Master 1 Métiers de l'Enseignement, Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2012/2013

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 3 - Dérivées, Développements limités.

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des applications dont l'ensemble de départ est une partie de $\mathbb{R}$, et dont l'ensemble d'arrivée est un espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n.) E sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (fonctions vectorielles d'une variable numérique). Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, la donnée d'une telle application f équivaut à la donnée de n fonctions numériques f_i (les composantes de f).

Définition 0.1 *Soit $f : X \to E$ une application d'une partie X de $\mathbb{R}$ dans un e.v.n. E et soit $t_0 \in \overline{X}$ (resp. $t_0 \in X$). On dit que $f(t)$ tend vers le point x_0 de E lorsque t tend vers t_0 (resp. on dit que f continue au point t_0) si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que les relations $t \in X$ et $|t - t_0| < \eta$ entraînent $\|f(t) - x_0\| < \varepsilon$ (resp. $\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$).*

1 Notions de dérivées - Fonctions dérivables.

Définition 1.1 *Soit I un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ et f une application de I dans un e.v.n. E. On dit que f est dérivable au point t_0 si l'application*

$$I \backslash \{t_0\} \to E,\ t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

a une limite au point t_0. Cette limite est appelée dérivée de f au point t_0, et notée $f'(t_0)$ ou $(df/dt)(t_0)$, ou $(df/dt)_{t_0}$. C'est un élément de E. Si f est dérivable en chaque point d'un ouvert I de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, et l'application $I \to E$, $t \mapsto f'(t)$ est appelée fonction dérivée, ou simplement dérivée de f.

Définition 1.2 *(Généralisation)*
Soit f une fonction à valeurs dans un e.v.n. E, dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[t_0, t_1]$, avec $t_1 > t_0$ (resp. un intervalle $[t_1, t_0]$ avec $t_1 < t_0$). La dérivée à droite (resp. à gauche) de f en t_0, notée $f'_d(t_0)$ (resp. $f'_g(t_0)$) est la limite (si elle existe) du rapport

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

lorsque t tend vers t_0 par valeurs supérieures (resp. inférieures).

Ces définitions s'appliquent en particulier au cas où f est une fonction numérique (cas où $E = \mathbb{R}$, avec la norme définie par $x \mapsto |x|$).

Remarque 1.1 Pour que f soit dérivable au point t_0, il faut et il suffit que $f'_d(t_0)$ et $f'_g(t_0)$ existent à la fois, et que $f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$.

Théorème 1.1 *Si l'application f admet une dérivée au point t_0, alors f est continue en ce point.*

Définition 1.3 *On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I si la dérivée $f^{(p)}(t)$ existe en tout point de I et si l'application $t \mapsto f^{(p)}(t)$ est continue sur I.*
Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour $0 \leq k \leq p$.
Par extension, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f admet des dérivées de tous les ordres (ces dérivées étant alors automatiquement continues).

Définition 1.4 *Soit f une fonction définie sur un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans le produit $E_1 \times E_2 \ldots E_n$ des e.v.n. $E_1, \ldots, E_n$ et soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ses composantes. Pour que f soit dérivable au point t_0 (resp. pour que f soit de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle) il faut et il suffit que chacune de ses composantes le soient.*

L'étude des fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ se ramène donc à l'étude de fonctions numériques dérivables.

Exercice 1 *Le Théorème de Darboux.*

Théorème 1.2 *Soit F une fonction réelle définie et dérivable sur l'intervalle I. On pose $f = F'$. Soit $a < b$ dans I tel que $f(a) < f(b)$, $\mu \in]f(a); f(b)[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $\mu = f(c)$.*

Pour $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I, la fonction dérivée $F' = f$ a la propriété des valeurs intermédiaires. Ceci montre (au passage) que la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas l'apanage des fonctions continues.

