Master 1 Métiers de l'Enseignement, Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2012/2013

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 10 - Équations différentielles.

1 Équations différentielles d'ordre 1 sur E

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|x\|$ telle que, pour tout $\lambda \in K$, et tous $x, y \in E$,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, et $f : U \to E$, une application continue. L'équation différentielle d'ordre 1 définie sur U par f est l'équation*

$$y' = f(t, y). \tag{1}$$

Une fonction $y : I \to E$, définie sur l'intervalle réel I, est une solution de (1) si y est dérivable, et si, pour tout t de I, le point $(t, y(t))$ appartient à U et $y'(t) = f(t, y(t))$.

Théorème 1.1 *(Théorème d'unicité de Cauchy)*
On suppose f non seulement continue, mais de classe $\mathcal{C}^1$. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle (1) définies sur des intervalles ouverts I_1 et I_2, qui coïncident en un point $t \in I_1 \cap I_2$, alors y_1 et y_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$.

Théorème 1.2 *(Existence locale des solutions)*
On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(t_0, y_0) \in U$. Il existe alors un intervalle ouvert I contenant t_0 et une solution $y : I \to E$ de l'équation (1) telle que $y(t_0) = y_0$.

1.1 Équations différentielles linéaires

Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie n, muni d'une norme E, l'espace vetoriel $End(E)$ des endomorphismes de E est aussi un espace vectoriel de dimension finie n^2. Soit $t \mapsto u(t)$ une fonction d'un intervalle réel I dans $End(E)$, et pour tout $t \in I$, $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j}$ la matrice de $u(t)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Pour que u soit une application continue de I dans $End(E)$ il faut et il suffit que chacune des fonctions $t \mapsto a_{i,j}(t)$ soit continue pour i, j $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$.

Définition 1.2 *Soit I un intervalle réel et E un espace vectoriel normé de dimension finie, $A : I \to End(E)$ une application continue (autrement dit, A est un endomorphisme de E, qui dépend continûment du temps), et enfin $B : I \to E$ une application continue. On note*

$$Y' = A(Y) + B \text{ ou encore } Y' = AY + B \tag{2}$$

l'équation différentielle définie par l'application

$$f : I \times E \to E,\ (t, Y) \to A(t)(Y) + B(t).$$

Une telle équation est appelée équation différentielle linéaire définie sur I. Si $B = 0$, on dit que l'équation est homogène. Les solutions de l'équation (2) sont donc les fonctions $Y : I \to E$ telles que $Y'(t) = A(t)(Y(t)) + B(t)$.

Théorème 1.3 *(Théorème d'existence globale et d'unicité).*
Soit l'équation linéaire (2) de la Définition 1.2 Quelle que soit la condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times E$, il existe une unique solution définie sur I tout entier qui prend la valeur y_0 en t_0.

Remarque 1.1

1. Contrairement au cas d'une équation différentielle non linéaire, la continuité de f suffit ici à assurer l'existence et l'unicité des solutions.
2. De plus, toute solution sur un sous-intervalle de I se prolonge en une solution définie sur I tout entier, ce qui est en général faux pour une équation non linéaire.

1.2 Équation linéaire homogène

Théorème 1.4 *Soit $y(t)$ une solution de l'équation linéaire homogène $Y' = AY$ définie sur I. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $Y(t_0) = 0$, alors Y est identiquement nulle.*

Théorème 1.5 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et l'équation différentielle linéaire homogène définie sur $I \times E$.*

$$Y' = AY, \tag{3}$$

1. *L'ensemble des solutions de (3) est un espace vectoriel de dimension n.*
2. *Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des solutions de l'équation (3), et $t_0 \in I$. Pour que les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ soient linéairement indépendantes il faut et il suffit que les vecteurs $Y_1(t_0), Y_2(t_0), \ldots, Y_n(t_0)$ soient linéairement indépendants dans E. Si cela est vérifié, alors $Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)$ sont linéairement indépendants pour toute valeur de t. Lorsque que cette condition est vérifiée on dit que $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions de (3).*

1.3 Équations linéaires numériques

Le cas des équations différentielles linéaires numériques est particulièrement simple. Leur résolution se ramène à des calculs de primitives. Soit $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$. Une équation différentielle linéaire numérique est une équation de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \tag{4}$$

avec $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$.

Théorème 1.6 *Soit l'équation linéaire homogène réelle $y'(t) = a(t)y(t)$ définie sur l'intervalle I. La solution de cette équation qui prend la valeur y_0 en t_0 est*

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(t)dt\right) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(t)dt\right). \tag{5}$$

Méthode de variation de la constante, cas numérique.
Supposons que l'on connaisse une solution u non nulle (et donc jamais nulle) de l'équation homogène $y' = ay$ associée à l'équation (4). Soit y une fonction quelconque définie sur I. Posons $y = zu$, c'est-à-dire $z = \dfrac{y}{u}$. On a alors, $y' = z'u + zu'$, et l'équation (4) s'écrit encore

$$z'u + zu' = azu + b$$

soit

$$z'u = z(au - u') + b = b,$$

ou encore $z' = \dfrac{b}{u}$. On en déduit z par intégration, puis $y = zu$.

Exercice 1 Prouver que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2}y = 0$ admet une limite nulle en $+\infty$.

Correction : On sait que toute solution s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{A(x)} \text{ avec } A(x) = -\int_0^x e^{t^2}dt.$$

Or, pour $t \geq 0$, on a $e^{t^2} \geq 1$ d'où l'on déduit que pour $x \geq 0$,

$$\int_0^x e^{t^2}dt \geq \int_0^x 1dx = x.$$

On en déduit que $A(x)$ tend vers -1 quand x tend vers $+\infty$ et donc par composition et produit que $y(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1. À quelle(s) condition(s) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ admet-elle des solutions 1-périodiques. Les déterminer.

