MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

ANALYSE 2 Novembre 2010 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents et calculatrice interdits

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

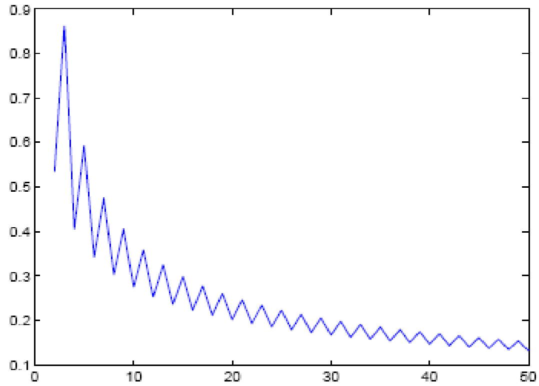
Exercice 1 *Critère des séries alternées.*

Soit la série numérique de terme général

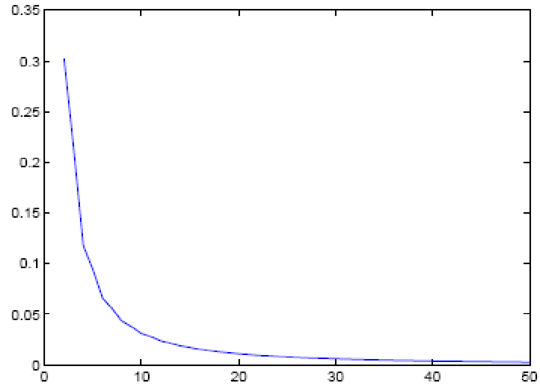
$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}_+^\star,\ n \geq 2.$$

Le but de l'exercice est d'établir la nature de cette série en fonction du paramètre α, et de montrer que les équivalents sont à manipuler avec la plus grande prudence sur les séries à signe quelconque.

1. Vérifier que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série alternée.
2. Pour quelle raison l'applicabilité (ou la non-applicabilité) du théorème des séries alternées est-elle difficile à établir ? On donne ci-dessous, à titre indicatif, des représentations graphiques de $|u_n|$ pour quelques valeurs de α (bien-sûr, cela ne constitue en rien une preuve et ne permet pas d'appliquer le théorème, la nature de la série étant établie dans les questions suivantes).



Non décroissance de $|u_n|$ avec $\alpha = 0,5$



Décroissance de $|u_n|$ avec $\alpha = 1,5$

3. Donner un équivalent de $|u_n|$ à l'infini. En déduire la convergence absolue de la série lorsque $\alpha > 1$.
4. Pour étudier la convergence de la série pour $0 < \alpha \leq 1$, il va falloir procéder autrement.
   (a) En utilisant un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2, montrer que l'on peut écrire :
   $$u_n = v_n + w_n,$$
   avec v_n une série alternée et w_n une série à terme de signe constant au-delà d'un certain rang. (*Attention* : il s'agit bien d'une égalité et non d'une équivalence !)
   (b) Établir la convergence de la série de terme général v_n, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^\star$.
   (c) Étudier la convergence de la série de terme général w_n suivant la valeur du réel α.
   (d) Conclure sur la convergence de $\sum_{n\geq 2} u_n$ suivant la valeur de $0 < \alpha \leq 1$.
5. Quelle (fausse) conclusion aurait-on tiré si on avait directement utilisé un équivalent de u_n à l'infini sans passer par un développement limité à l'ordre 2 comme suggéré dans la question 4. ?

Exercice 2 *Intégration - Polynômes de Bernoulli.*

On dit qu'une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = B_n, \\ \forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1). \end{cases}$$

On vérifie facilement par récurrence que tous les B_n sont bien des fonctions polynomiales.

1. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de Bernoulli.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n, donc de la forme $B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} X^k$. Montrer alors que son coefficient dominant vérifie $\alpha_{n,n} = \dfrac{1}{n!}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.
   (c) Montrer à l'aide des deux questions précédentes que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par
   $$B_n(X) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{n-1,j-1}}{j(j+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-1,k}}{k+1} X^{k+1}.$$
   On dira que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Bernoulli.
2. Montrer que :
   $$\begin{cases} B_1(X) &= X - \dfrac{1}{2} \\ B_2(X) &= \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{12} \end{cases}.$$
3. Calculer B_3 et B_4.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
5. On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$.
   (a) Calculer b_0, b_1, b_2, b_3 et b_4.
   (b) Montrer que $b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 3$ qui est impair.

Exercice 3 *Séries de Fourier.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction régularisée, 2π-périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$.

1. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier vers f.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.