1. $[\ .\ ]$ désigne la partie entière. Trouver les fonctions réelles F définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F' = [F]$.
2. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, sans zéros et vérifiant $|F''| = F$. Déterminer F.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f_1(0) = 0$.
2. $f_2(x) = \sin x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f_2(0) = 0$.
3. $f_3(x) = \dfrac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$ si $x \neq 1$, $f_3(1) = 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}^{\star +}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

2 L'algèbre des fonctions dérivables

Proposition 2.1 *Dérivée d'une combinaison linéaire.*
Soient f et g deux applications de l'intervalle I dans le même e.v.n. sur K dérivables en un point t_0 de I. Alors, quels que soient les scalaires $\alpha, \beta \in K$, la fonction $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable au point t_0 et on a

$$h'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0).$$

On notera que l'ensemble des applications de I dans E, qui sont dérivables au point t_0, constituent un K-espace vectoriel $\mathcal{D}$, et que l'application $t \mapsto f'(t_0)$ de $\mathcal{D}$ dans E est linéaire.

Proposition 2.2 *Dérivée d'un produit.*
Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions numériques ou complexes définies sur l'intervalle I dans l'espace E_i, dérivables au point t_0. Alors l'application h de I dans E, définie par $h(t) = p[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)]$ est dérivable en t_0 et on a :

$$h'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} f_1(t_0) \ldots f'_k(t_0) \ldots f_n(t_0).$$

Plus généralement, soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et E des e.v.n. sur le corps K et soit

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

une application multilinéaire continue de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans E, définissant un produit.

Théorème 2.1 *Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ soit f_i une application de l'intervalle I dans l'espace E, définie par $h(t) = p[f_1(t), f_2(t), \ldots f_n(t)]$, dérivable en t_0. On a alors*

$$h'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} p[f_1(t_0) \ldots f'_k(t_0) \ldots f_n(t_0)].$$

La fonction h est souvent appelée le produit des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et on peut alors énoncer le précédent théorème de la manière suivante : « La dérivée d'un produit est la somme des n produits obtenus en remplaçant successivement chaque facteur par sa dérivée, sans modifier l'ordre des facteurs. »

Corollaire 2.1

1. *Si f, g sont deux applications dérivables sur l'intervalle I, à valeurs dans l'espace euclidien E_n, alors le produit scalaire $f(t).g(t)$ est une fonction numérique dérivable et on a :*

$$\frac{d}{dt}[f(t).g(t)] = f'(t).g(t) + f(t).g'(t).$$

2. *Si f et g sont deux applications dérivables de I dans E_3, alors le produit vectoriel $f(t) \wedge g(t)$ est une fonction dérivable de I dans E_3, et on a :*

$$\frac{d}{dt}[f(t) \wedge g(t)] = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

3. *Soient $t \mapsto a_{ij}(t)$, n^2 fonctions numériques ou complexes dérivables sur l'intervalle I. Alors le déterminant $D(t) = \text{dét}[a_{ij}(t)]$ est une fonction dérivable, et sa dérivée est la somme des n déterminants obtenus en dérivant successivement les éléments de chaque ligne (ou de chaque colonne).*

Proposition 2.3 *Formule de Leibniz*
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un voisinage du point t_0 et admettant en ce point des dérivées jusqu'à l'ordre n (inclus). Alors la dérivée d'ordre n au point t_0 vérifie la formule dite de Leibniz :

$$\frac{d^n}{dt^n}(fg)_{t_0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t_0) g^{(n-k)}(t_0).$$

Théorème 2.2 *Soit g une fonction numérique définie sur un voisinage I du point t_0 dans $\mathbb{R}$ dérivable au point t_0. Soit f une fonction (numérique ou vectorielle) définie sur un voisinage du point $x_0 = g(t_0)$ contenant $g(I)$. Alors, si f est dérivable au point $x_0 = g(t_0)$, $h = f \circ g$ est dérivable au point t_0 et on a :*

$$h'(t_0) = g'(t_0) f'(x_0).$$

Proposition 2.4 *Soit g une fonction numérique définie sur un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ telle que $g'(t_0)$ existe et $g(t_0) \neq 0$. Alors la fonction $h = 1/g : t \mapsto 1/g(t)$, qui est définie sur un voisinage de t_0, admet une dérivée au point t_0 et on a :*

$$h'(t_0) = -\frac{g'(t_0)}{g^2(t_0)}.$$

Proposition 2.5 *Soit f une application bijective et continue d'un intervalle I sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, dérivable en un point t_0 de I et telle que $f'(t_0) \neq 0$. Alors sa réciproque $h = f^{-1}$ est dérivable au point $x_0 = f(t_0)$ et on a*

$$h'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)}.$$

Proposition 2.6 *Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ alors leur somme $f + g$, leur produit fg, leur quotient f/g et leur composée $f \circ g$ sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur leur ensemble de définition. Il en est de même de la réciproque f^{-1} de f si f est bijective et si sa dérivée ne s'annule pas.*