Correction : La solution générale de l'équation s'écrit

$$y(x) = \left(\alpha + \int_0^x b(t)e^{-A(t)}dt\right) e^{A(x)}$$

où $A(x) = \int_0^0 a(t)dt$. Notons que

$$A(x+1) = A(x) + \int_x^{x+1} a(t)dt = A(x) + \int_0^1 a(t)dt,$$

et posons $\lambda = \int_0^1 a(t)dt$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
y(x+1) &= \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt + \int_1^{x+1} b(t)e^{-A(t)}dt\right) e^{A(x+1)} \\
&= \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt + \int_0^x b(u+1)e^{-A(u+1)}du\right) e^{A(x)+\lambda} \\
&= \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt + \int_0^x b(u)e^{-(A(u)+\lambda)}du\right) e^{A(x)+\lambda} \\
&= y(x) + (\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda)e^{A(x)}
\end{aligned}$$

où on a posé $\mu = \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt$. Autrement dit, f est 1-périodique si et seulement si

$$\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda = 0.$$

Si $\lambda \neq 0$, l'équation admet une unique solution 1-périodique, donnée par

$$\alpha = \frac{\mu e^\lambda}{1 - e^\lambda}.$$

- Si $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, alors toute solution est 1-périodique.
- Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, alors il n'y a aucune solution 1-périodique.

Exercice 3 Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle

$$(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

Correction : Il y a deux clés pour résoudre cet exercice :

- toute fonction impaire vaut 0 en 0 ;
- l'équation différentielle (E) admet une unique solution y_0 vérifiant $y_0(0) = 0$.

Ceci montre déjà l'unicit : s'il y a une fonction y impaire solution de (E), elle vérifie $y(0) = 0$ et doit donc être égale à y_0. Réciproquement, on doit prouver que y_0 est impaire. On va poser $z(t) = -y_0(-t)$. z est solution de (E). En effet,

$$z'(t) + a(t)z(t) = y_0'(-t) - a(t)y_0(-t) = y_0'(t) + a(-t)y_0(t) = b(-t) = b(t),$$

car y_0 est solution de (E), a est impaire et b est paire. z est donc solution de (E), et satisfait de plus $z(0) = 0$. Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, z est égale ‘a y_0, et donc y_0 est paire.
On pouvait aussi prouver que y_0 est impaire, en cherchant à résoudre l'équation différentielle par la méthode usuelle (solution de l'équation homogène à l'aide de l'exponentielle et d'une primitive de a, puis méthode de variation de la constante).

1.4 Variation des constantes, le cas général

Le Théorème 1.6 ne s'étend pas à la dimension $n > 1$. On ne sait pas, en général, ramener la résolution d'une équation linéaire homogène vectorielle à des calculs de primitives. Néanmoins, la méthode de variation de la constante s'applique aussi à une équation différentielle linéaire non homogène (2) en dimension n, si on connaît un système fondamental $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de solutions de l'équation homogène associée. La résolution de l'équation est alors ramenée à des calculs de primitives. Supposons donc que l'on connaisse un sytème fondamental $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de solutions de l'équation homogène $Y' = AY$. On cherche la solution inconnue Y de l'équation non homogène sous la forme $Y = u_1Y_1 + \ldots + u_nY_n$, où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des fonctions numériques à déterminer. On a alors

$$Y' = \sum_{i=1}^n u_i'Y_i + \sum_{i=1}^n u_iY_i', \tag{6}$$

$$AY + B = A\left(\sum_{i=1}^{n} u_i Y_i\right) + B = \sum_{i=1}^{n} u_i AY_i + B = \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i' + B. \tag{7}$$

De $Y_i' = AY_i$ et de (6) et (7) il résulte que $Y' = AY + B$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} u_i' Y_i = B \tag{8}$$

Pour tout t, $(Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t))$ est une base de E, et (8) exprime que $(u_1'(t), u_2'(t), \ldots, u_n'(t))$ sont les coordonnées du vecteur $B(t)$ dans cette base. On calcule donc les u_i' pour $i = 1, 2, \ldots, n$ en résolvant le système linéaire (8) aux inconnues $u_1', u_2', \ldots, u_n'$. Une fois explicités les u_i' on en déduit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ par intégration.

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle $(E) : (1 - t^2)y' - ty = 1$.

Correction : Les points -1 et 1 sont des points singuliers c'est-à-dire qu'ils annulent le coefficient de y'. Soit I un intervalle ne contenant ni -1 ni 1, on cherche alors une I-solution à savoir une solution dérivable sur I et vérifiant l'équatin différentielle. On pose $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 1[$ et $I_3 =]1; +\infty[$. Pour $t \in I$, on a $a(t) = \dfrac{t}{1 - t^2}$ et $b(t) = \dfrac{1}{1 - t^2}$, les fonctions a et b sont continues sur I, les solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) sont les fonctions y définies sur I par :

$$y(t) = K \exp\left(\int \frac{t}{1 - t^2} dt\right) = K \exp\left(-\frac{1}{2} \ln|1 - t^2|\right) = \frac{K}{\sqrt{|1 - t^2|}}.$$

La méthode de la variation de la constante permet de déterminer une solution particulière y_0 définie sur I par $y_0(t) = \dfrac{K(t)}{\sqrt{|1 - t^2|}}$ avec K une fonction dérivable sur I. On a :

$$\forall t \in I,\ (1 - t^2)\frac{K'(t)}{\sqrt{|1 - t^2|}} = 1.$$

On distingue deux cas :

