

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 3 - Dérivées, Développement limités.

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des applications dont l'ensemble de départ est une partie de \mathbb{R} , et dont l'ensemble d'arrivée est un espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n.) E sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (fonctions vectorielles d'une variable numérique). Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, la donnée d'une telle application f équivaut à la donnée de n fonctions numériques f_i (les composantes de f).

Définition 0.1 Soit $f : X \rightarrow E$ une application d'une partie X de \mathbb{R} dans un e.v.n. E et soit $t_0 \in \overline{X}$ (resp. $t_0 \in X$). On dit que $f(t)$ tend vers le point x_0 de E lorsque t tend vers t_0 (resp. on dit que f continue au point t_0) si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que les relations $t \in X$ et $|t - t_0| < \eta$ entraînent $\|f(t) - x_0\| < \varepsilon$ (resp. $\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$).

1 Notions de dérivées - Fonctions dérivables.

Définition 1.1 Soit I un voisinage du point t_0 dans \mathbb{R} et f une application de I dans un e.v.n. E . On dit que f est dérivable au point t_0 si l'application

$$I \setminus \{t_0\} \rightarrow E, t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

a une limite au point t_0 . Cette limite est appelée dérivée de f au point t_0 , et notée $f'(t_0)$ ou $(df/dt)(t_0)$, ou $(df/dt)_{t_0}$. C'est un élément de E . Si f est dérivable en chaque point d'un ouvert I de \mathbb{R} , on dit que f est dérivable sur I , et l'application $I \rightarrow E, t \mapsto f'(t)$ est appelée fonction dérivée, ou simplement dérivée de f .

Définition 1.2 (Généralisation)

Soit f une fonction à valeurs dans un e.v.n. E , dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[t_0, t_1]$, avec $t_1 > t_0$ (resp. un intervalle $[t_1, t_0]$ avec $t_1 < t_0$). La dérivée à droite (resp. à gauche) de f en t_0 , notée $f'_d(t_0)$ (resp. $f'_g(t_0)$) est la limite (si elle existe) du rapport

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

lorsque t tend vers t_0 par valeurs supérieures (resp. inférieures).

Ces définitions s'appliquent en particulier au cas où f est une fonction numérique (cas où $E = \mathbb{R}$, avec la norme définie par $x \mapsto |x|$).

Remarque 1.1 Pour que f soit dérivable au point t_0 , il faut et il suffit que $f'_d(t_0)$ et $f'_g(t_0)$ existent à la fois, et que $f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$.

Théorème 1.1 Si l'application f admet une dérivée au point t_0 , alors f est continue en ce point.

Définition 1.3 On dit que la fonction f est de classe C^p sur l'intervalle I si la dérivée $f^{(p)}(t)$ existe en tout point de I et si l'application $t \mapsto f^{(p)}(t)$ est continue sur I .

Si f est de classe C^p alors f est de classe C^k pour $0 \leq k \leq p$.

Par extension, on dit que f est de classe C^∞ si f admet des dérivées de tous les ordres (ces dérivées étant alors automatiquement continues).

Définition 1.4 Soit f une fonction définie sur un voisinage du point t_0 dans \mathbb{R} , à valeurs dans le produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ des e.v.n. E_1, \dots, E_n et soient f_1, f_2, \dots, f_n ses composantes. Pour que f soit dérivable au point t_0 (resp. pour que f soit de classe C^p sur un intervalle) il faut et il suffit que chacune de ses composantes le soient.

L'étude des fonctions dérivables à valeurs dans \mathbb{R}^n se ramène donc à l'étude de fonctions numériques dérivables.

Exercice 1 Le Théorème de Darboux.

Théorème 1.2 Soit F une fonction réelle définie et dérivable sur l'intervalle I . On pose $f = F'$. Soit $a < b$ dans I tel que $f(a) < f(b)$, $\mu \in]f(a); f(b)[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $\mu = f(c)$.

Pour $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I , la fonction dérivée $F' = f$ a la propriété des valeurs intermédiaires. Ceci montre (au passage) que la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas l'apanage des fonctions continues.

1. $[\cdot]$ désigne la partie entière. Trouver les fonctions réelles F définies et dérivables sur \mathbb{R} vérifiant $F' = [F]$.
2. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur \mathbb{R} , sans zéros et vérifiant $|F''| = F$. Déterminer F .

Correction :

1. Si F convient, $F' = [F] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui a la propriété des valeurs intermédiaires et qui est à valeurs dans \mathbb{Z} , est constante. Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $F(x) = Ax + B$ sur \mathbb{R} . On a $A = 0$ (sinon $[F](0) = [B]$ diffère de $[F](\frac{1}{A}) = [B] + 1$ et F' n'est pas constante sur \mathbb{R}). Il reste $F = B$, donc $F' = 0$, d'où $[F] = [B] = 0$, ce qui impose $B \in [0, 1[$. La réciproque est claire.
2. F'' ne s'annule pas sur \mathbb{R} donc d'après le théorème de Darboux, $F'' = (F')'$ est de signe constant sur \mathbb{R} . On a $F'' > 0$ (sinon $F'' < 0$ et $F'' + F = 0$, ce qui donne une solution oscillante F qui s'annule). F vérifie donc $F'' - F = 0$, $F(x) = A \cosh x + B \sinh x = \frac{\exp(x)}{2}[A + B] + \frac{\exp(-x)}{2}[A - B]$. F est par ailleurs à valeurs strictement positives donc $A = F(0) > 0$, $A + B > 0$ (sinon $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$), et $A - B \geq 0$ (sinon $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$). Bilan : $F(x) = A \cosh x + B \sinh x$ avec $A > 0$ et $|B| \leq A$.

Exercice 2 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f_1(0) = 0$.
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f_2(0) = 0$.
3. $f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$ si $x \neq 1$, $f_3(1) = 1$.

Correction :

1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x = 0$. Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}.$$

Mais $x \cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \rightarrow 0$) car $|\cos 1/x| \leq 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Par conséquent, f_1 est dérivable en 0 et $f'_1(0) = 0$.

2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$ est :

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et que $\sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

3. La fonction f_3 s'écrit :

$$f_3(x) = \frac{|x||x - 1|}{x - 1}.$$

- Donc pour $x \geq 1$ on a $f_3(x) = x$, pour $0 \leq x < 1$ on $f_3(x) = -x$. Pour $x < 0$ on a $f_3(x) = x$.
- La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}/\{0, 1\}$.
- La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
- La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x < 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et f_3 n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur \mathbb{R}^{*+} .

Correction : Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc $a + b + 1 = 1$. Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche

soient égales : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + b = 2a + b$. Donc $2a + b = \frac{1}{2}$. Le seul couple (a, b) solution des deux équations est $\left(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} mais que f' n'est pas continue en 0.

Correction :

1. Comme $|\sin 1/x| \leq 1$, $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc en posant $f(0) = 0$, la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
2. Le taux d'accroissement est $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$. Comme ci-dessus, il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Sur \mathbb{R}^* , $f'(x) = 2x \sin \left(\frac{1}{x}\right) - \cos \left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc f' n'est pas continue en 0.

2 L'algèbre des fonctions dérivables

Proposition 2.1 *Dérivée d'une combinaison linéaire.*

Soient f et g deux applications de l'intervalle I dans le même e.v.n. sur K dérivables en un point t_0 de I . Alors, quels que soient les scalaires $\alpha, \beta \in K$, la fonction $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable au point t_0 et on a

$$h'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0).$$

On notera que l'ensemble des applications de I dans E , qui sont dérivables au point t_0 , constituent un K -espace vectoriel \mathcal{D} , et que l'application $t \mapsto f'(t_0)$ de \mathcal{D} dans E est linéaire.

Proposition 2.2 *Dérivée d'un produit.*

Soient f_1, f_2, \dots, f_n des fonctions numériques ou complexes définies sur l'intervalle I dans l'espace E_i , dérivables au point t_0 . Alors l'application h de I dans E , définie par $h(t) = p[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]$ est dérivable en t_0 et on a :

$$h'(t_0) = \sum_{k=1}^n f_1(t_0) \dots f'_k(t_0) \dots f_n(t_0).$$

Plus généralement, soient E_1, E_2, \dots, E_n et E des e.v.n. sur le corps K et soit

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

une application multilinéaire continue de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans E , définissant un produit.