Exercice 5 Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^n(1 - x^n)$.
Calculer $f^{(n)}(x)$ par deux méthodes, et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 6 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \, ; \; g(x) = \sin^2 x \, ; \; h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

3 Application à l'étude des fonctions élémentaires

- La fonction numérique appelée logarithme népérien $t \mapsto \log(x)$ définie pour $x > 0$ satisfait à

$$\frac{d}{dx}(\log(x)) = \frac{1}{x} \text{ et } \log(1) = 0.$$

  et établit une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une réciproque notée $x \mapsto \exp(x)$.
- La fonction numérique appelée exponentielle $t \mapsto \exp(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait à

$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x).$$

- La fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{C}$ $x \mapsto \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\frac{d}{dx}(\exp(ix)) = i \exp(ix).$$

- La restriction de $x \mapsto \sin(x)$ à l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$ est une bijection continue de cet intervalle sur $[-1, 1]$ et sa dérivée $\cos(x)$ ne s'annule qu'aux points $-\pi/2$ et $+\pi/2$, d'images respectives -1 et $+1$. Cette fonction admet une réciproque, notée $\arcsin(x)$ (le nombre $y = \arcsin(x)$ étant défini par les deux conditions $\sin(y) = x$, $-\pi/2 \leq y \leq +\pi/2$). La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1, +1]$ et dérivable sur $]-1, +1[$, sa dérivée étant
$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- On définit de même la fonction $\arccos(x)$ sur $[-1, +1]$ par les conditions
$$\cos(\arccos(x)) = x,\ 0 \leq \arccos(x) \leq \pi,$$
qui entraînent $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$ et on a
$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d}{dx}(\arcsin(x)).$$
- La restriction de $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $]-\pi/2, +\pi/2[$ est une bijection continue de cet intervalle sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $1 + \tan^2(x)$ ne s'annule pas. Cette fonction admet donc une réciproque notée $\arctan(x)$, dérivable sur $\mathbb{R}$, le nombre $y = \arctan(x)$ étant défini par les consitions $\tan(y) = x$, $-\pi/2 < y < +\pi/2$, et vérifiant
$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$
- Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, la fonction composée $x \mapsto \exp(a \log(x))$ est définie pour $x > 0$. On la note $x \mapsto x^a$ (car, pour $a \in \mathbb{Z}$, elle coïncide avec la puissance d'ordre a de x). Cette fonction est dérivable avec
$$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{a}{x}\exp(a \log(x)) = ax^{a-1}.$$
Par récurrence, on en déduit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie
$$\frac{d^n}{dx^n}(x^a) = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$. Les fonctions ainsi définies sont évidemment dérivables, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifient les relations
$$(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x) \text{ et } (\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x).$$
On peut associer aux fonctions $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$, appelées respectivement cosinus et sinus hyperboliques, les fonctions $x \mapsto \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ (tangente hyperbolique de x) et $x \mapsto \mathrm{coth}(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ (cotangente hyperbolique de x, définie pour $x \neq 0$) dont les dérivées sont
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{th}(x)) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \text{ et } \frac{d}{dx}(\mathrm{coth}(x)) = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sh}(x)) = \mathrm{ch}(x) > 0$ donc $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est une fonction continue strictement croissante. C'est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée ne s'annule pas. Cette fonction admet donc une réciproque notée $\mathrm{Arg\ sh}(x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est :
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arg\ sh}(x)) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Arg\ sh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
De même, la restriction à $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur la demi-droite $x \geq 1$ dont la dérivée est positive pour $x > 1$. Elle admet donc une réciproque positive, notée $\mathrm{Arg\ ch}(x)$ définie sur la demi-droite $x \geq 1$ et dérivable pour $x > 1$ de dérivée
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arg\ ch}(x)) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Arg\ ch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (x > 1)$$
- La fonction $\mathrm{th}(x)$ croît de -1 à $+1$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas. La fonction $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ admet donc une réciproque, notée $\mathrm{Arg\ th}(x)$ définie et dérivable sur l'intervalle $]-1, +1[$ dont la dérivée est
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arg\ th}(x)) = \mathrm{ch}^2(\mathrm{Arg\ th}(x)) = \mathrm{ch}^2(\mathrm{Arg\ th}(x)) = \frac{1}{1-x^2}\ (|x| < 1)$$