- Si $t \in I_2$ alors $|1 - t^2| = 1 - t^2$. Ainsi, $K'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ et $K(t) = \arcsin(t)$ donc les I_2-solutions sont les fonctions y_2 définies sur I_2 par :
$$\exists K_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in]-1; 1[,\ y(t) = \frac{K_2 + \arcsin(t)}{\sqrt{1 - t^2}}.$$
- Si $t \in I_1$ ou $t \in I_3$ alors $|1 - t^2| = t^2 - 1$. Ainsi, $K'(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$ et $K(t) = -\ln|t + \sqrt{t^2 - 1}|$. Par conséquent, les I_1-solutions sont les fonctions y_1 définies par :
$$\exists K_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in]-\infty; -1[,\ y_1(t) = \frac{K_1 - \ln|t + \sqrt{t^2 - 1}|}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$
Les I_3-solutions sont les fonctions y_3 définies par :
$$\exists K_3 \in \mathbb{R},\ \forall t \in]1; +\infty[,\ y_3(t) = \frac{K_3 - \ln|t + \sqrt{t^2 - 1}|}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Exercice 5 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 2x(1 - x)y' + (1 - x)y = 1.$$

1. Résoudre l'équation (E).
2. Montrer qu'il existe une unique $]-\infty; 1[$-solution de l'équation (E).
3. Existe t-il des $\mathbb{R}$-solutions de l'équation (E) ?

Correction :

1. L'équation (E) admet deux points singuliers 0 et 1. Soit I un intervalle ne contenant ni 0 ni 1, on cherche une I-solution. On pose $I_1 =]-\infty; 0[$, $I_2 =]0; 1[$ et $I_3 =]1; +\infty[$. Les I-solutions de l'équation homogène (H) : $2xy' + y = 0$ sont les fonctions y définies sur I par :
$$y(x) = K \exp\left(-\int \frac{dx}{2x}\right) = K \exp\left(-\frac{1}{2} \ln|x|\right) = \frac{K}{\sqrt{|x|}}.$$
Déterminons une I_1-solution particulière y_0 de (E) telle que $y_0(x) = \dfrac{C(x)}{\sqrt{-x}}$ avec C une fonction dérivable sur I_1, on a :

$$2x(1-x)\frac{C'(x)}{\sqrt{-x}} = 1 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2x(1-x)} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)}.$$

D'où, $C(x) = -\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{-x}(1-x)}$. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{-x}$ soit $x = -u^2$ et on obtient $\forall x \in]-\infty;0[,\ C(x) = \displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(-\sqrt{x})$ et donc $y_0(x) = \dfrac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$.

Déterminons une I_2 ou I_3-solution particulière de (E) telle que $y_0(x) = \dfrac{C(x)}{\sqrt{x}}$ avec C une fonction dérivable sur $I_2 \cup I_3$. On a

$$2x(1-x)\frac{C'(x)}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1-x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}.$$

D'où, $C(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1-x)}$. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x}$ soit $x = u^2$ et on obtient :

$$\forall x \in]0;1[,\ C(x) = \int \frac{du}{1-u^2} = \operatorname{argth}(\sqrt{x}) \text{ et donc } y_0(x) = \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$
$$\forall x \in]1;+\infty[,\ C(x) = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| \text{ et donc } y_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ par :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{-x}) + K_1}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-\infty;0[, \\ \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{x}) + K_2}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0;1[, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \dfrac{K_3}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]1;+\infty[, \end{cases}$$

avec K_1, K_2, K_3 des réels.

2. Au voisinage de 0, on a $\arctan(u) \sim u$ et $\operatorname{argth}(u) \sim u$. Pour que la fonction y soit prolongeable par continuité en 0, il faut que $K_1 = K_2 = 0$. Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-\infty;0[, \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0;1[. \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-\infty;1[$, elle sera une $]-\infty;1[$-solution si elle est, en plus, dérivable en 0. On utilise les développements limités des fonctions arctan et argth au voisinage de 0, on a :

$$\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \circ(u^3),\ \operatorname{argth}(u) = u + \frac{u^3}{3} + \circ(u^3),$$

soit

$$\arctan(\sqrt{-x}) = \sqrt{-x} + \frac{x\sqrt{-x}}{3} + \circ((-x)^{\frac{3}{2}}),\ \operatorname{argth}(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{3} + \circ(x^{\frac{3}{2}}).$$

Soit V un voisinage de 0, on a :

$$\forall x \in V\cap]-\infty;0[,\ f(x) = 1 + \frac{x}{3} + \circ(x),$$
$$\forall x \in V\cap]0;1[,\ f(x) = 1 + \frac{x}{3} + \circ(x),$$

donc

$$\forall x \in V,\ f(x) = 1 + \frac{x}{3} + \circ(x) \Rightarrow f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = \frac{1}{3}.$$

La fonction f est dérivable en 1 donc elle est dérivable sur $]-\infty;1[$, elle vérifie l'équation (E), c'est l'unique $]-\infty;1[$-solution de (E).

3. Supposons qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ qui soit une $\mathbb{R}$-solution de (E) alors on a :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-\infty;0[, \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0;1[, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \dfrac{K}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

avec $K \in \mathbb{R}$. Pour tout réel K, on a

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \frac{K}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

On peut alors conclure qu'il n'existe aucune $\mathbb{R}$-solution de l'équation (E).