Théorème 2.1 *Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$ soit f_i une application de l'intervalle I dans l'espace E_i , définie par $h(t) = p[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]$, dérivable en t_0 . On a alors*

$$h'(t_0) = \sum_{k=1}^n p[f_1(t_0) \dots f'_k(t_0) \dots f_n(t_0)].$$

La fonction h est souvent appelée le produit des fonctions f_1, f_2, \dots, f_n et on peut alors énoncer le précédent théorème de la manière suivante : « La dérivée d'un produit est la somme des n produits obtenus en remplaçant successivement chaque facteur par sa dérivée, sans modifier l'ordre des facteurs. »

Corollaire 2.1

1. Si f, g sont deux applications dérivables sur l'intervalle I , à valeurs dans l'espace euclidien E_n , alors le produit scalaire $f(t).g(t)$ est une fonction numérique dérivable et on a :

$$\frac{d}{dt}[f(t).g(t)] = f'(t).g(t) + f(t).g'(t).$$

2. Si f et g sont deux applications dérivables de I dans E_3 , alors le produit vectoriel $f(t) \wedge g(t)$ est une fonction dérivable de I dans E_3 , et on a :

$$\frac{d}{dt}[f(t) \wedge g(t)] = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

3. Soient $t \mapsto a_{ij}(t)$, n^2 fonctions numériques ou complexes dérivables sur l'intervalle I . Alors le déterminant $D(t) = \det[a_{ij}(t)]$ est une fonction dérivable, et sa dérivée est la somme des n déterminants obtenus en dérivant successivement les éléments de chaque ligne (ou de chaque colonne).

Proposition 2.3 Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un voisinage du point t_0 et admettant en ce point des dérivées jusqu'à l'ordre n (inclus). Alors la dérivée d'ordre n au point t_0 vérifie la formule dite de Leibniz :

$$\frac{d^n}{dt^n}(fg)_{t_0} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t_0) g^{(n-k)}(t_0).$$

Théorème 2.2 Soit g une fonction numérique définie sur un voisinage I du point t_0 dans \mathbb{R} dérivable au point t_0 . Soit f une fonction (numérique ou vectorielle) définie sur un voisinage du point $x_0 = g(t_0)$ contenant $g(I)$. Alors, si f est dérivable au point $x_0 = g(t_0)$, $h = f \circ g$ est dérivable au point t_0 et on a :

$$h'(t_0) = g'(t_0) f'(x_0).$$

Proposition 2.4 Soit g une fonction numérique définie sur un voisinage du point t_0 dans \mathbb{R} telle que $g'(t_0)$ existe et $g(t_0) \neq 0$. Alors la fonction $h = 1/g : t \mapsto 1/g(t)$, qui est définie sur un voisinage de t_0 , admet une dérivée au point t_0 et on a :

$$h'(t_0) = -\frac{g'(t_0)}{g^2(t_0)}.$$

Proposition 2.5 Soit f une application bijective et continue d'un intervalle I sur un intervalle J de \mathbb{R} , dérivable en un point t_0 de I et telle que $f'(t_0) \neq 0$. Alors sa réciproque $h = f^{-1}$ est dérivable au point $x_0 = f(t_0)$ et on a

$$h'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)}.$$

Proposition 2.6 Si f et g sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^p alors leur somme $f + g$, leur produit fg , leur quotient f/g et leur composée $f \circ g$ sont de classe \mathcal{C}^p sur leur ensemble de définition. Il en est de même de la réciproque f^{-1} de f si f est bijective et si sa dérivée ne s'annule pas.

Exercice 5 Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^n(1 - x^n)$.

Calculer $f^{(n)}(x)$ par deux méthodes, et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Correction : Pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$ on peut écrire : $\frac{d^k}{dx}(x^n) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.

D'une part on a $f(x) = x^n - x^{2n}$ donc $f^{(n)}(x) = n! - \frac{(2n)!}{n!} x^n$ et d'autre part, en dérivant $f(x)$ comme un produit, on a d'après la formule de Leibniz (on sépare le terme d'indice n) :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{n} \frac{d^n}{dx^n}(x^n) \times (1 - x^n) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^n) \times \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1 - x^n) \\ &= n!(1 - x^n) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \times \frac{n!}{k!} x^k \\ &= n!(1 - x^n) - n!x^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 = n! - n!x^n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 + 1 \right] \\ &= n! - n!x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2. \end{aligned}$$

En identifiant les deux valeurs trouvées pour $f^{(n)}(1)$ (par exemple), il vient : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Exercice 6 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x ; g(x) = \sin^2 x ; h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Correction :

1. Selon que $n \equiv 0[4], 1[4], 2[4], 3[4]$, $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.
2. La dérivée de $\sin^2 x$ est $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2 \cos 2x$, $-4 \sin 2x$, $-8 \cos 2x$, $16 \sin 2x, \dots$ Finalement, selon que $n \equiv 1[4], 2[4], 3[4], 0[4]$, $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1} \sin 2x$, $2^{n-1} \cos 2x$, $-2^{n-1} \sin 2x$, $-2^{n-1} \cos 2x$.
3. $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = \frac{-1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$ et on dérive. Selon que $n \equiv 1[4], 2[4], 3[4], 4[4]$, $h^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\frac{1}{4}(-(3)^n \cos(3x) + 3 \cos(x) - (3)^n \sin(3x) - 3 \sin(x))$, $\frac{1}{4}((3)^n \sin(3x) - 3 \sin(x) - (3)^n \cos(3x) - 3 \cos(x))$, $\frac{1}{4}((3)^n \cos(3x) - 3 \cos(x) + (3)^n \sin(3x) + 3 \sin(x))$ et $\frac{1}{4}(-(3)^n \sin(3x) + 3 \sin(x) + (3)^n \cos(3x) + 3 \cos(x))$.

3 Application à l'étude des fonctions élémentaires

- La fonction numérique appelée logarithme népérien $t \mapsto \log(x)$ définie pour $x > 0$ satisfait à

$$\frac{d}{dx}(\log(x)) = \frac{1}{x} \text{ et } \log(1) = 0.$$

et établit une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} . Elle admet donc une réciproque notée $x \mapsto \exp(x)$.

- La fonction numérique appelée exponentielle $t \mapsto \exp(t)$ définie et dérivable sur \mathbb{R} et satisfait à

$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x).$$

- La fonction numérique à valeurs dans \mathbb{C} $x \mapsto \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie

$$\frac{d}{dx}(\exp(ix)) = i \exp(ix).$$

- La restriction de $x \mapsto \sin(x)$ à l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$ est une bijection continue de cet intervalle sur $[-1, 1]$ et sa dérivée $\cos(x)$ ne s'annule qu'aux points $-\pi/2$ et $+\pi/2$, d'images respectives -1 et $+1$. Cette fonction admet une réciproque, notée $\arcsin(x)$ (le nombre $y = \arcsin(x)$ étant défini par les deux conditions $\sin(y) = x$, $-\pi/2 \leq y \leq +\pi/2$). La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1, +1]$ et dérivable sur $] -1, +1[$, sa dérivée étant

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- On définit de même la fonction $\arccos(x)$ sur $[-1, +1]$ par les conditions

$$\cos(\arccos(x)) = x, \quad 0 \leq \arccos(x) \leq \pi,$$

qui entraînent $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$ et on a

$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d}{dx}(\arcsin(x)).$$

- La restriction de $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $] -\pi/2, +\pi/2[$ est une bijection continue de cet intervalle sur \mathbb{R} et sa dérivée $1 + \tan^2(x)$ ne s'annule pas. Cette fonction admet donc une réciproque notée $\arctan(x)$, dérivable sur \mathbb{R} , le nombre $y = \arctan(x)$ étant défini par les conditions $\tan(y) = x$, $-\pi/2 < y < +\pi/2$, et vérifiant

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, la fonction composée $x \mapsto \exp(a \log(x))$ est définie pour $x > 0$. On la note $x \mapsto x^a$ (car, pour $a \in \mathbb{Z}$, elle coïncide avec la puissance d'ordre a de x). Cette fonction est dérivable avec

$$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{a}{x} \exp(a \log(x)) = ax^{a-1}.$$

Par récurrence, on en déduit qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ et vérifie

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^a) = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$. Les fonctions ainsi définies sont évidemment dérivables, de classe \mathcal{C}^∞ et vérifient les relations

$$(\operatorname{ch}(x))' = \operatorname{sh}(x) \text{ et } (\operatorname{sh}(x))' = \operatorname{ch}(x).$$

