MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

ANALYSE 2 Décembre 2012 - Contrôle Terminal, Session 1, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les deux exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *Correction* : 7pts

1. 0,5pt Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sinus est positive donc I_n est positive.
   0,5pt De plus $\sin(x) \leq 1$ donc la suite $(\sin^n(x))_n$ est décroissante et $(I_n)_n$ également.

2. 1pt $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n+1}(x)dx$. En posant $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sin^{n+1}(x)$ et en intégrant par parties nous obtenons
$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)dx = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}.$$
   Donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
   1pt Un petit calcul donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. Donc par récurrence pour n pair nous obtenons que
$$I_n = \frac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots n}\frac{\pi}{2},$$
   et pour n impair :
$$I_n = \frac{2.4\ldots(n-1)}{1.3\ldots n}.$$
   1pt Avec le changement de variable $x = \cos(u)$, on montre assez facilement que $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2(u))^n(-\sin(u)du) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)du = 2I_{2n+1}$.

3. 1pt Comme (I_n) est décroissante alors $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en divisant le tout par $I_n > 0$ nous obtenons $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Mais nous avons déjà calculé $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers $+1$ et $I_n \sim I_{n+1}$.

4. 1pt Lorsque l'on calcule $(n+1)I_nI_{n+1}$ à l'aide des expressions explicitées à la deuxième question, nous obtenons une fraction qui se simplifie presque complètement : $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Maintenant
$$I_n^2 \sim I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n} \text{ donc } I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5. 1pt $\displaystyle\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n)} = (2n+1)^2\frac{2}{\pi}I_{2n} \sim (2n+1)^2\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Exercice 2 *Correction* : 6pts

1. 1pt $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$ sont entiers. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ ou encore tels que $n = \frac{a^2}{b^2}$. Si $b = 1$, alors $\sqrt{n} = a$ est un entier. Si $b \geq 2$, tout facteur premier de a^2 ou de b^2 apparaît avec un exposant pair dans la décomposition primaire de a^2 ou de b^2. Il en est de même pour tout facteur premier de $n = \frac{a^2}{b^2}$ ce qui signifie que n est un carré parfait ou encore que $\sqrt{n}$ est un entier.

On a montré que si $\sqrt{n}$ est rationnel, alors $\sqrt{n}$ est entier. Par contraposition, si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ Soit p un nombre premier. p est en particulier un entier supérieur ou égal à 2. Montrons que $\sqrt{p}$ n'est pas entier. Dans le cas contraire, il existe un entier naturel $n > 2$ tel que $\sqrt{p} = n$ ou encore tel que $n^2 = p$. Cette égalité est impossible par unicité de la décomposition en facteurs premiers car le nombre premier p apparaît avec un exposant pair dans le premier membre de cette égalité et avec un exposant impair dans le second. Donc $\sqrt{p}$ n'est pas entier ce qui implique d'après la question précédente que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un réel strictement positif. Supposons que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ soit un rationnel strictement positif. Il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b\ln(2) = a\ln(3) \Leftrightarrow e^{b\ln(2)} = e^{a\ln(3)} \Leftrightarrow 2^b = 3^a.$$

Cette égalité est impossible par unicité de la décomposition en facteurs premiers car 2 et 3 sont des nombres premiers et $a, b > 0$. Donc $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

4. (a) • $\boxed{\text{0,5pt}}$ Pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.

• $\boxed{\text{0,5pt}}$ Pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}.$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement décroissante.

• $\boxed{\text{0,5pt}}$ Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nn!} = 0$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Finalement, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers e en croissant strictement et donc pour tout entier naturel non nul n, $u_n < e$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a même limite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers e en décroissant strictement. On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $v_n > e$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n < e < v_n.$$

En particulier, $u_q < e < v_q$.

(b) $\boxed{\text{1pt}}$ Soit $q \in \mathbb{N}^\star$. D'après la question précédente, $q! \times q \times u_q < q! \times q \times e < q! \times q \times v_q$, ce qui s'écrit encore

$$q\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < p \times q! < 1 + q\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}.$$

Pour tout entier $k \in \{0, \dots, q\}$, $\dfrac{q!}{k!}$ est un entier et donc $q\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est un entier. Ainsi, l'entier $p \times q!$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs. Ceci est une contradiction et il était donc absurde de supposer e rationnel. On a donc montré que e est irrationnel.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{9pts}}$

1. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Pour tout réel t, $g(t) = \dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. De plus, pour tout réel t, $g(t) > 0$. On a

$$-g(t)\ln(g(t)) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2}\right).$$

La fonction $t \mapsto -g(t)\ln(g(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

$\boxed{\text{1pt}}$ Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t^2}{2}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt &= \int_0^A \frac{t}{2} \times \frac{te^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = \left[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{t}{2}\right]_0^A + \frac{1}{2}\int_0^A \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt \\ &= -\frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\int_0^A \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt\end{aligned}$$