2 Équations différentielles scalaires d'ordre n

Définition 2.1 *Une équation différentielle numérique d'ordre n définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est une équation de la forme*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{9}$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, et prenant ses valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction $y : I \mapsto \mathbb{K}$, définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle si elle est n fois dérivable, et si, pour tout t de I, le point $(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ appartient à U, et, de plus, $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$.

Théorème 2.1 *(Théorème d'unicité de Cauchy)*
Soient y_1, y_2 deux solutions de l'équation (9) définies sur l'intervalle I et $t_0 \in I$ tels que

$$y_1(t_0) = y_2(t_0),\ \ y_1'(t_0) = y_2'(t_0), \ldots,\ \ y_1^{(n-1)}(t_0) = y_2^{(n-1)}(t_0)$$

alors $y_1 = y_2$.

Théorème 2.2 *(Existence)*
Pour tout $(n+1)$uplet $(t_0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de U, il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une solution y définie sur I telle que

$$y(t_0) = a_0,\ \ y'(t_0) = a_1, \ldots,\ \ y^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}.$$

2.1 Équations linéaires d'ordre n

Définition 2.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une équation différentielle linéaire numérique d'ordre n définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une équation de la forme :*

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y + b, \tag{10}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Si $b = 0$ on dit que l'équation est une équation homogène. Les fonctions $t \mapsto a_i(t)$ sont appelés les coefficients de l'équation.

Théorème 2.3 *Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre n (10).*

1. *Pour toute condition initiale $t_0 \in I$, $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution de (10) définie sur I tout entier telle que $y(t_0) = u_0$, $y'(t_0) = u_1, \ldots,$ $y^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$.*
2. *Si $b = 0$, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n.*
3. *La solution générale de (10) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (10) la solution générale de l'équation homogène associée.*

Définition 2.3 *Un système fondamental de solutions de l'équation homogène*

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y$$

est une base de l'espace vectoriel des solutions c'est-à-dire une famille de n solutions linéairement indépendantes.

Exercice 6 Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ et prolongée par $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.

<u>Correction</u> : Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$. On montre aisément par récurrence sur n que ses dérivées sont de la forme

$$t \mapsto P_n(t)e - \frac{1}{t^2},$$

où les P_n sont des polynômes. Ainsi, pour chaque entier n, $f(n)$ admet une limite en 0 égale à 0. Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $f^{(n)}(0) = 0$. Si f était solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n,

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0,$$

elle vérifierait aussi la condition initiale $y(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$. Or, d'après le Théorème de Cauchy linéaire, cette équation n'admet qu'une seule solution pour ce problème de Cauchy. Comme 0 est solution et que f n'est pas identiquement nulle, on obtient une contradiction.

Exercice 7 Soient $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution non-nulle de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y = 0$ a ses zéros isolés.

Correction : Soit y une solution non-nulle de l'équation et soit t_0 un zéro de y. Remarquons que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation. D'après la partie unicité du théorème de Cauchy (dans sa version linéaire adaptée aux équations d'ordre p), on est sûr qu'il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $y^{(k)}(t_0) \neq 0$ (sinon y serait la fonction nulle). Soit p le plus petit des entiers k tel que $y^{(k)}(t_0) \neq 0$. Alors, d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de t_0, on a

$$y(t) \underset{t_0}{\sim} \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!}(t - t_0)^p.$$

Ainsi, la fonction ne s'annule pas dans un voisinage de t_0 ailleurs qu'en t_0.

Exercice 8 I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine, et φ une fonction paire de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. On note (E) l'équation différentielle homogène

$$y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0.$$

On note f_0 l'unique solution de (E) sur I vérifiant les conditions initiales $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$.

1. (a) Démontrer que si y est solution de (E) sur I, alors y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (b) Démontrer que si y est solution de (E) sur I, alors $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution de (E) sur I.
   (c) Démontrer que f_0 est une fonction paire et que f_1 est une fonction impaire.
   (d) Exprimer la solution générale de (E) sur I à l'aide de f_0 et de f_1. En déduire, parmi les solutions de (E), celles qui sont paires et celles qui sont impaires.
2. On suppose désormais que $I = \mathbb{R}$ et que φ est 2π-périodique.
   (a) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $x \mapsto y(x + 2\pi)$ est encore solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire qu'il existe des constantes w_{00}, w_{01}, w_{10} et w_{11} que l'on déterminera en fonction des valeurs prises par f_0, f_0', f_1 et f_1' en 2π, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait
   $$\left\{\begin{array}{lcl} f_0(x+2\pi) & = & w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x) \\ f_1(x+2\pi) & = & w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x) \end{array}\right. .$$
   (c) Soit W la matrice carrée d'ordre 2 définie par $W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}$. Montrer que, pour que (E) admette sur $\mathbb{R}$ des solutions non identiquement nulles 2π-périodiques, il faut et il suffit que W admette 1 pour valeur propre. On pourra exprimer une telle solution g en fonction de f_0 et f_1, puis utiliser la périodicité de g.