On peut associer aux fonctions $x \mapsto \text{ch}(x)$ et $x \mapsto \text{sh}(x)$, appelées respectivement cosinus et sinus hyperboliques, les fonctions $x \mapsto \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ (tangente hyperbolique de x) et $x \mapsto \text{coth}(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)}$ (cotangente hyperbolique de x , définie pour $x \neq 0$) dont les dérivées sont

$$\frac{d}{dx}(\text{th}(x)) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \text{ et } \frac{d}{dx}(\text{coth}(x)) = -\frac{1}{\text{sh}^2(x)}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{d}{dx}(\text{sh}(x)) = \text{ch}(x) > 0$ donc $x \mapsto \text{sh}(x)$ est une fonction continue strictement croissante. C'est un homéomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , dont la dérivée ne s'annule pas. Cette fonction admet donc une réciproque notée $\text{Arg sh}(x)$ définie et dérivable sur \mathbb{R} dont la dérivée est :

$$\frac{d}{dx}(\text{Arg sh}(x)) = \frac{1}{\text{ch}(\text{Arg sh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

De même, la restriction à \mathbb{R} de $x \mapsto \text{ch}(x)$ est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}^+ sur la demi-droite $x \geq 1$ dont la dérivée est positive pour $x > 1$. Elle admet donc une réciproque positive, notée $\text{Arg ch}(x)$ définie sur la demi-droite $x \geq 1$ et dérivable pour $x > 1$ de dérivée

$$\frac{d}{dx}(\text{Arg ch}(x)) = \frac{1}{\text{sh}(\text{Arg ch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$

- La fonction $\text{th}(x)$ croît de -1 à $+1$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas. La fonction $x \mapsto \text{th}(x)$ admet donc une réciproque, notée $\text{Arg th}(x)$ définie et dérivable sur l'intervalle $] -1, +1[$ dont la dérivée est

$$\frac{d}{dx}(\text{Arg th}(x)) = \text{ch}^2(\text{Arg th}(x)) = \text{ch}^2(\text{Arg th}(x)) = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

4 Théorème de Rolle - Applications

Théorème 4.1 Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et admettant, en un point t_0 intérieur à I , un extrémum relatif (maximum ou minimum). Si la dérivée $f'(t_0)$ existe, on a $f'(t_0) = 0$.

Théorème 4.2 Théorème de Rolle

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 4.3 Formule des accroissements finis

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que l'on ait

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Les deux théorèmes précédents traduisent le fait géométrique suivant :

Proposition 4.1 Si f est une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (appelée « corde ») joignant les points $A = [a, f(a)]$ et $B = [b, f(b)]$.

Théorème 4.4 Règle de l'Hôpital

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur un voisinage I du point t_0 dans \mathbb{R} et dérivables sur $I \setminus \{t_0\}$, satisfaisant à $f(t_0) = g(t_0) = 0$ et à $g(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$ pour $t \neq t_0$. Pour que le rapport $f(t)/g(t)$ tende vers le nombre L lorsque t tend vers t_0 , il suffit que le rapport $f'(t)/g'(t)$ tende vers L au point t_0 .

Proposition 4.2 Application à la variation des fonctions numériques

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle quelconque I de \mathbb{R} et dérivable en tout point intérieur à I . Pour que f soit croissante (resp. décroissante) au sens large sur I , il faut et il suffit que sa dérivée soit partout ≥ 0 (resp. ≤ 0). Pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit partout nulle.

Proposition 4.3 Pour qu'une fonction numérique dérivable sur un intervalle de \mathbb{R} soit strictement croissante il suffit que sa dérivée soit strictement positive.

Théorème 4.5 Soit f une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage du point t_0 dans \mathbb{R} vérifiant $f'(t_0) \neq 0$. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant t_0 , tel que la restriction de f à J soit strictement monotone et admette une réciproque de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 7 Démontrer le Théorème de Rolle généralisé : « Soit F une fonction continue sur $]a; +\infty[$, dérivable sur $]a; +\infty[$ telle que $F(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Alors il existe $c \in]a; +\infty[$ tel que $F'(c) = 0$ ».

Correction : On raisonne par l'absurde, le théorème de Darboux assure alors que F' garde un signe constant (par exemple strictement positif) sur $]a; +\infty[$. L'application F y est donc strictement croissante, et puisque

$$\forall x > a + 1, F(x) > F(a + 1) > F(a),$$

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq F(a + 1) > F(a)$. Contradiction.

Exercice 8 Démontrer le résultat suivant : « Soit (F_n) une suite de fonctions dérivables de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . On suppose que

- il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que la suite $(F_n(x_0))$ converge,
- la suite de fonctions (F'_n) converge uniformément vers une fonction g .

Alors (F_n) converge uniformément sur $[0; 1]$ vers une fonction dérivable F qui vérifie $F' = g$ ».

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p, q > N, |F_p(x_0) - F_q(x_0)| \leq \varepsilon$ et $\forall x \in [0; 1], |F'_p(x) - F'_q(x)| = |(F_p(x) - F_q(x))'| \leq \varepsilon$. Dans les mêmes circonstances, par l'inégalité des accroissements finis :

$$|(F_p - F_q)(x) - (F_p - F_q)(x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0| \leq \varepsilon,$$

et à fortiori :

$$|(F_p - F_q)(x)| \leq \varepsilon + |(F_p - F_q)(x_0)| \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit que la suite (F_n) est uniformément de Cauchy sur $[0; 1]$, à but réel (complet), donc (F_n) converge uniformément vers une fonction notée F . Soit $a \in [0; 1]$.

On veut montrer ensuite que F est dérivable en a . On va donc évaluer : $\Delta(x, a) = \left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - g(a) \right|$ pour $x \neq a$. L'idée est d'écrire :

$$\Delta(x, a) = \left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - \frac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a} \right| + \left| \frac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a} - F'_N(a) \right| + |F'_N(a) - g(a)|$$

avec N judicieusement choisi dans \mathbb{N}^* . Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\|F'_N - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}; \forall p \geq N, \|F'_p - F'_N\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme plus haut (avec l'inégalité des accroissements finis), pour $p \geq N$ et $x \in [0; 1]$, on a : $|(F_p - F_N)(x) - (F_p - F_N)(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, ce qui donne en faisant tendre à bon droit p vers $+\infty$:

$$\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - \frac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

De là : $\Delta(x, a) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \frac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a} - F'_N(a) \right|$. On choisit alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0; 1] \cap]a - \delta; a + \delta[$, le dernier terme soit majoré par $\frac{\varepsilon}{3}$. On en déduit que F est dérivable en a avec $F'(a) = g(a)$.

Exercice 9 Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = [(1 - t^2)^n]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1; 1]$.

Correction : $Q_n(t) = (1 - t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n . -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n , donc $Q_n(1) = Q'_n(1) = \dots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$, même chose en -1 . $Q_n(-1) = 0 = Q_n(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $Q'_n(c) = 0$. Ainsi $Q'_n(-1) = 0$, $Q'_n(c) = 0$, $Q'_n(+1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1, c]$ et sur $[c, +1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q''_n , auxquelles il faut rajouter -1 et $+1$. On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n + 1$ racines : $-1, e_1, \dots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Par construction ces racines sont réelles distinctes (donc simples). Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines.

Exercice 10 Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a; b[$ s'annulant en $n + 1$ points de $]a; b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a; b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Correction :

Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annule $n + 1$ fois, f' change de signe (au moins) $n + 1$ fois donc s'annule (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Exercice 11 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$

De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0; 1[$

$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

3. Donner une interprétation géométrique du résultat précédent.

Correction :

1. Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$. Il existe par conséquent $c \in]x, y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y - x) \Leftrightarrow \ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x)$ donc $\frac{y - x}{\ln y - \ln x} = c$. Comme $x < c < y$, on a les inégalités recherchées.

2. $f'(\alpha) = \frac{x - y}{\alpha x + (1 - \alpha)y} - \ln x + \ln y$ et $f''(\alpha) = -\frac{(x - y)^2}{(\alpha x + (1 - \alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0, 1]$. Or $f'(0) = \frac{x - y - y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ et $f'(1) < 0$ d'après la première question. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [x, y]$ tel que $f'(c) = 0$. Maintenant f' est positive sur $[0, c]$ et négative sur $[c, 1]$. Donc f est croissante sur $[0, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) > 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.

