = 1$, $\exists \eta_1 > 0$ tel que
$$|x-y| \leq \eta_1 \text{ et } |F(x)-F(y)| < 1.$$

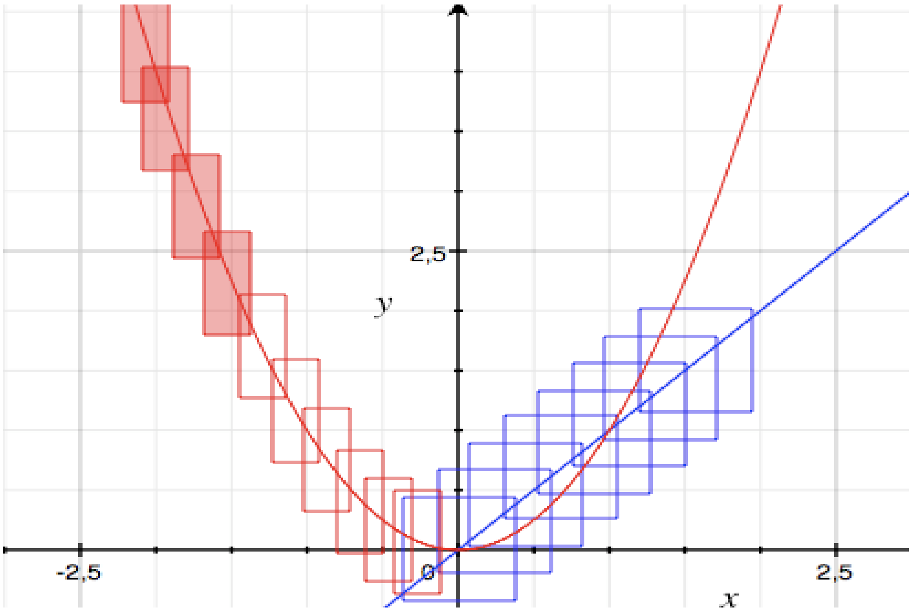

FIGURE 1 – Question 6. Interprétation graphique de la convergence uniforme (source : http ://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php ?4,386744,386846)

(b) On rappelle l'axiome d'Archimède : "Quels que soient les nombres réels a, b tels que $a > 0$, il existe un entier p tel que $ap \geq b$". On applique cet axiome avec $a = \eta_1$, $b = x_0$ et $p = n_0$. On montre facilement que $n_0 = E\left(\dfrac{x_0}{\eta_1}\right) + 1$ si $x_0 \neq 0$, et $n_0 = 1$ sinon.

(c) On remarque aisément que :
$$F(x_0) - F(0) = \sum_{k=0}^{n_0-1}\left(F\left(\frac{(k+1)}{n_0}x_0\right) - F\left(\frac{k}{n_0}x_0\right)\right).$$
On passe aux valeurs absolues et on applique l'inégalité triangulaire. On obtient le résultat.

(d) D'après la question précédente, n_0 est le plus petit entier tel que
$$\frac{x_0}{n_0} = \frac{(k+1)}{n_0}x_0 - \frac{k}{n_0}x_0 \leq \eta_1.$$
Comme F est uniformément continue, on a d'après la question 6.(a)
$$\left|F\left(\frac{(k+1)}{n_0}x_0\right) - F\left(\frac{k}{n_0}x_0\right)\right| < 1.$$
Par conséquent,
$$|F(x_0) - F(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1}\left|F\left(\frac{(k+1)}{n_0}x_0\right) - F\left(\frac{k}{n_0}x_0\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} 1 = n_0,$$
ce qui implique que
$$F(x_0) - F(0) \leq n_0 = \left\{\begin{array}{l} E\left(\dfrac{x_0}{\eta_1}\right) + 1 \leq \dfrac{x_0}{\eta_1} + 1 \text{ si } x_0 \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{array}\right. .$$
Finalement, en posant $a = \dfrac{1}{\eta_1}$ et $b = F(0) + 1$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) \leq ax + b$.

7. (a) On a démontré que la fonction $x \mapsto x^2$ n'était pas uniformément continue donc les fonctions de polynômes de degré supérieur ou égal à 2 ne sont pas uniformément continues sur $\mathbb{R}$.
On peut le vérifier aisément à l'aide de la propriété précédente qui d'ailleurs se généralise au cas des fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: " Si F est uniformément continue, alors il existe $a, b > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq a|x| + b$". Mais la réciproque est fausse, par exemple avec $x \mapsto \sin(x^2)$.

(b) Pour les raisons invoquées précédemment, la fonction exponentielle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, il est impossible de trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $e^x \leq ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

8. G est supposée continue sur I mais non uniformément continue sur cet intervalle.

(a) On sait alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \alpha > 0,\ \exists (x, y) \in I^2,\ |x - y| < \alpha$ et $|G(x) - G(y)| \geq \varepsilon$. Pour $\alpha = \dfrac{1}{n}$, on prend $(x_n, y_n) \in I^2$ vérifiant $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ et $|G(x_n) - G(y_n)| \geq \varepsilon$.

(b) Comme I est borné, les suites (x_n) et (y_n) ainsi définies le sont également. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire des sous-suites qui convergent. Soit $\sigma : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ une application strictement croissante telle que la suite $(x_{\sigma(n)})$ converge. Notons ℓ sa limite (on a nécessairement $\ell \in I$ puisque I est fermé).

(c) Fixons $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^\star$. On a donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\sigma(n)}\right| \leq \frac{\varepsilon'}{2}\right).$$

Mais, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| < \dfrac{1}{\sigma(n)}$. Comme $\dfrac{1}{\sigma(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N_2 \Rightarrow |x_{\sigma(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon'}{2}\right).$$

Pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a alors

$$|y_{\sigma(n)} - \ell| \leq |y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} \leq \varepsilon'.$$

Ceci prouve que la suite $(y_{\sigma(n)})$ converge également vers ℓ.

(d) Or, G étant continue sur I, on peut affirmer que les suites $G(x_{\sigma(n)})$ et $G(y_{\sigma(n)})$ convergent vers $G(\ell)$. Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| < \varepsilon).$$

Cela contredit l'hypothèse selon laquelle G n'est pas uniformément continue. On a bien démontré le théorème de Heine.

9. Notons tout d'abord que si G est supposée continue sur tout $\mathbb{R}$ alors G uniformément continue sur $I_1, \ldots, I_n$ implique G uniformément continue sur $\cup_i I_i$ (union finie).
Cependant, si on sait seulement que G est uniformément continue sur $I_1, \ldots, I_n$, sans savoir que G est continue (simplement) sur $\mathbb{R}$, alors on ne peut pas conclure. On donne un contre-exemple.
Soit $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$, alors G est uniformément continue sur $I_1 =]-\infty; 0]$ et aussi uniformément continue sur $I_2 =]0; +\infty[$ et $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}$ mais il est clair que G n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est même pas continue sur $\mathbb{R}$.