4 Théorème de Rolle - Applications

Théorème 4.1 *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et admettant, en un point t_0 intérieur à I, un extrémum relatif (maximum ou minimum). Si la dérivée $f'(t_0)$ existe, on a $f'(t_0) = 0$.*

Théorème 4.2 *Théorème de Rolle*
Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 4.3 *Formule des accroissements finis*
Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que l'on ait

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Les deux théorèmes précédents traduisent le fait géométrique suivant :

Proposition 4.1 *Si f est une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (appelée ≪ corde ≫) joignant les points $A = [a, f(a)]$ et $B = [b, f(b)]$.*

Théorème 4.4 *Règle de l'Hôpital*
Soient f et g deux fonctions numériques continues sur un voisinage I du point t_0 dans $\mathbb{R}$ et dérivables sur $I\backslash\{t_0\}$, satisfaisant à $f(t_0) = g(t_0) = 0$ et à $g(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$ pour $t \neq t_0$. Pour que le rapport $f(t)/g(t)$ tende vers le nombre L lorsque t tend vers t_0, il suffit que le rapport $f'(t)/g'(t)$ tende vers L au point t_0.

Proposition 4.2 *Application à la variation des fonctions numériques*
Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point intérieur à I. Pour que f soit croissante (resp. décroissante) au sens large sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit partout ≥ 0 (resp. ≤ 0). Pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit partout nulle.

Proposition 4.3 *Pour qu'une fonction numérique dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ soit strictement croissante il suffit que sa dérivée soit strictement positive.*

Théorème 4.5 *Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(t_0) \neq 0$. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant t_0, tel que la restriction de f à J soit strictement monotone et admette une réciproque de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exercice 7 Démontrer le Théorème de Rolle généralisé : ≪ Soit F une fonction continue sur $[a; +\infty[$, dérivable sur $]a; +\infty[$ telle que $F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. Alors il existe $c \in]a; +\infty[$ tel que $F'(c) = 0$ ≫.

Exercice 8 Démontrer le résultat suivant : ≪ Soit (F_n) une suite de fonctions dérivables de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

- il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que la suite $(F_n(x_0))$ converge,
- la suite de fonctions (F_n') converge uniformément vers une fonction g.

Alors (F_n) converge uniformément sur $[0; 1]$ vers une fonction dérivable F qui vérifie $F' = g$ ≫.

Exercice 9 Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = [(1 - t^2)^n]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1; 1]$.

Exercice 10 Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a; b[$ s'annulant en $n + 1$ points de $]a; b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a; b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 11 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0; 1[$
$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

5 Formule générale des accroissements finis

De façon générale, si f est une application continue de $[a, b]$ dans un e.v.n. E (par exemple $\mathbb{R}^n$), dérivable sur $]a, b[$, il n'existe pas nécessairement de point c de $]a, b[$ tel que l'on ait l'égalité vectorielle $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ et le cas où un tel point c existe doit être considéré comme exceptionnel. Il est cependant très important pour les applications de pouvoir donner une majoration précise et simple de $\|f(b) - f(a)\|$ connaissant une majoration de $\|f'(t)\|$ sur $]a, b[$.

Proposition 5.1 *Soit f une application continue de l'intervalle fermé $[a, b]$ dans un espace vectoriel normé E et soit g une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'en chaque point de $[a, b]$, f et g possèdent des dérivées à droite vérifiant l'inégalité $\|f'_d(t)\| \leq g'_d(t)$ quel que soit $t \in [a, b]$. Alors on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

En prenant $f(t) = 0$ quel que soit t, on obtient le

Théorème 5.1 *Si g est une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et pourvue en chaque point de $]a, b[$ d'une dérivée à droite positive ou nulle alors g est croissante.*

En prenant $g(t) = kt$ (k constante positive), on obtient le résultat fondamental suivant

Théorème 5.2 *Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans un espace vectoriel normé E admettant en chaque point de $]a, b[$ une dérivée à droite vérifiant l'inégalité $\|f'_d(t)\| \leq k$. Alors on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k(b - a).$$