3. Géométriquement nous avons prouvé que la fonction \ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$) est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

5 Formule générale des accroissements finis

De façon générale, si f est une application continue de $[a, b]$ dans un e.v.n. E (par exemple \mathbb{R}^n), dérivable sur $]a, b[$, il n'existe pas nécessairement de point c de $]a, b[$ tel que l'on ait l'égalité vectorielle $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ et le cas où un tel point c existe doit être considéré comme exceptionnel. Il est cependant très important pour les applications de pouvoir donner une majoration précise et simple de $\|f(b) - f(a)\|$ connaissant une majoration de $\|f'(t)\|$ sur $]a, b[$.

Proposition 5.1 Soit f une application continue de l'intervalle fermé $[a, b]$ dans un espace vectoriel normé E et soit g une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose qu'en chaque point de $]a, b[$, f et g possèdent des dérivées à droite vérifiant l'inégalité $\|f'_d(t)\| \leq g'_d(t)$ quel que soit $t \in [a, b]$. Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

En prenant $f(t) = 0$ quel que soit t , on obtient le

Théorème 5.1 Si g est une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et pourvue en chaque point de $]a, b[$ d'une dérivée à droite positive ou nulle alors g est croissante.

En prenant $g(t) = kt$ (k constante positive), on obtient le résultat fondamental suivant

Théorème 5.2 Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans un espace vectoriel normé E admettant en chaque point de $]a, b[$ une dérivée à droite vérifiant l'inégalité $\|f'_d(t)\| \leq k$. Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k(b - a).$$

Corollaire 5.1 Soit f une fonction (numérique ou vectorielle) continue sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée à droite partout nulle. Alors f est constante sur $[a, b]$.

Proposition 5.2 Prolongement d'une fonction dérivable

Soit I un voisinage du point t_0 dans \mathbb{R} et f une fonction (numérique ou vectorielle) définie sur $I \setminus \{t_0\}$ admettant en tout point de $I \setminus \{t_0\}$ une dérivée à droite. On suppose que

$$y_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \text{ et } z_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} f'_d(t) \text{ existent}$$

et on désigne par \bar{f} le prolongement de f à I obtenu en posant $\bar{f}(t_0) = y_0$. Alors \bar{f} est dérivable au point t_0 et on a $\bar{f}'(t_0) = z_0$.

6 Fonctions convexes d'une variable numérique

Définition 6.1 Une fonction numérique f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est dite convexe si quels que soient $x, y \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, on a l'inégalité

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y).$$

f est donc convexe si et seulement si le graphe de sa restriction à un sous-intervalle quelconque $[x, y]$ de I est situé au dessous de la corde joignant les points $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$.

Proposition 6.1 Pour qu'une fonction numérique f , définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , soit convexe, il faut et il suffit que pour chaque u fixé dans I , la fonction

$$F_u : t \mapsto \frac{f(t) - f(u)}{t - u}$$

soit croissante sur $I \setminus \{u\}$.

Théorème 6.1 Une fonction convexe sur un intervalle ouvert I est continue et admet en tout point de I une dérivée à gauche et une dérivée à droite, qui sont des fonctions croissantes vérifiant les inégalités

$$f'_g(u) \leq f'_d(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'_g(v) \leq f'_d(v)$$

quels que soient $u, v \in I$ avec $v > u$.

Théorème 6.2 Pour qu'une fonction numérique f , continue sur un intervalle ouvert I , soit convexe, il faut et il suffit qu'elle admette sur I une dérivée à droite (resp. à gauche) croissante.

Proposition 6.2 Pour qu'une fonction numérique f , définie sur un intervalle ouvert I et admettant sur I une dérivée seconde, soit convexe, il faut et il suffit que l'on ait $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$.

Proposition 6.3 Pour qu'une fonction numérique continue sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit qu'elle admette une dérivée à droite (resp. à gauche) en tout point de I et que son graphe soit tout entier situé au dessus de ses tangentes à droite (resp. à gauche).

7 Formules de Taylor

Soit f une fonction vectorielle (éventuellement numérique) définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et admettant en un point t_0 de I des dérivées jusqu'à l'ordre n inclus. Posons pour $t \in I$

$$R_n(t_0, t, f) = f(t) - f(t_0) - \sum_{k=1}^n \frac{(t - t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0).$$

On se propose alors d'évaluer $R_n(t_0, t, f)$ ou tout au moins de chercher une majoration de $\|R_n(t_0, t, f)\|$, les évaluations ou majorations ainsi obtenues étant appelées formules de Taylor, le vecteur (ou nombre) $R_n(t_0, t, f)$ étant appelé quant à lui reste d'ordre n de la formule de Taylor relative au point t_0 .

Proposition 7.1 Formule de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction numérique de classe \mathcal{C}^n sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Un tel nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b - a)$ avec $0 < \theta < 1$. On remarquera que cette proposition se réduit à la formule des accroissements finis lorsque $n = 0$.

Proposition 7.2 Formule de Taylor-Mac Laurin

Lorsque $a = 0$, on obtient en posant $b = x$ dans la formule de Taylor-Lagrange

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

Lorsque f prend ses valeurs dans un e.v.n. quelconque, on se contentera d'un résultat moins précis, qui donne une majoration de $\|R_n(a, b, f)\|$ lorsqu'on connaît une majoration de $\|f^{(n+1)}(t)\|$ sur $]a, b[$.

Proposition 7.3 Soit f une fonction à valeurs dans un e.v.n. quelconque E de classe C^n sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n+1$ vérifiant $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq \lambda$ ($\lambda = \text{cste}$) quel que soit $t \in]a, b[$. On a alors l'inégalité :

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On restreint nos hypothèses en supposant seulement que $f^{(n)}(a)$ existe.

Proposition 7.4 Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une application d'un voisinage de a dans un e.v.n. quelconque E , telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors la fonction ρ définie par

$$\rho : t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n} \left[f(t) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$$

tend vers 0 quand t tend vers a .

Proposition 7.5 Formule de Taylor-Young

Posant $\rho(a) = 0$, il existe une fonction $\rho : t \mapsto \rho(t)$ définie sur un voisinage de a et à valeurs dans E qui tend vers 0 lorsque t tend vers a et qui vérifie la formule

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (t-a)^n \rho(t).$$

Proposition 7.6 Application à l'étude de la croissance de l'exponentielle et du logarithme

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} \exp(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha \exp(x) = 0,$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}^{+*}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\log(t))^\alpha}{t^\beta} = 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\beta |\log(t)|^\alpha = 0.$

Définition 7.1 Pour chaque fonction f admettant une dérivée d'ordre n au point a , la fonction

$$t \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

est appelée le développement de Taylor d'ordre n de f au point a .

Exercice 12 On considère l'équation $E(I) : f(x) = xf' \left(\frac{x}{2} \right)$ d'inconnue f appartenant à l'ensemble des applications de $I \subset \mathbb{R}$ vers \mathbb{C} au moins 1 fois dérivable sur I . (On supposera que I est ou $]0; +\infty[$, ou $[0; +\infty[$, ou $] -\infty; 0[$, ou $] -\infty; 0]$ ou \mathbb{R} lui-même.) On note $S(I)$ l'ensemble des solutions de l'équation $E(I)$.

1. Soit f un élément de $S(I)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , f est $(n+1)$ fois dérivable sur $I \setminus \{0\}$ et que, pour tout élément x de $I \setminus \{0\}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n} f^{(n+1)} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{n}{2^{n-1}} f^{(n)} \left(\frac{x}{2} \right).$$

2. On suppose que l'intervalle I contient 0. Montrer que tout élément f de $S(I)$ vérifie $f(0) = 0$ et appartient à $\mathcal{C}^1(I)$.
3. Étude d'une fonction auxiliaire.
 - (a) Étudier les variations de l'application $v : t \rightarrow t2^{1-t}$ de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .
 - (b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $t2^{1-t} = 1$, d'inconnue réelle t , est l'ensemble $\{1, 2\}$.
4. On suppose que l'intervalle I contient 0. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f un élément de $S(I)$ n fois dérivable au point 0.
 - (a) En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n , $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.
 - (b) En déduire qu'il existe des complexes a et b tels que, quand x tend vers 0 dans I ,

$$f(x) = ax + bx^2 + o(x^n).$$

5. Montrer que, si l'application $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $S(I)$, alors, pour tout entier naturel k , l'application $x \mapsto x^k f^{(k)}(x)$, de I vers \mathbb{C} , appartient aussi à $S(I)$.