Correction :

1. (a) On démontre par récurrence sur $k \geq 2$ que y est $\mathcal{C}^k$. Pour $k = 2$, $y'' = -\varphi y$ est continue donc y est $\mathcal{C}^2$. Supposons la propriété démontrée au rang k et prouvons la au rang $k+1$. Si y est $\mathcal{C}^k$ alors $y'' = -\varphi y$ est aussi $\mathcal{C}^k$. En particulier y est $\mathcal{C}^{k+1}$.
   (b) Posons $f(x) = y(-x)$, de sorte que $f'(x) = -y'(-x)$ et $f''(x) = y''(-x)$. On a donc
   $$f''(x) + \varphi(x)f(x) = y''(-x) + \varphi(x)y(-x) = y''(-x) + \varphi(-x)y(-x) = 0$$
   et donc f est aussi solution de l'équation différentielle.
   (c) Posons $g_0(x) = f_0(-x)$, solution de l'équation différentielle sur I. Elle vérifie de plus les mêmes conditions initiales que f_0, à savoir $g_0(0) = f_0(0) = 1$ et $g_0'(0) = -f_0(0) = 0$. Ains, $f_0 = g_0$ et f_0 est paire. Pour prouver que f_1 est impaire, on pose $g_1(x) = -f_1(-x)$, et on vérifie que g_1 est solution de l'équation avec les mêmes conditions initiales que f_1.
   (d) Remarquons que (f_0, f_1) est une famille libre. En effet, si $f_1 = Cf_0$, alors $f_1' = Cf_0'$ et ceci est incompatible avec $f_1'(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$. Ainsi la famille (f_0, f_1) est une base de l'ensemble des solutions de (E). Donc la solution générale de (E) s'écrit $\lambda f_0 + \mu f_1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons y une telle solution. Pour qu'elle soit paire, il faut que $y(-x) = y(x)$. Mais
   $$y(-x) = \lambda f_0(x) - \mu f_1(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x) = y(x).$$

La famille (f_0, f_1) étant libre, on en déduit que $\mu = -\mu \Leftrightarrow \mu = 0$ et seuls les multiples de f_0 sont solutions paires de l'équation. De même, seuls les multiples de f_1 sont solutions imapires de l'équation.

2. (a) Il s'agit d'une vérification immédiate.

   (b) Puisque $f \mapsto f_0(x+2\pi)$ est solution de l'équation, on sait qu'il existe des constantes w_{00} et w_{10} telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f_0(x+2\pi) = w_{00} f_0(x) + w_{10} f_1(x).$$
   En posant $x = 0$, on trouve $w_{00} = f_0(2\pi)$. en dérivant l'équation et en posant $x = 0$, on trouve $w_{10} = f_0'(2\pi)$. On utilise le même raisonnement pour f_1.

   (c) Soit y une solution de (E), $y = \lambda f_0 + \mu f_1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$y(x+2\pi) = (\lambda w_{00} + \mu w_{01}) f_0(x) + (\lambda w_{10} + \mu w_{11}) f_1(x).$$
   Puisque (f_0, f_1) est une base de solutions de (E), y est une solution 2π-périodique si et seulement si
   $$\begin{cases} \lambda w_{00} + \mu w_{01} & = & \lambda \\ \lambda w_{10} + \mu w_{11} & = & \mu \end{cases}$$
   Autrement dit, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ est vecteur propre de W associé à la valeur propre 1. Réciproquement, si $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de W associé à la valeur propre 1, $y = \lambda f_0 + \mu f_1$ est une solution 2π-périodique de (E).

Exercice 9 Résoudre l'équation différentielle :
$$(E) : y'' + y = \tan^2(t),\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Correction : L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + y = 0$ est le plan vectoriel engendré par les fonction sinus et cosinus.

On cherche une solution particulière par la méthode de la variation des constantes. Soient λ et μ deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ telles que :

- $y = \lambda \cos + \mu \sin$ soit une solution de l'équation différentielle (E),
- $\lambda' \cos + \mu' \sin = 0$.

On a :
$$y' = \lambda' \cos - \lambda \sin + \mu' \sin + \mu \cos = -\lambda \sin + \mu \cos,$$
$$y'' = -\lambda' \sin - \lambda \cos + \mu' \cos - \mu \sin = -\lambda' \sin + \mu' \cos - y.$$

D'où
$$\begin{cases} \lambda' \cos + \mu' \sin & = & 0 \\ -\lambda' \sin + \mu' \cos & = & \tan^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' & = & -\sin . \tan^2 \\ \mu' & = & \cos . \tan^2 \end{cases}$$

Pour t élément de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a :
$$\lambda(t) = -\int_0^t \sin(x)\tan^2(x)dx,\ \mu(t) = \int_0^t \cos(x)\tan^2(x)dx,$$

d'où
$$\lambda(t) = -\int_0^t \sin(x)\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}dx = \int_0^t \sin(x)\left(1 - \frac{1}{\cos^2(x)}\right)dx = \left[-\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right]_0^t = 2 - \cos(t) - \frac{1}{\cos(t)}$$

et
$$\mu(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\cos(x)} - \cos(x)\right)dx = \left[\ln\left|\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\right| - \sin(x)\right]_0^t = \ln\left|\frac{\cos(t)}{1-\sin(t)}\right| - \sin(t).$$

Une solution particulière de l'équation différentielle (E) est la fonction φ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par :
$$\varphi(t) = -\left(\cos(t) + \frac{1}{\cos(t)}\right)\cos(t) + \left(\ln\left|\frac{\cos(t)}{1-\sin(t)}\right| - \sin(t)\right)\sin(t) = \left(\ln\left|\frac{\cos(t)}{1-\sin(t)}\right|\right)\sin(t).$$

Soient A et B deux réels, les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sont les fonctions $\Psi_{A,B}$ définies par :
$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[,\ \Psi_{A,B}(t) = A\cos(t) + \left(B + \ln\left|\frac{\cos(t)}{1-\sin(t)}\right|\right)\sin(t).$$

3 Équation linéaire homogène à coefficients constants

Quand les a_n sont des constantes, il est facile d'expliciter la solution générale d'une équation linéaire homogène.

