MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

ANALYSE 2 Mai 2012 - Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les quatre exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *Correction* :

1. On a, pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{|\sin(k)|}{k^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. La série est donc absolument convergente.
2. Il suffit de remarquer que :
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}.$$
3. On veut $\dfrac{1}{N} \leq 10^{-2} \Rightarrow N \geq 100$. Malheureusement, la calculatrice ne peut donner qu'une valeur approchée de S_{100}. Si on a un encadrement de S_{100} à 10^{-2} près, on a un encadrement de S à 2×10^{-2} près.
4. On sait que $|S - S_{1000}| \leq 10^{-3}$. Or, la calculatrice fournit $S_{1000} = 1,013\dots$ Ceci signifie que
$$-10^{-3} \leq S_{1000} - 1,013 \leq 10^{-3}.$$
Ainsi, en sommant les deux inégalités, on obtient
$$-10^{-2} \leq -2\times 10^{-3} \leq S - 1,013 \leq 2\times 10^{-3} \leq 10^{-2}.$$
Ainsi, $1,013$ est une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Exercice 2 *Correction* :

1. Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction sinus est positive donc I_n est positive. De plus $\sin(x) \leq 1$ donc la suite $(\sin^n(x))_n$ est décroissante.
2. $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n+1}(x)dx$. En posant $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sin^{n+1}(x)$ et en intégrant par parties nous obtenons
$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)dx = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}.$$
Donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Un petit calcul donne $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. Ainsi par récurrence pour n pair nous obtenons :
$$I_n = \frac{1.3\dots(n-1)}{2.4\dots n}\frac{\pi}{2},$$
et pour n impair :
$$I_n = \frac{2.4\dots(n-1)}{1.3\dots n}.$$
Avec le changement de variable $u = \cos(x)$, on montre assez facilement que
$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = 2\int_0^1 (x^2-1)^n dx = 2I_{2n+1}.$$
3. Comme (I_n) est décroissante alors $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en divisant le tout par $I_n > 0$ nous obtenons $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Mais nous avons déjà calculé $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers $+1$ et $I_n \sim I_{n+1}$.

4. Lorsque l'on calcule $(n+1)I_nI_{n+1}$ à l'aide des expressions explicitées à la deuxième question, nous obtenons une fraction qui se simplifie presque complètement : $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$. Maintenant

$$I_n^2 \sim I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n} \text{ donc } I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5. $\dfrac{1.3\dots(2n+1)}{2.4\dots(2n)} = (2n+1)^2\dfrac{2}{\pi}I_{2n} \sim (2n+1)^2\dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \sim 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$.

Exercice 3 *Correction* :

1. (a) On a directement $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{1-t}dt = [-e^{1-t}]_0^1 = e-1$.
Une intégration par parties (en dérivant t, et en intégrant e^{1-t}) donne :

$$I_1 = \int_0^1 te^{1-t}dt = [-te^{1-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-t}dt = -1 + I_0 = e-2.$$

(b) Soit n un entier naturel non nul. On intègre I_n par parties, en notant que la dérivée de $t \mapsto \dfrac{t^n}{n!}$ est $t \mapsto \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, et qu'une primitive de $t \mapsto e^{1-t}$ est $t \mapsto -e^{1-t}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt = \left[-\frac{t^n}{n!}e^{1-t}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-t}dt = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}.$$

On a donc bien obtenu la relation $I_n - I_{n-1} = -\dfrac{1}{n!}$, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$.

(c) On additionne membre à membre les égalités

$$(E_p) : I_p - I_{p-1} = -\frac{1}{p!} \text{ pour } 1 \leq p \leq n.$$

On trouve $I_n - I_0 = -\displaystyle\sum_{p=1}^n \frac{1}{p!}$ donc $I_n = I_0 - \displaystyle\sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$, pour tout $n \geq 1$ (expression encore valable lorsque $n = 0$).

2. (a) On se donne n dans $\mathbb{N}^\star$. On a bien-sûr $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt \geq 0$ (on intègre une fonction positive sur $[0,1]$). Par ailleurs on a $t^n \leq t$ sur $[0,1]$ et on sait que $e \leq 3$. On en déduit $I_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 te^{1-t}dt$ c'est-à-dire $I_n \leq \dfrac{I_1}{n!}$ donc $I_n \leq \dfrac{e-2}{n!} \leq \dfrac{1}{n!}$

(b) L'encadrement précédent donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. Avec 1.(c) et 2.(a), on a $0 \leq e - \displaystyle\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{n!}$.
Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, on a l'encadrement :

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \leq e \leq \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}.$$

Exercice 4 *Correction* :

1. Soit x un réel strictement positif fixé. On a $\ln(x+1) - \ln(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{dt}{t}$. La double inégalité $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{x}$, valable pour tout $t \in [x, x+1]$, fournit alors le résultat attendu par intégration terme à terme, de $t = x$ à $t = x+1$.

2. On considère l'encadrement $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$, valable pour tout k de $\mathbb{N}^\star$. On en déduit : $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k} \ln(k) - \ln(k+1)$ pour tout entier $k \geq 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On additionne ces égalités, membre à membre, de $k = n+1$ (≥ 2) à $k = 2n$.

On obtient $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$ donc $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln(2)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.

3. On va montrer que la suite de terme général $w_n = u_n - u_{2n}$ est constante, égale à 0. Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on a $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - u_n - (v_{2n+2} - v_{2n})$.
Mais $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$.
De même, $v_{2n+2} - v_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$.
Par conséquent, $w_{n+1} - w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ ce qui signifie que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est constante. Or $u_1 = v_1 = \dfrac{1}{2}$ donc $w_1 = 0$. On a de ce fait $w_n = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^\star$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a $v_{2n} = u_n$. On en déduit bien-sûr $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \ln(2)$. On a $v_{2n+1} = v_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \ln(2)$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(2)$.

4. Il suffit de remarquer que $\dfrac{1}{k}$ est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$ pour $k \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - (-1)^n J_n = \ln(2) - (-1)^n J_n \text{ avec } J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt. \end{aligned}$$

On a $0 \leq \dfrac{t^n}{1+t} \leq t^n$ sur $[0,1]$ donc $0 \leq J_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^n dt$. Autrement dit, $0 \leq J_n \dfrac{1}{n+1}$. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(2)$. L'égalité $u_n = v_{2n}$ redonne évidemment $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$