Correction :

- La propriété est vraie au rang 0 puisque f est une fois dérivable et $f(x) = xf' \left(\frac{x}{2} \right)$ pour tout $x \in I \setminus \{0\}$. Si la propriété est vraie au rang n , alors f est $n+1$ fois dérivable sur $I \setminus \{0\}$ et

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n} f^{(n+1)} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{n}{2^{n-1}} f^{(n)} \left(\frac{x}{2} \right). \quad (1)$$

Cela s'écrit :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, f^{(n+1)}(t) = \frac{1}{t} (2^{n-1} f^{(n)}(2t) - n f^{(n)}(t))$$

et exprime $f^{(n+1)}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $I \setminus \{0\}$ ce qui revient à dire que f est $n+2$ fois dérivable sur $I \setminus \{0\}$. En dérivant les deux membres de (1), on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2^n} f^{(n+1)} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{x}{2^{n+1}} f^{(n+2)} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{n}{2^n} f^{(n+1)} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2^{n+1}} f^{(n+2)} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{n+1}{2^n} f^{(n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)$$

pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

- Ici $0 \in I$ et il suffit de remplacer x par 0 dans l'équation $E(I)$ pour obtenir $f(0) = 0$. D'après la question précédente, f est de classe C^∞ sur $I \setminus \{0\}$. Par hypothèse, f est dérivable sur tout I , donc à fortiori en 0, et cela s'écrit $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0)$ (bien entendu, si 0 est la borne inférieure de I , la dérivabilité en 0 sera une limite à droite, etc). Ainsi la quantité

$$f'(t) - f'(0) = \frac{f(2t)}{2t} - f'(0)$$

tendra vers 0 quand t tend vers 0, et cela prouve la continuité de f' en 0. En conclusion, $f \in C^1(I)$.

- (a) La fonction $v(t) = t2^{1-t} = t \exp((1-t) \ln 2)$ est dérivable sur tout \mathbb{R} comme produit de deux fonctions dérivables, et la formule de dérivation d'un produit donne

$$v'(t) = 2^{1-t} - \ln 2 \times t \exp((1-t) \ln 2) = (1-t \ln 2) 2^{1-t}.$$

Le signe de la dérivée est facile à obtenir, d'où les variations de v : comme $v'(t) > 0$ sur $\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$ et $v'(t) < 0$ sur $\left] \frac{1}{\ln 2}, +\infty \right[$, v est croissante sur $\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$ et décroissante sur $\left] \frac{1}{\ln 2}, +\infty \right[$. De plus, $\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0_+$ et $v \left(\frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{2}{e \ln 2}$.

- (b) 1 et 2 sont solutions évidentes de l'équation $v(t) = 1$ et le tableau de variations de v montre que ce sont les seules.
- (a) La fonction f est n fois dérivable en 0, et on peut donc appliquer la formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

et affirmer que la fonction dérivée f' admet le DL suivant au voisinage de 0 :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1} + o(x^{n-1}).$$

L'égalité $f(x) = xf' \left(\frac{x}{2} \right)$ s'écrit :

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{2^{k-1}(k-1)!} x^k + o(x^n),$$

l'unicité de la partie polynomiale d'un DL entraîne $f(0) = 0$ et

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left(1 - \frac{k}{2^{k-1}} \right) = 0,$$

i.e.

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, f^{(k)}(0)(1 - k2^{1-k}) = 0.$$

Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $f^{(k)}(0)$ ou $1 - k2^{1-k}$ est égal à 0.

Remarque 7.1

- En fait, on ne peut pas dériver le DL de façon quasi-automatique. Par exemple, la fonction $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 puisque $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x} = o(x^2)$, sans que la dérivée $f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$ soit un $o(x)$ (dans le cas contraire, $x \cos \frac{1}{x}$ serait négligeable devant x , ce qui est absurde).
- L'intégration ou la dérivation d'un DL en 0 pose moins de problème si la fonction est définie en 0 (autrement dit si f est définie au voisinage de 0) et en rajoutant de bonnes hypothèses (par exemple : la fonction n fois dérivable en 0, comme dans le problème).

(b) La question précédente ainsi que 3.(b) permettent d'écrire

$$f \in \mathcal{S}(I) \Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } f^{(k)}(0) = 0 \text{ pour tout } k \in \{3, 4, \dots, n\}$$

d'où $f(x) = f'(0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + o(x^n)$. Il existe donc des complexes a, b tels que $f(x) = ax + bx^2 + o(x^n)$.

5. On pose $g_k(x) = x^k f^{(k)}(x)$. Comme $f \in \mathcal{S}(I)$,

$$\forall x \in]0, +\infty[, x^k f^{(k)}(x) = x \left[k \left(\frac{x}{2} \right)^{k-1} f^{(k)} \left(\frac{x}{2} \right) + \left(\frac{x}{2} \right)^k f^{(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right) \right].$$

Or $g'_k(x) = kx^{k-1} f^{(k)}(x) + x^k f^{(k+1)}(x)$ donc $g'_k \left(\frac{x}{2} \right) = k \left(\frac{x}{2} \right)^{k-1} f^{(k)} \left(\frac{x}{2} \right) + \left(\frac{x}{2} \right)^k f^{(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)$. Ainsi la fonction g_k vérifie l'équation $g_k(x) = x g'_k \left(\frac{x}{2} \right)$ d'où $g_k(x) = x^{k+1} f^{(k+1)}(x) \in \mathcal{S}(I)$.

Exercice 13 On désigne par $N_{\infty, I}(f) = \sup_{x \in I} |f(x)|$. f désigne une fonction positive de classe C^2 sur \mathbb{R} et telle que f'' soit bornée sur \mathbb{R} .

- (a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que pour tout $(x, \lambda) \in I \times \mathbb{R}$:

$$f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty, \mathbb{R}}(f'') \geq 0.$$

(b) En déduire que, pour tout réel x ,

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2N_{\infty, \mathbb{R}}(f'')f(x)}$$

- Soit I un intervalle fermé borné de \mathbb{R}_+ , de longueur $2r$, avec $r > 0$, et soit f une fonction réelle de classe C^2 sur I .

À l'aide d'une formule de Taylor avec reste de Lagrange, appliquée à la fonction f en l'un des deux couples $(x, x+r)$ ou $(x, x-r)$, montrer que, pour tout élément x de I ,

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{r} N_{\infty, I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty, I}(f'').$$

En déduire que

$$N_{\infty, I}(f') \leq \frac{2}{r} N_{\infty, I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty, I}(f'').$$

Correction :

- (a) La fonction f étant C^2 sur \mathbb{R} , on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x + \lambda$; il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x + \lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(x + \theta\lambda) \geq 0.$$

À fortiori,

$$f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty, \mathbb{R}}(f'') \geq 0.$$

- Premier cas : $N_{\infty, \mathbb{R}}(f'') > 0$. Dans ce cas, $f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty, \mathbb{R}}(f'')$ est un trinôme en λ conservant un signe constant, son discriminant est donc négatif ou nul :

$$[f'(x)]^2 - 2N_{\infty, \mathbb{R}}(f'')f(x) \leq 0$$

ou

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2N_{\infty, \mathbb{R}}(f'')f(x)}. \quad (2)$$

- Deuxième cas : $N_{\infty, \mathbb{R}}(f'') = 0$. La fonction f est alors affine et positive sur \mathbb{R} . Il existe $b \geq 0$ tel que $f(x) = b$ pour tout x de \mathbb{R} . Alors $f' = 0$ et l'inégalité (2) est encore vraie.