Définition 3.1 *Si l'équation (10) est à coefficients constants, le polynôme de* $\mathbb{K}[X]$

$$X^n - a_1X^{n-1} - \ldots - a_{n-2}X^2 - a_{n-1}X - a_n$$

est appelé le polynôme caractéristique de cette équation.

Théorème 3.1

1. *Si le polynôme caractéristique de (10) est scindé dans* $\mathbb{K}[X]$*, de racines deux à deux distinctes* λ_1, λ_2,..., λ_n*, une base de l'espace vectoriel des solutions de (10) est formée des* n *fonctions :*

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}. \tag{11}$$

2. *Dans le cas où le polynome caractéristique admet des racines multiples, on obtient encore un système fondamental de solutions en remplaçant dans (11) le terme* $e^{\lambda t}$*, lorsque* λ *est une racine multiple d'ordre* r *du polynôme caractéristique, par la suite* $e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$*.*

Remarque 3.1 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est le corps des réels, et si le polynôme caractéristique P de l'équation (10) n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on procède de la manière suivante. On commence par construire un système fondamental $\mathcal{S}_c$ de solutions complexes. Soit $\lambda = a + ib$, une racine de P, non réelle, dont l'ordre de multiplicité est r. Comme P est un polynôme réel, $\overline{\lambda}$ est aussi une racine de P, de même multiplicité r. En remplaçant, pour chaque entier k, $0 \leq k \leq r$, les deux fonctions complexes conjuguées, $t^k e^{\lambda t}$, $t^k e^{\overline{\lambda} t}$ de $\mathcal{S}_c$, par la paire $\{t^k e^{at}\cos bt, t^k e^{at}\sin bt\}$, formée de leur somme et de leur différence, on obtient un système fondamental de solutions réelles.

Définition 3.2 *Une fonction polynômes-exponentielles est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par une formule de la forme :*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} e^{\mu_i t} P_i(t),$$

où chaque P_i *est un polynôme de* $\mathbb{K}[t]$*.*

Théorème 3.2 *Si les* μ_i *sont deux à deux distincts et si la fonction exponentielle polynôme* $P_k = \sum_{i=0}^{k} e^{\mu_i t} P_i(t)$ *est identiquement nulle, tous les* P_i *sont nuls.*

Les fonctions polynômes-exponentielles sont étroitement liées à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Théorème 3.3 *Soit une équation différentielle linéaire d'ordre* n*, à coefficients constants :*

$$y^n + a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} = e^{\lambda t} P(t),$$

avec $P \in \mathbb{K}[t]$*. Soit* r *l'ordre de multiplicité de* λ *comme racine du polynôme caractéristique* $A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ *(*$r = 0$ *si* λ *n'est pas racine de* A*). Alors il existe une solution polynômes-exponentielles de la forme*

$$y(t) = e^{\lambda t} t^r Q(t)$$

où Q *est un polynome de même degré que* P*.*

3.1 Équation linéaire d'ordre 2 dont on connaît une solution

La méthode suivante, qui ne porte pas de nom, est cependant très utile. Elle est spécifique au cas d'une équation différentielle numérique d'ordre 2. Ce n'est pas la méthode de variation de la constante.

Théorème 3.4 *Soit* z *solution non nulle de l'équation homogène associée à*

$$y'' = ay' + by + c. \tag{12}$$

En cherchant y *sous la forme* $y = uz$*, avec* u *nouvelle fonction inconnue, on ramène la résolution de (12) à la résolution d'une équation linéaire d'ordre 1.*

3.2 Le principe de superposition

Théorème 3.5 *Si y_1 et y_2 sont solutions de*

$$y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_0 y = b_1$$

alors, pour tous α_1, α_2, $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est solution de

$$y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_0 y = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2.$$

Ce théorème, conjugué avec le Théorème 3.3, est bien adapté à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants dont le second membre est une exponentielle-polynôme.

Exercice 10 Résoudre l'équation différentielle réelle $y' + y = t^2 + \cos t$.

Correction :
On commence par remarquer que l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ est l'espace vectoriel réel de dimension 1 formé des multiples de e^{-t}. Il reste à obtenir une solution de l'équation avec second membre.

1. Première méthode. Variation de la constante. On pose $z = e^{-t}$ et on cherche y sous la forme $y = zu$. Alors $y' + y = t^2 + \cos t$ s'écrit

$$t^2 + \cos t = z'u + zu' + zu = z'u$$

et ceci est équivalent à

$$z' = e^t(t^2 + \cos t).$$

Il faut calculer successivement une primitive de $t^2 e^t$, puis une primitive de $t \cos t$. Chacun de ces calculs utilise deux intégrations par parties.

2. Deuxième méthode. On utilise le principe de superposition et le théorème 3.3. Puisque le second membre $t^2 + \cos t$ est l'exponentielle polynôme $t^2 + \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$ on va résoudre successivement $y' + y = t^2 = t^2 e^t$, $y' + y = e^{it}$ et $y' + y = e^{-it}$. Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle est $X - 1$. 0 n'est pas racine de $X - 1$. L'équation $y' + y = t^2$ admet donc une solution de la forme $y = at^2 + bt + c$. Alors $y' = 2at + b$, et $y' + y = at^2 + (2a + b)t + b + c$. Pour que $y' + y = b$ il faut et il suffit que $a = 1$, $2a + b = 0$, c'est-à-dire $b = -2$, et enfin $b + c = 0$, c'est-à-dire $c = 2$.
Résolvons $y' + y = e^{it}$. Puisquei n'est pas racine du polynôme caractéristique $X - 1$, il existe une solution de la forme $y = \mu e^{it}$. Alors $y' + y = \mu(1 + i)e^{it}$ est égal à e^{it} si et seulement si $\mu = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. Cela donne la solution complexe $y_1 = \left(\frac{1-i}{2}\right) e^{it}$.
Puisque y_1 est solution de $y' + y = e^{it}$, le conjugué de y_1 soit $y_2 = \left(\frac{1+i}{2}\right) e^{-it}$ est solution de l'équation conjuguée $y' + y = e^{-it}$. Par le principe de superposition

