MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

ANALYSE 2 Décembre 2011 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f une fonction de classe C^1. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$
(Cette question doit vous rappeler celle posée dans l'examen précédent, et relative au lien qui existe entre $\cos(kt)$ et e^{ikt}.)
4. À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer deux réels a et b tels que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$
Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$
5. Déduire des questions précédentes que $S_n \underset{+\infty}{\to} \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que
$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$. On suppose enfin qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

1. Montrer que $R \geq R'$.
On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.
2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on ait $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.

3. En déduire que $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(\ell - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (\ell + \varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que
$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
où P est un polynôme, et $(\ell - \varepsilon)b_n \leq c_n \leq (\ell + \varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Exercice 3 Étant donnée une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I lorsque :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition "f n'est pas uniformément continue sur I".
2. On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne de rapport k, où k est un réel strictement positif, si pour tout couple (x, y) d'éléments de I on a :
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$
Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.
3. (a) Montrer que pour tous réels x et y on a :
$$||y| - |x|| \leq |y - x|.$$
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}.$$
   Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a :
$$\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{et} \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|}.$$
   (b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
5. (a) En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n + 1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction h est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?
6. Soit F une application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$F(x) \leq ax + b.$$
   (a) Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |x - y| \leq \eta_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq 1.$$
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Soit n_0 le plus petit entier tel que $\frac{x_0}{n_0} \leq \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.
   (c) Montrer que :
$$|F(x_0) - F(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k + 1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|.$$
   (d) Conclure.

7. (a) Les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}$?
   (b) La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?
8. Théorème de Heine.
   Soit $I = [a, b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine : *si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I.*
   On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a; b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.
   (a) Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n>1}$ et $(y_n)_{n>1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geq 1$:
   $$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon.$$
   (b) Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ convergentes telles que pour tout entier $n \geq 1$:
   $$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon.$$
   (c) Montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}.$$
   (d) Conclure.
9. Soit J un intervalle d'intérieur non vide. Si une fonction G est uniformément continue sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans J, G est-elle nécessairement uniformément continue sur J ?