- On a $(x, x+r) \in I^2$ ou $(x-r, x) \in I^2$. Supposons, par exemple, que $(x, x+r) \in I^2$: comme

$$f(x+r) = f(x) + rf'(x) + \frac{r^2}{2}f''(x+\theta r),$$

on a

$$f'(x) = \frac{1}{r} [f(x+r) - f(x)] - \frac{r}{2}f''(x+\theta r),$$

et donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{r}N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2}N_{\infty,I}(f'').$$

Comme ceci vaut pour tout x de I , on a

$$\sup_{t \in I} |f'(x)| \leq \frac{2}{r}N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2}N_{\infty,I}(f'').$$

8 Développements limités polynomiaux

Définition 8.1 Soient f, g deux fonctions définies sur des voisinages d'un point t_0 dans un espace topologique T , prenant leurs valeurs dans un même e.v.n. E . On dit que f est équivalente à g au voisinage du point t_0 si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V du point t_0 tel que, pour tout $t \in V$, on ait

$$\|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon \|g(t)\|.$$

Définition 8.2 Notations de Landau

Supposons donnés un e.v.n. E , un espace topologique T et un point t_0 de T . Pour chaque fonction numérique φ , définie sur un voisinage U de t_0 et ne s'annulant pas sur $U \setminus \{t_0\}$, on désignera par $\bigcirc(\varphi)$ (resp. $\circ(\varphi)$) l'ensemble des fonctions à valeurs dans E , définies sur des voisinages de t_0 dans T , telles que le rapport $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$ soit borné dans un voisinage du point t_0 (resp. tende vers 0 quand t tend vers t_0). Plus précisément, on posera

- $f \in \bigcirc(\varphi)$ si et seulement si il existe un voisinage V de t_0 dans T et un nombre $k \geq 0$ tels que pour tout $t \in V$ on ait $\|f(t)\| \leq k|\varphi(t)|$,
- $f \in \circ(\varphi)$ si et seulement si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de t_0 dans T tel que, pour tout $t \in V$, on ait $\|f(t)\| \leq \varepsilon|\varphi(t)|$.

Définition 8.3 Soit f une fonction, définie dans un voisinage du point t_0 de \mathbb{R} , à valeurs dans un e.v.n. E et soit P_n un polynôme de degré $\leq n$ à coefficients dans E . On dit que P_n est un développement limité (DL) d'ordre n pour f au voisinage de t_0 si on a

$$f(t) = P_n(t) + \circ(t - t_0)^n,$$

c'est-à-dire si le quotient $(t - t_0)^{-n}[f(t) - P_n(t)]$ tend vers zéro lorsque t tend vers t_0 et si $f(t_0) = P_n(t_0)$.

Remarque 8.1

1. Si la fonction f admet un DL d'ordre $n \geq 0$ (resp. $n \geq 1$) au voisinage de t_0 alors f est continue (resp. dérivable) au point t_0 .
2. Si la fonction f est définie sur un voisinage de t_0 , sauf au point t_0 , et s'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)^{-n}[f(t) - P_n(t)] = 0 \text{ avec } n \geq 0,$$

on peut prolonger f par continuité au point t_0 en posant $f(t_0) = P_n(t_0)$. La fonction ainsi obtenue est continue au point t_0 et vérifie les conditions de la définition précédente.

Proposition 8.1 La formule de Taylor fournit un DL d'ordre n des fonctions usuelles au voisinage de l'origine :

- $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bigcirc(x^{n+1})$,
- $\text{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \bigcirc(x^{2n+2})$,
- $\text{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bigcirc(x^{2n+2})$,

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$,
- $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$,
- $(1+x)^a = 1 + ax + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$.

Théorème 8.1 *Théorème d'unicité*

Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage du point t_0 , ce développement est unique.

Corollaire 8.1 Si f est une fonction paire (resp. impaire) admettant un DL d'ordre n au voisinage de l'origine, ce développement ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.

Proposition 8.2 On a

- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$,
- $\arcsin(x) = x + \sum_{p=1}^n \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots(2p)} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$,
- $\operatorname{Arg} \operatorname{th}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$,
- $\operatorname{Arg} \operatorname{sh}(x) = x + \sum_{p=1}^n (-1)^p \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$.

Exercice 14 Démontrer le théorème et le corollaire suivants :

Théorème 8.2 Si f est définie sur un intervalle I au voisinage de 0 (donc contenant aussi 0) et admet le DL

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \mathcal{O}(x^n)$$

en ce point, et si F est une primitive de f sur I , alors

$$F(x) - F(0) = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{O}(x^{n+1}).$$

Corollaire 8.2 Si f est définie sur un intervalle I au voisinage de 0 (donc contenant aussi 0), admet le DL

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \mathcal{O}(x^n)$$

en ce point, et si f est n fois dérivable en 0 (avec $n \geq 2$), alors f est dérivable sur un intervalle J contenant 0 et inclus dans I , et

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \mathcal{O}(x^{n-1}).$$

Correction :

• Preuve du Théorème :

Notons $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et $P(x) = a_0x + a_1x^2 + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Le théorème des accroissements finis montre que, pour x voisin de 0 ,

$$|F(x) - F(0) - P(x)| \leq \left(\sup_{0 \leq t \leq x} |f(t) - p(t)| \right) |x|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|t| \leq \eta$ entraîne $|f(t) - p(t)| \leq \varepsilon|t|^n$. Si $|x| \leq \eta$ et si t se trouve entre 0 et x , on peut donc affirmer que

$$|f(t) - p(t)| \leq \varepsilon|t|^n \leq \varepsilon|x|^n$$

et l'inégalité précédente donne $|F(x) - F(0) - P(x)| \leq \varepsilon|x|^{n+1}$. Cela montre que $F(x) - F(0) - P(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$ et achève la preuve.

• Preuve du Corollaire :

La dérivée f' est définie sur un voisinage J de 0 et $n-1$ fois dérivable en 0 , donc admet un DL en 0 à l'ordre $n-1$ d'après la formule de Taylor-Young, par exemple

$$f'(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + \mathcal{O}(x^{n-1}).$$

Le théorème précédent donne :

$$f(x) = f(0) + b_0x + \frac{b_1}{2}x^2 + \dots + \frac{b_{n-1}}{n}x^n + \mathcal{O}(x^n)$$

et l'unicité d'un DL donne $a_0 = f(0)$ et $a_k = \frac{b_{k-1}}{k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

9 L'algèbre des développements limités

On se limite au cas des fonctions numériques définies sur un voisinage de l'origine.

Proposition 9.1 Soient f et g deux fonctions numériques admettant des DL d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de l'origine. Alors les fonctions $f + g$ et fg admettent de DL d'ordre n en ce point et il en est de même de $\frac{f}{g}$ si $g(0) \neq 0$. De plus,

1. le DL de $f + g$ est la somme des DL de f et de g ,
2. le DL du produit fg s'obtient en ne gardant que les termes d'ordre $\leq n$ dans le produit des DL de f et de g ,
3. le DL du quotient $\frac{f}{g}$ est égal au DL du quotient des DL de f et de g .

Proposition 9.2 Soient f et g deux fonctions numériques admettant des DL d'ordre $n \geq 1$ P_n et Q_n respectivement, au voisinage de l'origine. Si $f(0) = 0$, la fonction composée $g \circ f$ admet le même DL d'ordre n que le polynôme $Q_n \circ P_n$. On obtient donc ce développement en ne conservant, dans $Q_n \circ P_n$, que les termes d'ordre $\leq n$.

Exercice 15 Soit $f :]-1; +\infty[\rightarrow]-\frac{1}{e}; +\infty[$

$$x \mapsto x \exp(x)$$

Montrer que f est bijective, et que f et f^{-1} sont de classe C^1 sur leurs ensembles de définition. Déterminer un DL d'ordre 3 en 0 de f^{-1} et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

Correction : Notons $I =]-1, +\infty[$, $J =]-\frac{1}{e}, +\infty[$ et $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \exp(x)$$

- \tilde{f} est dérivable sur I comme produit de fonctions qui le sont, et on a : $\forall x \in I$, $\tilde{f}'(x) = (1+x)\exp(x) > 0$ donc \tilde{f} est strictement croissante sur I .
- \tilde{f} est continue et strictement monotone entre intervalles de \mathbb{R} , donc induit une bijection de I sur $\tilde{f}(I) = J$. Cette bijection est $I \mapsto J$, c'est-à-dire f (qui est donc bien définie).