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1-i}{2}e^{it} + \frac{1+i}{2}e^{-it} = \cos t + \sin t$$

est solution de $y' + y = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$. Finalement une solution de $y' + y = t^2 + \cos t$ est $y = t^2 - 2t + 2 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

3.3 Équation linéaire à coefficients constants à valeurs dans un espace normé

Il n'existe pas de méthode générale ramenant la résolution d'une équation différentielle lineaire homogène à valeur dans un espace normé (de dimension $n > 1$) à des calculs de primitives. Cependant, lorsque l'endomorphisme A ne dépend pas de t, les solutions de $X' = AX$ s'explicitent au moyen de la notion d'exponentielle d'endomorphisme.

Définition 3.3 *Soit A un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie E. L'exponentielle de A est l'endomorphisme $exp(A)$ défini par*

$$exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{13}$$

Théorème 3.6 *Soit A un endomorphisme de E. La fonction $R : \mathbb{R} \mapsto End(E)$ définie par $R(t) = exp(tA)$ est dérivable, et*

$$R'(t) = AR(t). \tag{14}$$

Théorème 3.7 *Soit E un espace normé de dimension finie, et $A \in End(E)$. L'unique solution de l'équation différentielle*

$$X'(t) = AX(t)$$

qui prend la valeur X_0 en $t = 0$ est l'application X définie par

$$X(t) = exp(tA)(X_0).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit $y' = f(t, y)$ une équation différentielle avec $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(t, 0) = 0$. La solution nulle est dite *stable* s'il existe $\eta > 0$ et $C > 0$ tels que, si y est une solution de l'équation avec $y(0) = \eta$, alors

1. y est définie sur $[t_0; +\infty[$;
2. pour tout $t \geq t_0$, $\|y(t)\| \leq C\|y(0)\|$.

Enfin, elle est dite *asymptotiquement stable* s'il existe $\eta > 0$ et $C > 0$ tels que, si y est une solution de l'équation avec $y(0) = \eta$, alors

1. y est définie sur $[t_0; +\infty[$;
2. pour tout $t \geq t_0$, $\|y(t)\| \leq C\|y_0\|$;
3. $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la solution nulle de $y' = Ay$ est

- stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle négative ou nulle, et que les valeurs propres de partie réelle nulle sont des racines de multiplicité 1 dans le polynôme minimal de A,
- asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

<u>*Correction*</u> : Remarquons que la stabilité (resp. la stabilité asymptotique) ne dépend pas du fait de travailler avec des solutions réelles ou complexes. On peut donc supposer que la matrice A est donnée sous sa forme réduite de Jordan. La solution générale vérifie alors $X(t) = e^{tA}X(0)$. Écrivons

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_p \end{pmatrix}, \ e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{tJ_p} \end{pmatrix} \text{ et } X(0) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$$

où les J_i sont les blocs de Jordan de A. Il vient

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{tJ_1}X_1 \\ e^{tJ_2}X_2 \\ \vdots \\ e^{tJ_p}X_p \end{pmatrix}.$$

On voit donc qu'il s'agit de prouver à quelle condition sur un bloc de Jordan J de taille d, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$\|E^{tJ}X\| < \eta \text{ dès que } \|X\| < \eta \text{ et } \|e^{tJ}X\| \to 0 \text{ dès que } \|X\| < \eta.$$

On écrit

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On calcule l'exponentielle de J en la décomposant sous la forme $\lambda Id + N$, où la matrice N est nilpotente d'indice d ($N^k = 0$ pour $k \geq d$. Puisque λId et N commutent, on a

$$e^{tJ} = e^{\lambda t}\left(Id + tN + \frac{1}{2!}t^2N^2 + \ldots + \frac{1}{(d-1)!}t^{d-1}N^{d-1}\right)$$

ce qui donne

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{d-1}/(d-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{d-2}/(d-2)! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors les résultats suivants :

- Si $Re(\lambda) < 0$, alors l'exponentielle l'emporte sur le polynôme, et $e^{tJ}X$ tend vers 0 quel que soit X quand t tend vers $+\infty$; on a même k$\|e^{tJ}\| \leq M$ pour une certaine constante M et donc la solution nulle est asymptotiquement stable.
- Si $Re(\lambda) > 0$, alors l'exponentielle l'emporte sur le polynôme, et pour $X = (0, \dots, 0, \eta)$, $e^{tA}X$ tend vers $+\infty$, indṕendamment de la valeur de $\eta > 0$. La solution nulle n'est pas stable.
- Si $Re(\lambda) = 0$, alors on distingue deux cas :
  - Le bloc de Jordan est de taille 1. Dans ce cas, on a $e^{tJ}X = e^{\lambda t}x$ où $X = (x)$. La solution nulle est stable (car $|e^{\lambda t}| = 1$, on choisit $\eta = \epsilon$), mais n'est pas asymptotiquement stable.
  - Le bloc de Jordan est de taille $d > 1$. Alors, pour $X = (0, \dots, 0, \eta)$, $e^{tJ}X = (\eta e^{\lambda t} t^{d-1}/(d-1)!, \dots)$ tend vers 1, quel que soit $\eta > 0$. La solution nulle n'est pas stable.