Corollaire 5.1 *Soit f une fonction (numérique ou vectorielle) continue sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée à droite partout nulle. Alors f est constante sur $[a, b]$.*

Proposition 5.2 *Prolongement d'une fonction dérivable*
Soit I un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ et f une fonction (numérique ou vectorielle) définie sur $I \backslash \{t_0\}$ admettant en tout point de $I \backslash \{t_0\}$ une dérivée à droite. On suppose que

$$y_0 = \lim_{t \to t_0} f(t) \text{ et } z_0 = \lim_{t \to t_0} f'_d(t) \text{ existent}$$

et on désigne par $\overline{f}$ le prolongement de f à I obtenu en posant $\overline{f}(t_0) = y_0$. Alors $\overline{f}$ est dérivable au point t_0 et on a $\overline{f}'(t_0) = z_0$.

6 Fonctions convexes d'une variable numérique

Définition 6.1 *Une fonction numérique f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite convexe si quels que soient $x, y \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, on a l'inégalité*

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y).$$

f est donc convexe si et seulement si le graphe de sa restriction à un sous-intervalle quelconque $[x, y]$ de I est situé au dessous de la corde joignant les points $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$.

Proposition 6.1 *Pour qu'une fonction numérique f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit convexe, il faut et il suffit que pour chaque u fixé dans I, la fonction*

$$F_u : t \mapsto \frac{f(t) - f(u)}{t - u}$$

soit croissante sur $I \backslash \{u\}$.

Théorème 6.1 *Une fonction convexe sur un intervalle ouvert I est continue et admet en tout point de I une dérivée à gauche et une dérivée à droite, qui sont des fonctions croissantes vérifiant les inégalités*

$$f'_g(u) \leq f'_d(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'_g(v) \leq f'_d(v)$$

quels que soient $u, v \in I$ avec $v > u$.

Théorème 6.2 *Pour qu'une fonction numérique f, continue sur un intervalle ouvert I, soit convexe, il faut et il suffit qu'elle admette sur I une dérivée à droite (resp. à gauche) croissante.*

Proposition 6.2 *Pour qu'une fonction numérique f, définie sur un intervalle ouvert I et admettant sur I une dérivée seconde, soit convexe, il faut et il suffit que l'on ait $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$.*

Proposition 6.3 *Pour qu'une fonction numérique continue sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit qu'elle admette une dérivée à droite (resp. à gauche) en tout point de I et que son graphe soit tout entier situé au dessus de ses tangentes à droite (resp. à gauche).*

7 Formules de Taylor

Soit f une fonction vectorielle (éventuellement numérique) définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant en un point t_0 de I des dérivées jusqu'à l'ordre n inclus. Posons pour $t \in I$

$$R_n(t_0, t, f) = f(t) - f(t_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0).$$

On se propose alors d'évaluer $R_n(t_0, t, f)$ ou tout au moins de chercher une majoration de $\|R_n(t_0, t, f)\|$, les évaluations ou majorations ainsi obtenues étant appelées formules de Taylor, le vecteur (ou nombre) $R_n(t_0, t, f)$ étant appelé quant à lui reste d'ordre n de la formule de Taylor relative au point t_0.

Proposition 7.1 *Formule de Taylor-Lagrange*
Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n+1$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Un tel nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b-a)$ avec $0 < \theta < 1$. On remarquera que cette proposition se réduit à la formule des accroissements finis lorsque $n = 0$.

Proposition 7.2 *Formule de Taylor-Mac Laurin*
Lorsque $a = 0$, on obtient en posant $b = x$ dans la formule de Taylor-Lagrange

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \ (0 < \theta < 1).$$

Lorsque f prend ses valeurs dans un e.v.n. quelconque, on se contentera d'un résultat moins précis, qui donne une majoration de $\|R_n(a, b, f)\|$ lorsqu'on connaît une majoration de $\|f^{(n+1)}(t)\|$ sur $]a, b[$.

Proposition 7.3 *Soit f une fonction à valeurs dans un e.v.n. quelconque E de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n+1$ vérifiant $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq \lambda$ ($\lambda =$ cste) quel que soit $t \in]a, b[$. On a alors l'inégalité :*

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On restreint nos hypothèses en supposant seulement que $f^{(n)}(a)$ existe.