$$x \mapsto x \exp(x)$$
- f est de classe C^∞ sur I , bijective et $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$ donc $f^{-1} \equiv g$ est de classe C^∞ sur J .
- g est de classe C^3 sur J et $0 \in J$ donc g possède un DL en 0 d'après la formule de Taylor-Young. On a $f(0) = 0$ donc aussi $g(0) = 0$ de sorte qu'on peut écrire le DL de g sous la forme indéterminée suivante :

$$g(u) =_0 au + bu^2 + cu^3 + o(u^3).$$

On a aussi le DL en 0 de f :

$$f(x) =_0 x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, on a donc :

$$x = g(f(x)) = af(x) + bf^2(x) + cf^3(x) + o((f(x))^3).$$

On a : $o((f(x))^3) =_0 o(x^3)$ car : $f(x) \underset{0}{\sim} x$. Donc :

$$\begin{aligned} x &= ax(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + bx^2(1 + 2x + o(x)) + cx^3(1 + o(1)) + o(x^3) \\ &= ax + (a+b)x^2 + (\frac{a}{2} + 2b + c)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du DL de la fonction identité au voisinage de 0, on obtient : $a = 1$, $b = -1$ et $c = \frac{3}{2}$ et ainsi :

$$g(x) =_0 x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$

- On a : $\forall x \in J$, $x = f(g(x)) = g(x)\exp(g(x))$ et g reste strictement positive sur \mathbb{R}^{*+} (car g est strictement croissante et $g(0) = 0$) donc : $\forall x > 0$, $\ln x = \ln(g(x)) + g(x)$ ou encore $\frac{\ln x}{g(x)} = 1 + \frac{\ln(g(x))}{g(x)}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ comme f , et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(g(x))}{g(x)} = 0$ par composition des limites, d'où : $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Exercice 16 Calculer les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

- (a) $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ ($n = 3$) (b) $\operatorname{Arg} \operatorname{ch} \sqrt{2+x^2}$ ($n = 4$) (c) $\ln \left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \right)$ ($n = 5$)
 (d) $(1 - \cos x)^5$ ($n = 13$) (e) $\frac{\ln(\operatorname{ch} x)}{\cos x}$ ($n = 5$) (f) $\tan x \exp \frac{\pi}{4}$ ($n = 3$).

Correction :

Chacune des fonctions envisagées sera notée f dans ce qui suit.

- (a) On a $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$ donc, avec $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

Puis

$$f(x) \underset{0}{=} \sqrt{1 + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)} = \sqrt{2} \sqrt{1+u}$$

où

$$u = \frac{x}{4} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right); u^2 = \frac{x^2}{16} \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right); u^3 = \frac{x^3}{64} (1 + o(1)).$$

Puisque $u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on peut affirmer $f(x) \underset{0}{=} \sqrt{2} \sqrt{1+u} = \sqrt{2} \left[1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3) \right]$.

Comme $u \underset{0}{=} \sqrt{2} \left[1 + \frac{x}{8} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} \right) + \frac{x^2}{128} \left(1 - \frac{x}{2} \right) + \frac{x^3}{1024} + o(x^3) \right]$,

$$f(x) \underset{0}{=} \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{8}x - \frac{5}{128}x^2 + \frac{21}{1024}x^3 + o(x^3) \right].$$

- (b) On effectue le DL d'ordre 2 en 0 de la fonction φ définie par $\varphi(t) = \text{Arg ch} \sqrt{2+t}$ puis on y substitue x^2 à t .
On rappelle que $\forall x \geq 1$, $\text{Arg ch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ donc

$$\varphi(t) = \ln(\sqrt{2+t} + \sqrt{1+t}).$$

Comme au 1. on a $\sqrt{1+t} \underset{0}{=} 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$ et $\sqrt{2+t} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{t}{2}} \underset{0}{=} \sqrt{2} \left[1 + \frac{t}{4} - \frac{t^2}{32} + o(t^2) \right]$. Ainsi

$$\sqrt{2+t} + \sqrt{1+t} \underset{0}{=} 1 + \sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4}t - \frac{4 + \sqrt{2}}{32}t^2 + o(t^2) = (1 + \sqrt{2})[1 + at + bt^2 + o(t^2)]$$

où $a = \frac{2 + \sqrt{2}}{4(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $b = -\frac{4 + \sqrt{2}}{32(1 + \sqrt{2})} = \frac{2 - 3\sqrt{2}}{32}$. Enfin, en substituant $u = at + bt^2 + o(t^2)$ dans le

DL d'ordre 2 en 0 suivant : $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on obtient

$$\varphi(t) \underset{0}{=} \ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(1 + u) = \ln(1 + \sqrt{2}) + at + bt^2 - \frac{a^2}{2}t^2 + o(t^2) = \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}t - \frac{3\sqrt{2}}{32}t^2 + o(t^2).$$

On termine en substituant x^2 à t :

$$f(x) \underset{0}{=} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{32}x^4 + o(x^4).$$

- (c) On écrit les DL à l'ordre 5 en 0 suivants :

$$\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5) \text{ et } \ln(1-t) \underset{0}{=} -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} + o(t^5)$$

donc $\ln(1+t) - \ln(1-t) \underset{0}{=} 2t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + o(t^5)$. On peut substituer $\tan(x)$ à t car $\tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et alors le terme $o(t^5)$ devient $o(x^5)$ puisque $\tan(x) \underset{0}{=} O(x)$. Il vient :

$$f(x) \underset{0}{=} 2 \tan(x) + \frac{2}{3} \tan^3(x) + \frac{2}{5} \tan^5(x) + o(x^5).$$

Comme le DL de la fonction tangente à l'ordre 5 en 0 est donné par $\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ d'où $\tan^3(x) = x^3 + x^5 + o(x^5)$ et $\tan^5(x) = x^5 + o(x^5)$, on obtient $f(x) \underset{0}{=} 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{2}{3}(x^3 + x^5) + \frac{2}{5}x^5 + o(x^5)$ soit

$$f(x) \underset{0}{=} 2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^5 + o(x^5).$$

On pouvait aussi tenter d'exploiter une des formules :

$$\frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right); \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2 \text{Arg th}(t); 2 \frac{1 + \tan^2(x)}{1 - \tan^2(x)} = \frac{2}{\cos(2x)}.$$

- (d) On a $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ donc $1 - \cos(x) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) = \frac{x^2}{2} \left[1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3) \right]$. On a directement

$$(1 - \cos(x))^5 = \frac{x^{10}}{32} \left[1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3) \right]^5 = \frac{x^{10}}{32} \left[1 - \frac{5}{12}x^2 + o(x^3) \right] \text{ soit}$$

$$f(x) = \frac{x^{10}}{32} - \frac{5}{384}x^{12} + o(x^{13})$$

- (e) Limitons les calculs aux termes utiles : $\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$. On peut substituer $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ à u dans le DL précédent, et le terme $O(u^3)$ s'écrit aussi $O(x^6)$ ou encore $o(x^5)$ ce qui donne : $\ln(\operatorname{ch}(x)) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + o(x^5) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$. Puis, comme on a déjà x^2 en facteur, on cherche seulement un DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$. On utilise :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \text{ et } \frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + O(u^2) \text{ avec } u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Comme précédemment on obtient $\frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ soit $f(x) \underset{0}{=} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)$ c'est-à-dire

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5).$$

- (f) On utilise par exemple la formule $\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1 + \tan(h)}{1 - \tan(h)}$. On a le DL à l'ordre 3 en 0 suivant :

$$\frac{1+t}{1-t} \underset{0}{=} (1+t)(1+t+t^2+t^3+o(t^3)) = 1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + o(t^3)$$

d'où en substituant $\tan(h)$ à t et en utilisant $\tan(h) \underset{0}{=} h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$:

$$\tan\left(\frac{x}{4} + h\right) \underset{0}{=} 1 + 2\left(h + \frac{h^3}{3}\right)2h^2 + 2h^3 + o(h^3) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + o(h^3).$$

Avec $x = \frac{\pi}{4} + h$, on a

$$\tan(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{=} 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Exercice 17 Soit f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2} \times \arcsin x$. On veut connaître le DL à l'ordre 5 en 0 de f par deux méthodes.

1. Première méthode.

- Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{-1/2}$.
- En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de $(1-x^2)^{-1/2}$.
- En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de $\arcsin x$.
- En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de f .

2. Deuxième méthode.

- Calculer $f'(x)$.
- Trouver $a(x)$ tel que $f'(x) + a(x)f(x) = 1$.
- Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de a .
- En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de f .

- En déduire la limite de la suite (u_n) donnée par $u_n = n^5 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \arcsin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} \right)$.

