MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

ANALYSE 2 Décembre 2012 - Contrôle Terminal, Session 1, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
2. Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n, en déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$.
3. Montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
4. À l'aide de $(n+1)I_n I_{n+1}$ montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. En déduire $\dfrac{1.3\dots(2n+1)}{2.4\dots(2n)} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$.

Exercice 2

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel (penser à la contraposition).
2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.
4. On rappelle que $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel.
   Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $e = \dfrac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$
   (a) Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que :
   $$u_q < e < v_q$$
   (b) Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Exercice 3 Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si f est positive, intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.
Lorsqu'en plus $f\ln(f)$ est intégrable, on définit l'**entropie** associée à f par :

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(f(x))dx.$$

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des densités de probabilités qui possèdent une entropie. Le but de cet exercice est de déterminer quelle densité maximise l'entropie, c'est-à-dire correspond à la quantité minimale d'information.

1. *Deux exemples :*
   On admet que les deux fonctions suivantes sont des densités de probabilité. Calculer l'entropie associée à chacune d'elles.
   (a) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$
   (b) h définie par $h(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$, $h(t) = 0$ sinon, où λ est un réel strictement positif.
2. *Deux résultats préliminaires.*
   (a) Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y :
   $$x\ln(y) \leq x\ln(x) + y - x \qquad \text{et} \qquad x\ln(y) = x\ln(x) + y - x \Leftrightarrow x = y.$$
   (Étudier les variations de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & x\ln(x) + y - x - x\ln(y) \end{array}$)
   (b) Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. Démontrer que :
   $$\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b],\ f(x) = 0.$$
   On pourra procéder par contraposition.
3. *Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance.*
   On s'intéresse dans cette question aux fonctions de $\mathcal{H}$ d'espérance nulle et de variance égale à 1, c'est-à-dire telles que :
   - $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale nulle,
   - $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1.

   On appelle $\mathcal{N}$ cet ensemble.
   (a) Démontrer que $g \in \mathcal{N}$, où g désigne la fonction définie à la question 1.(a).
   (b) Soit f un élément de $\mathcal{N}$. Démontrer que :
   $$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(g(x))dx = H(g).$$
   (c) En utilisant les résultats de la question 2., démontrer que :
   - $H(f) \leq H(g)$,
   - $H(f) = H(g) \Leftrightarrow f = g$.