Proposition 7.4 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une application d'un voisinage de a dans un e.v.n. quelconque E, telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors la fonction ρ définie par*

$$\rho : t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n} \left[f(t) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$$

tend vers 0 quand t tend vers a.

Proposition 7.5 *Formule de Taylor-Young*
Posant $\rho(a) = 0$, il existe une fonction $\rho : t \mapsto \rho(t)$ définie sur un voisinage de a et à valeurs dans E qui tend vers 0 lorsque t tend vers a et qui vérifie la formule

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (t-a)^n \rho(t).$$

Proposition 7.6 *Application à l'étude de la croissance de l'exponentielle et du logarithme*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \exp(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha \exp(x) = 0$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{(\log(t))^\alpha}{t^\beta} = 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\beta |\log(t)|^\alpha = 0$.

Définition 7.1 *Pour chaque fonction f admettant une dérivée d'ordre n au point a, la fonction*

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

est appelée le développement de Taylor d'ordre n de f au point a.

Exercice 12 On considère l'équation $E(I)$: $f(x) = xf'\left(\frac{x}{2}\right)$ d'inconnue f appartenant à l'ensemble des applications de $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ au moins 1 fois dérivable sur I. (On supposera que I est ou $]0;+\infty[$, ou $[0;+\infty[$, ou $]-\infty;0[$, ou $]-\infty;0]$ ou $\mathbb{R}$ lui-même.) On note $S(I)$ l'ensemble des solutions de l'équation $E(I)$.

1. Soit f un élément de $S(I)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, f est $(n+1)$ fois dérivable sur $I\backslash\{0\}$ et que, pour tout élément x de $I\backslash\{0\}$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n}{2^{n-1}} f^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right).$$
2. On suppose que l'intervalle I contient 0. Montrer que tout élément f de $S(I)$ vérifie $f(0) = 0$ et appartient à $\mathcal{C}^1(I)$.
3. Étude d'une fonction auxiliaire.
   (a) Étudier les variations de l'application $v : t \to t2^{1-t}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $t2^{1-t} = 1$, d'inconnue réelle t, est l'ensemble $\{1, 2\}$.
4. On suppose que l'intervalle I contient 0. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f un élément de $S(I)$ n fois dérivable au point 0.
   (a) En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.
   (b) En déduire qu'il existe des complexes a et b tels que, quand x tend vers 0 dans I,
$$f(x) = ax + bx^2 + \circ(x^n).$$
5. Montrer que, si l'application $f : I \to \mathbb{C}$ appartient à $S(I)$, alors, pour tout entier naturel k, l'application $x \mapsto x^k f^{(k)}(x)$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient aussi à $S(I)$.

Exercice 13 On désigne par $N_{\infty,I}(f) = \sup_{x\in I} |f(x)|$. f désigne une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que pour tout $(x, \lambda) \in I \times \mathbb{R}$:
$$f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') \geq 0.$$
   (b) En déduire que, pour tout réel x,
$$|f'(x)| \leq \sqrt{2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')f(x)}$$
2. Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}_+$, de longueur $2r$, avec $r > 0$, et soit f une fonction réelle de classe C^2 sur I.
À l'aide d'une formule de Taylor avec reste de Lagrange, appliquée à la fonction f en l'un des deux couples $(x, x+r)$ ou $(x, x-r)$, montrer que, pour tout élément x de I,
$$|f'(x)| \leq \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$
En déduire que
$$N_{\infty,I}(f') \leq \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

8 Développements limités polynomiaux

Définition 8.1 *Soient f, g deux fonctions définies sur des voisinages d'un point t_0 dans un espace topologique T, prenant leurs valeurs dans un même e.v.n. E. On dit que f est équivalente à g au voisinage du point t_0 si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V du point t_0 tel que, pour tout $t \in V$, on ait*
$$\|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon \|g(t)\|.$$