Correction :

1. Première méthode

- D'après le cours $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ donc

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

- On remplace ensuite x par $-x^2$ et on trouve $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\varepsilon(x)$. De plus, comme $(1-x^2)^{-1/2}$ est pair, le terme à l'ordre 5 est nul, ainsi

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^5\varepsilon(x).$$

(c) $\arcsin x$ est une primitive de $(1 - x^2)^{-1/2}$ et $\arcsin 0 = 0$ donc

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

(d) On peut soit calculer le DL de $(1 - x^2)^{1/2}$ et multiplier, soit écrire $(1 - x^2)^{1/2} \arcsin x = \frac{\arcsin x}{(1 - x^2)^{-1/2}}$ et diviser par les puissances croissantes. On trouve

$$\begin{array}{r|l} x & +\frac{1}{6}x^3 & +\frac{3}{40}x^5 & 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 \\ - & \left(x & +\frac{1}{2}x^3 & +\frac{3}{8}x^5 \right) & x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 \\ = & -\frac{1}{3}x^3 & -\frac{3}{10}x^5 & \\ - & \left(-\frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{6}x^5 \right) & \\ = & & -\frac{2}{15}x^5 & \end{array}$$

2. (a) Un simple calcul donne $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$.

(b) On en déduit que $f'(x) = 1 - \frac{x}{1-x^2}f(x)$ donc que f est solution de $f'(x) + \frac{x}{1-x^2}f(x) = 1$.

(c) On a $\frac{x}{1-x^2} = x(1+x^2+x^4+x^4\varepsilon(x)) = x+x^3+x^4\varepsilon(x)$.

(d) Comme f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b ayant des développements limités à l'ordre 4, il en va de même pour f . De plus f est impaire, on peut donc écrire

$$f(x) = ax + bx^3 + cx^5 + x^5\varepsilon(x).$$

On en déduit que

$$f'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + x^4\varepsilon(x)$$

et que

$$\frac{x}{1-x^2}f(x) = (x+x^3)(ax+bx^3) + x^4\varepsilon(x) = ax^2 + (a+b)x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

et enfin que

$$f'(x) + \frac{x}{1-x^2}f(x) = a + (a+3b)x^2 + (a+b+5c)x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

Comme $f'(x) + \frac{x}{1-x^2}f(x) = 1$, $a = 1$, $a + 3b = 0$ donc $b = -\frac{1}{3}$ et $a + b + 5c = 0$ donc $c = -\frac{2}{15}$. On retrouve bien

$$\sqrt{1-x^2} \arcsin x = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

(e) On a $u_n = n^5 \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} \right) = -\frac{2}{15} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{2}{15}$.

10 Développements asymptotiques

Définition 10.1 Soit \mathcal{E}_{t_0} un ensemble de fonctions numériques définies au voisinage de t_0 et non équivalentes à zéro. On dit que \mathcal{E}_{t_0} constitue une échelle de comparaison au voisinage de t_0 si \mathcal{E}_{t_0} est totalement ordonné par la relation ($f = \circ(g)$ ou $f = g$) notée $f \preccurlyeq g$. En d'autres termes \mathcal{E}_{t_0} constitue une échelle de comparaison si, quelles que soient les fonctions $f, g \in \mathcal{E}_{t_0}$ ($f \neq g$), l'une des relations $f = \circ(g)$, $g = \circ(f)$ est vraie.

Définition 10.2 Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un point t_0 de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit \mathcal{E} une échelle de comparaison au voisinage de t_0 . On dit que f admet un développement asymptotique (ou limité) par rapport à \mathcal{E} , à la précision φ (où $\varphi \in \mathcal{E}$) s'il existe une famille de nombres réels $(\lambda_\psi)_{\psi \in \mathcal{E}}$ presque tous nuls, c'est-à-dire nuls sauf en un nombre fini d'entre eux, vérifiant

$$f(x) = \sum_{\psi \in \mathcal{E}, \psi \succcurlyeq \varphi} \lambda_\psi \psi(x) + \circ(\varphi).$$

Exercice 18 Pour $n > 3$, on note x_n la plus petite racine positive de l'équation $\exp(x) = x^n$. Étudier la suite (x_n) puis déterminer un développement asymptotique à l'ordre 3 de x_n suivant les puissances de $\frac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini.

Correction :

(a) Existence.

On transforme d'abord l'équation pour se ramener à l'étude d'une seule fonction de x . On a pour $x > 0$ et $n > 3$, $\exp(x) = x^n$, $x = n \ln x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x} = n$ ($\ln x \neq 0$ car $x = 1$ n'est pas solution de l'équation). On remarque aussi que $x = 0$ n'est pas solution et que pour $x \in]0, 1]$, on a : $x^n \ll 1 < \exp(x)$ donc les solutions de l'équation sont à chercher dans $]1, +\infty[$. On définit la fonction φ sur $]1, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{x}{\ln x}$. Elle est de classe C^1 et sa dérivée $\varphi'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ a le signe de $\ln x - 1$. D'où le tableau de variation :

x	1	e	$+\infty$
$\varphi'(x)$		- 0 +	
$\varphi(x)$	$+\infty$	\searrow e	\nearrow $+\infty$

Ainsi, pour $n \geq 3 > e$ le théorème de la bijection appliqué à la fonction φ , continue et strictement monotone sur l'intervalle $]1, e]$ montre que l'équation $\varphi(x) = n$ possède une unique solution x_n et que $1 < x_n < e$.

(b) Monotonie et limite.

La restriction de φ à l'intervalle $]1, e]$ admet une bijection réciproque que l'on nomme ϕ . Celle-ci est une bijection de $[e, +1[$ sur $]1, e]$ et elle est, comme φ , strictement décroissante. On a $\varphi(x_n) = n$ donc $x_n = \phi(n)$ et ainsi :

$$x_{n+1} = \phi(n+1) < \phi(n) = x_n$$

ce qui prouve que la suite (x_n) est strictement décroissante. En fait ça n'est pas vraiment utile puisqu'on a directement sa convergence et sa limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 1$ donc $x_n = \phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

(c) Développement asymptotique.

Reprenons la définition : $x_n^n = \exp(x_n)$ que l'on écrit : $x_n = \exp\left(\frac{x_n}{n}\right)$.

– Le DL1 de la fonction exponentielle en 0 s'écrit : $\exp(u) \underset{0}{=} 1 + u + o(u)$ et on peut substituer $\frac{x_n}{n}$ à u puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 0$. On obtient :

$$x_n = 1 + \frac{x_n}{n} + o\left(\frac{x_n}{n}\right).$$

Or d'une part $x_n = 1 + o(1)$ donc $\frac{x_n}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et d'autre part, $o\left(\frac{x_n}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ car x_n tend vers 1 (vérifier). On a donc :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3)$$

On va réinjecter ce premier résultat dans le DL2 de la fonction exp en 0 : $\exp(u) \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o(u^2)$.

$$x_n = 1 + \frac{x_n}{n} + \frac{x_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right).$$

On a encore $o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et aussi : $x_n^2 = 1 + o(1)$. On a donc :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] + \frac{1}{2n^2} [1 + o(1)] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (4)$$

– On injecte à nouveau ce résultat dans le DL de la fonction exp. en 0 : $\exp(u) \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$.

$$x_n = 1 + \frac{x_n}{n} + \frac{x_n^2}{2n^2} + \frac{x_n^3}{6n^3} + o\left(\frac{x_n^3}{n^3}\right).$$

On remplace x_n à l'aide de (4), x_n^2 par $1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ d'après (3) et enfin x_n^3 par $1 + o(1)$, on obtient :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] + \frac{1}{2n^2} \left[1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] + \frac{1}{6n^3} [1 + o(1)] + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et finalement :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + \frac{8}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1.1.3.5\cdots(2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Références

- [1] ARNAUD BODIN. *Dérivabilité*.
[http ://math.univ-lille1.fr/~bodin/exo4/selcor/selcor13.pdf](http://math.univ-lille1.fr/~bodin/exo4/selcor/selcor13.pdf)
- [2] ANTOINE CRISTOFARI. *Fonctions de la variable réelle, étude locale*.
[http ://cristofari.pagesperso-orange.fr/PDF/Feuilles/Feuille1.pdf](http://cristofari.pagesperso-orange.fr/PDF/Feuilles/Feuille1.pdf)
- [3] DOMINIQUE HOAREAU. *Fonction continue contre Fonction dérivée*.
[http ://megamaths.perso.neuf.fr/domi/Foncderi.pdf](http://megamaths.perso.neuf.fr/domi/Foncderi.pdf)
- [4] JACQUELINE LELONG-FERRAND, JEAN-MARIE ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition*.
- [5] CAPES DE MATHÉMATIQUES 2002. *1ère composition*.
- [6] EXERCICES COLLECTION EXO7. *Fonctions dérivables*.
[http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00013.pdf](http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00013.pdf)