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Maintenant, il est admis dans l'énoncé que la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{2}$. Quand A tend vers $+\infty$, $-\dfrac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{A}{2}$ tend vers 0 d'après un théorème des croissances comparées et donc quand A tend vers $+\infty$, on obtient la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Mais alors

$$H(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt + \frac{\ln(2\pi)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = \frac{1+\ln(2\pi)}{2}.$$

(b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit $\lambda > 0$. Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0$ puis

$$-h(x)\ln(h(x)) = -\lambda e^{-\lambda x}\ln(\lambda e^{-\lambda x}) = -\ln(\lambda)\lambda e^{-\lambda x} + \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

La fonction $x \mapsto -h(x)\ln(h(x))$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit ensuite $A > 0$. Les deux fonctions $x \mapsto -e^{-\lambda x}$ et $x \mapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx &= \lambda\left(\int_0^A x\lambda e^{-\lambda x}dx\right) = \lambda\left([-xe^{-\lambda x}]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x}dx\right) \\ &= -\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx = 1$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Par suite,

$$H(h) = -\ln(\lambda)\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx + \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx = 1 - \ln(\lambda).$$

2. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit $x > 0$. Pour $y > 0$, on pose $f(y) = x\ln(x) + y - x - x\ln(y)$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $y > 0$,

$$f'(y) = 1 - \frac{x}{y} = \frac{y-x}{x}.$$

f' est strictement négative sur $]0, x[$ et strictement positive sur $]x, +\infty[$ puis f est strictement décroissante sur $]0, x]$ et strictement croissante sur $[x, +\infty[$. Par suite, f admet un minimum global strict en x égal à

$$f(x) = x\ln(x) + x - x - x\ln(x) = 0.$$

On a montré que pour tous réels strictement positifs x et y, $x\ln(y) \leq x\ln(x) + y - x$ avec égalité si et seulement si $y = x$.

(b) $\boxed{\text{1,5pt}}$ Écrivons la continuité de f en x_0 avec $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on ait $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Avec notre choix de ε cela donne pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ l'inégalité $f(x) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$. Pour évaluer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, nous scindons cette intégrale en trois morceaux, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx.$$

Comme f est positive, par positivité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx \geq 0$ et $\displaystyle\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geq 0$.

Pour le terme du milieu, on a $f(x) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$ donc $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}dx = 2\delta\frac{f(x_0)}{2}$ (pour la dernière équation on calcule juste l'intégrale d'une fonction constante !). Le bilan de tout cela est que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 2\delta\frac{f(x_0)}{2} > 0$. Donc pour une fonction continue et positive f, si elle est strictement positive en un point alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. Par contraposition, pour une fonction continue et positive, si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle.

3. (a) • $\boxed{\text{0,5pt}}$ La fonction $t \mapsto tg(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, négligeable en $+\infty$ ou $-\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, la fonction $t \mapsto tg(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction $t \mapsto tg(t)$ est impaire, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = 0$.

   • $\boxed{\text{0,5pt}}$ La fonction $t \mapsto t^2g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, négligeable en $+\infty$ ou $-\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, la fonction $t \mapsto t^2g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   D'après le calcul de la question 1.(a), $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2g(t)dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = 4 \times \frac{1}{4} = 1$. On a bien montré que $g \in \mathcal{N}$.

(b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit $f \in \mathcal{N}$.

$$\begin{aligned}
H(g) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(g(x))dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - f(x))\ln(g(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - f(x))\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi)\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2\pi)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right) - \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2\pi)(1-1) - \frac{1}{2}(1-1) = 0
\end{aligned}.$$

Donc, $H(g) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(g(x))dx$.

(c) • $\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit $f \in \mathcal{N}$.

$$\begin{aligned}
H(g) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(g(x))dx \\
&\geq \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)\ln(f(x)) + g(x) - f(x))dx \text{(d'après la question 2.(a))} \\
&= H(f) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = H(f) + 1 - 1 = H(f).
\end{aligned}$$

   • $\boxed{\text{0,5pt}}$ De plus,

$$H(g) = H(f) \Leftrightarrow H(g) - H(f) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x))dx = 0.$$

   D'après la question 2.(a), la fonction $x \mapsto f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On a alors :

$$0 \leq \int_a^b (f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x))dx \leq$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x))dx = 0.$$

   Donc, $\displaystyle\int_a^b (f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x))dx = 0$ puis, d'après la question 2.(b), pour tout $x \in [a,b]$, $f(x)\ln(f(x)) - f(x)\ln(g(x)) + g(x) - f(x) = 0$. Mais alors d'après la question 2.(a), pour tout x de $[a,b]$, $f(x) = g(x)$. Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, on a montré que si $H(f) = H(g)$, alors $f = g$. Réciproquement, si $f = g$ alors $H(f) = H(g)$ et on a montré que $\forall f \in \mathcal{N}$, $H(f) = H(g) \Leftrightarrow f = g$.