Définition 8.2 *Notations de Landau*
Supposons donnés un e.v.n. E, un espace topologique T et un point t_0 de T. Pour chaque fonction numérique φ, définie sur un voisinage U de t_0 et ne s'annulant pas sur $U\backslash\{t_0\}$, on désignera par $\bigcirc(\varphi)$ (resp. $\circ(\varphi)$) l'ensemble des fonctions à valeurs dans E, définies sur des voisinages de t_0 dans T, telles que le rapport $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$ soit borné dans un voisinage du point t_0 (resp. tende vers 0 quand t tend vers t_0). Plus précisément, on posera
- *$f \in \bigcirc(\varphi)$ si et seulement si il existe un voisinage V de t_0 dans T et un nombre $k \geq 0$ tels que pour tout $t \in V$ on ait $\|f(t)\| \leq k|\varphi(t)|$,*

- *$f \in \circ(\varphi)$ si et seulement si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de t_0 dans T tel que, pour tout $t \in V$, on ait $\|f(t)\| \leq \varepsilon|\varphi(t)|$.*

Définition 8.3 *Soit f une fonction, définie dans un voisinage du point t_0 de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un e.v.n. E et soit P_n un polynôme de degré $\leq n$ à coefficients dans E. On dit que P_n est un développement limité (DL) d'ordre n pour f au voisinage de t_0 si on a*

$$f(t) = P_n(t) + \circ(t - t_0)^n,$$

c'est-à-dire si le quotient $(t - t_0)^{-n}[f(t) - P_n(t)]$ tend vers zéro lorsque t tend vers t_0 et si $f(t_0) = P_n(t_0)$.

Remarque 8.1

1. Si la fonction f admet un DL d'ordre $n \geq 0$ (resp. $n \geq 1$) au voisinage de t_0 alors f est continue (resp. dérivable) au point t_0.
2. Si la fonction f est définie sur un voisinage de t_0, sauf au point t_0, et s'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que

$$\lim_{t \to t_0} (t - t_0)^{-n}[f(t) - P_n(t)] = 0 \text{ avec } n \geq 0,$$

   on peut prolonger f par continuité au point t_0 en posant $f(t_0) = P_n(t_0)$. La fonction ainsi obtenue est continue au point t_0 et vérifie les conditions de la définition précédente.

Proposition 8.1 *La formule de Taylor fournit un DL d'ordre n des fonctions usuelles au voisinage de l'origine :*

- $\exp(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \bigcirc(x^{n+1})$,
- $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \bigcirc(x^{2n+2})$,
- $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \bigcirc(x^{2n+2})$,
- $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \bigcirc(x^{n+1})$,
- $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots - \dfrac{x^n}{n} + \bigcirc(x^{n+1})$,
- $(1+x)^a = 1 + ax + \ldots + \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} x^n + \bigcirc(x^{n+1})$.

Théorème 8.1 *Théorème d'unicité*
Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage du point t_0, ce développement est unique.

Corollaire 8.1 *Si f est une fonction paire (resp. impaire) admettant un DL d'ordre n au voisinage de l'origine, ce développement ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.*

Proposition 8.2 *On a*

- $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\arcsin(x) = x + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\mathrm{Arg\ th}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\mathrm{Arg\ sh}(x) = x + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \bigcirc(x^{2n+3})$.

Exercice 14 Démontrer le théorème et le corollaire suivants :

Théorème 8.2 *Si f est définie sur un intervalle I au voisinage de 0 (donc contenant aussi 0) et admet le DL*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n)$$

en ce point, et si F est une primitive de f sur I, alors

$$F(x) - F(0) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1}).$$

Corollaire 8.2 *Si f est définie sur un intervalle I au voisinage de 0 (donc contenant aussi 0), admet le DL*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n)$$

en ce point, et si f est n fois dérivable en 0 (avec $n \geq 2$), alors f est dérivable sur un intervalle J contenant 0 et inclus dans I, et

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \circ(x^{n-1}).$$

9 L'algèbre des développements limités

On se limite au cas des fonctions numériques définies sur un voisinage de l'origine.