Pour conclure, il suffit de remarquer que tous les blocs de Jordan associés à la valeur propre λ sont de taille 1×1 si et seulement si λ est de multiplicité 1 comme racine du polynôme minimal de A.

3.4 Résolution des équations différentielles par des développements en série entière

Il s'agit de chercher si l'équation admet une - ou plusieurs - solutions développables en série entière au voisinage de l'origine. Cette idée peut s'appliquer à des équations linéaires homogènes ou non. Le principe est le suivant. On commence par chercher ce que doit nécessairement valoir une série entière solution du problème, en insérant le développement dans l'équation, en dérivant terme à terme et en essayant de calculer les coefficients. Il se peut que le problème n'ait pas de solution intéressante (si l'équation est homogène, il y a toujours la série entière 0 pour laquelle tous les coefficients sont nuls). S'il en a, on dispose maintenant d'une série entière "candidat-solution". Il reste à prouver qu'elle est effectivement solution. Pour cela, il faut justifier que les calculs faits (c'est-à-dire la dérivation terme à terme) étaient justifiés. Pour prouver ceci, il faut montrer que le rayon de convergence R de la série obtenue est strictement positif. La somme de la série entière sera alors solution du problème sur l'intervalle $]-R; R[$.

Exercice 12 On considére l'équation différentielle

$$2(1+x)y' - 3y = 0.$$

Cette équation différentielle admet-elle, au voisinage de 0, une solution développable en série entière ?

Correction :
Soit $x \mapsto f(x)$ une telle solution et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

son développement en série entière. Admettons pour l'instant que le rayon de convergence R de la série entière est strictement positif, de sorte que, sur l'intervalle $]-R; R[$, il est licite de dériver terme à terme. On obtient

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ et } x f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

de sorte que l'équation différentielle se traduit par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2(n+1)a_{n+1} + (2n-3)a_n) x^n = 0.$$

Cette relation permet de calculer par récurrence les a_n en fonction de a_0 :

$$a_n = (-1)^n \frac{(2n-5)(2n-7) \times \dots \times 1 \times (-1) \times (-3)}{(2n) \times (2n-2) \dots \times 2} a_0 = (-1)^n \frac{3(2n-4)!}{4^{n-2}(2n)(2n-2)[(n-2)!]^2} a_0.$$

Réciproquement, choisissons a_0 arbitrairement et définissons les nombres a_n par la formule ci-dessus. La relation de récurrence vérifiée par les a_n montre que le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend en valeur absolue vers 1, de sorte que le rayon de convergence de la série ainsi déterminée vaut 1, en application de la règle de d'Alembert. Par conséquent, sur l'intervalle $]-1;1[$, la fonction f, somme de la série entière ainsi déterminée, est solution de l'équation différentielle, puisque sur cet intervalle, la dérivation terme à terme de la série donne bien la dérivée de la somme.

Exercice 13 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

1. Déterminer une solution notée f de l'équation différntielle (E) développable en série entière. Préciser son rayon de convergence R et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
2. Déterminer le réel α tel que la fonction y définie par $y(x) = -x^\alpha$ soit une solution de (E), résoudre l'équation (E).

Correction : Remarquons tout d'avord que le point 0 est un point singulier de l'équation (E).

1. Recherche d'une solution développable en série entière. On suppose qu'il existe un réel R strictement positif et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in]-R;R[,\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

et la fonction y est solution de l'équation (E). La fonction y est solution de l'équation (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+3n+2)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n = 1 \\ \Leftrightarrow 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left((n^2+3n+2)a_n - a_{n-2}\right)x^n = 1.\end{aligned}$$

De l'unicité des coefficients d'une série entière, on déduit :

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0,\ a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$ et on a :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}.$$

On obtient :

$$x^2y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 = \mathrm{ch}(x) - 1$$

soit :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Il est immédiat que la fonction y définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $y(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^\star$ ou sur $\mathbb{R}_+^\star$. Déterminons la fonction z telle que $z(x) = -x^2y(x)$, on a :

$$z'(x) = -2xy(x) - x^2y'(x),\ z''(x) = -2y(x) - 4xy'(x) - x^2y''(x).$$

La fonction y est solution de (E) si et seulement si :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = x^2y + 1 \Leftrightarrow -z''(x) = -z(x) + 1.$$

On résout l'équation $z'' - z = -1$, les solutions sont les fonctions z définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$z(x) = a\mathrm{ch}(x) + b\mathrm{sh}(x) + 1,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$y(x) = \begin{cases} a_1\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{x^2} + b_1\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ a_2\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{x^2} + b_2\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Peut-on déterminer une $\mathbb{R}$-solution ?
Pour que y soit définie en 0, il faut que $b_1 = b_2 = 0$ et $a_1 = a_2 = 0$, on obtient :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On déduit de la question précédente que la fonction y est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc la fonction y est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation (E), c'est l'unique $\mathbb{R}$-solution de l'équation (E).

Références

[1] Ariel DUFETEL. *Séries de Fourier et équations différentielles.*
Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours - Préparation au CAPES.

[2] Frédéric TESTARD. *Équations différentielles.*
http ://testard.frederic.pagesperso-orange.fr/mathematiques/agregation/interne/cours8.pdf

[3] Exercices BIBMATH. *Équations différentielles linéaires - Théorie et études qualitatives.*
http ://www.bibmath.net/exercices/bde/analyse/equadiff/eqlineairetheorieeno.pdf