Proposition 9.1 *Soient f et g deux fonctions numériques admettant des DL d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de l'origine. Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent de DL d'ordre n en ce point et il en est de même de $\frac{f}{g}$ si $g(0) \neq 0$. De plus,*

1. *le DL de $f+g$ est la somme des DL de f et de g,*
2. *le DL du produit fg s'obtient en ne gardant que les termes d'ordre $\leq n$ dans le produit des DL de f et de g,*
3. *le DL du quotient $\frac{f}{g}$ est égal au DL du quotient des DL de f et de g.*

Proposition 9.2 *Soient f et g deux fonctions numériques admettant des DL d'ordre $n \geq 1$ P_n et Q_n respectivement, au voisinage de l'origine. Si $f(0) = 0$, la fonction composée $g \circ f$ admet le même DL d'ordre n que le polynôme $Q_n \circ P_n$. On obtient donc ce développement en ne conservant, dans $Q_n \circ P_n$, que les termes d'ordre $\leq n$.*

Exercice 15 Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \to & \left]-\frac{1}{e};+\infty\right[\\ x & \mapsto & x\exp(x) \end{array}$

Montrer que f est bijective, et que f et f^{-1} sont de classe C^1 sur leurs ensembles de définition. Déterminer un DL d'ordre 3 en 0 de f^{-1} et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

Exercice 16 Calculer les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

(a) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ $(n=3)$ (b) $\mathrm{Arg\,ch}\sqrt{2+x^2}$ $(n=4)$ (c) $\ln\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$ $(n=5)$

(d) $(1-\cos x)^5$ $(n=13)$ (e) $\frac{\ln(\mathrm{ch} x)}{\cos x}$ $(n=5)$ (f) $\tan x$ en $\frac{\pi}{4}$ $(n=3)$.

Exercice 17 Soit f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2} \times \arcsin x$. On veut connaître le DL à l'ordre 5 en 0 de f par deux méthodes.

1. Première méthode.
   (a) Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{-1/2}$.
   (b) En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de $(1-x^2)^{-1/2}$.
   (c) En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de $\arcsin x$.
   (d) En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de f.
2. Deuxième méthode.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Trouver $a(x)$ tel que $f'(x) + a(x)f(x) = 1$.
   (c) Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de a.
   (d) En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de f.
   (e) En déduire la limite de la suite (u_n) donnée par $u_n = n^5\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}\right)$.

10 Développements asymptotiques

Définition 10.1 *Soit $\mathcal{E}_{t_0}$ un ensemble de fonctions numériques définies au voisinage de t_0 et non équivalentes à zéro. On dit que $\mathcal{E}_{t_0}$ constitue une échelle de comparaison au voisinage de t_0 si $\mathcal{E}_{t_0}$ est totalement ordonné par la relation ($f = \circ(g)$ ou $f = g$) notée $f \preccurlyeq g$. En d'autres termes $\mathcal{E}_{t_0}$ constitue une échelle de comparaison si, quelles que soient les fonctions $f, g \in \mathcal{E}_{t_0}$ ($f \neq g$), l'une des relations $f = \circ(g)$, $g = \circ(f)$ est vraie.*

Définition 10.2 *Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un point t_0 de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $\mathcal{E}$ une échelle de comparaison au voisinage de t_0. On dit que f admet un développement asymptotique (ou limité) par rapport à $\mathcal{E}$, à la précision φ (où $\varphi \in \mathcal{E}$) s'il existe une famille de nombres réels $(\lambda_\psi)_{\psi \in \mathcal{E}}$ presque tous nuls, c'est-à-dire nuls sauf en un nombre fini d'entre eux, vérifiant*

$$f(x) = \sum_{\psi \in \mathcal{E}, \psi \succcurlyeq \varphi} \lambda_\psi \psi(x) + \circ(\varphi).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 18}}$ Pour $n > 3$, on note x_n la plus petite racine positive de l'équation $\exp(x) = x^n$. Étudier la suite (x_n) puis déterminer un développement asymptotique à l'ordre 3 de x^n suivant les puissances de $\frac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini.

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{ch}\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{th}\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\mathrm{argth}\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{argsh}\ x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Références

[1] Arnaud BODIN. *Dérivabilité.*
http ://math.univ-lille1.fr/∼bodin/exo4/selcor/selcor13.pdf

[2] Antoine CRISTOFARI. *Fonctions de la variable réelle, étude locale.*
http ://cristofari.pagesperso-orange.fr/PDF/Feuilles/Feuille1.pdf

[3] Dominique HOAREAU. *Fonction continue contre Fonction dérivée.*
http ://megamaths.perso.neuf.fr/domi/Foncderi.pdf

[4] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition.*

[5] CAPES de Mathématiques 2002. *1ère composition.*

[6] Exercices collection EXO7. *Fonctions dérivables.*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00013.pdf