Master 1 Métiers de l'Enseignement, Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2012/2013

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 4 - Séries numériques.

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour toute famille finie $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E, la somme $\sum_{i\in I} u_i$ a un sens et nous savons que cette somme possède les propriétés d'associativité et commutativité généralisées. On se propose alors de donner un sens à une expression de la forme $\sum_{i\in I} u_i$ lorsque l'ensemble des indices I est infini.

1 Séries : propriétés générales

E désigne dans cette section un e.v.n sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et la norme d'un élément x de E sera notée $\|x\|$.

Définition 1.1 *Soit (u_n) une suite d'éléments de E et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite. On dit que la série de terme général u_n est convergente si la suite (S_n) a une limite dans E. La limite $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est alors appelée somme de la série $\sum_n u_n$ et désignée par $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.*
Si la suite (S_n) n'a pas de limite, on dit que la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Inversement, si (S_n) est une suite donnée d'éléments de E, on peut lui associer la série dont le terme général u_n est défini par : u_0 et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Propriété 1.1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de E. Si ces deux suites ne diffèrent que par un nombre fini de termes, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature, c'est-à-dire simultanément convergentes ou divergentes. En d'autres termes, on ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes.*

Propriété 1.2 *Pour qu'une série converge, il est nécessaire mais non suffisant, que son terme général tende vers zéro.*

Exemple 1.1 Soit dans $\mathbb{R}$, la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Son terme général tend vers zéro mais la suite $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sqrt{n+1}$ tend vers $+\infty$. Cette série est donc divergente.

Propriété 1.3 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de E telles que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ soient convergentes. Alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Propriété 1.4 *Soit E un e.v.n. sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit (u_n) une suite d'éléments de E telle que la série $\sum_n u_n$ converge. Alors, pour tout $\lambda \in K$, la série $\sum \lambda u_n$ est convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Théorème 1.1 Critère de Cauchy.
Soit (u_n) une suite d'éléments de E. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit convergente, il faut qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$, on puisse associer un entier N_ε tel que les inégalités $p > n \geq N_\varepsilon$ entraînent :

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right\| = \|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_p\| \leq \varepsilon$$

et cette condition est suffisante lorsque E est complet.

Propriété 1.5 *Soit (u_n) une suite d'éléments d'un e.v.n. quelconque E. Pour que la série $\sum_n u_n$ vérifie la condition de Cauchy, il suffit que la série numérique (à termes positifs) $\sum_n \|u_n\|$ la vérifie*

Définition 1.2 *Soit (u_n) une suite d'éléments d'un e.v.n. E. On dit que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente si la série des normes $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

Propriété 1.6 *Dans un e.v.n. complet, toute série absolument convergente est convergente.*

Exercice 1 *Théorème des gendarmes pour les séries.*
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour chaque $n \geq 0$. On suppose que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ sont convergentes. Démontrer que la série $\sum_n v_n$ est convergente.

Correction : Une bonne justification peut se faire à l'aide du critère de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\sum_n u_n$ converge, il existe un entier N_1 tel que, pour tous $q \geq p \geq N_1$, on a

$$\left|\sum_{n=p}^{q} u_n\right| \leq \varepsilon$$

De même, puisque la série $\sum_n w_n$ converge, il existe un entier N_2 tel que, pour tous $q \geq p \geq N_2$, on a

$$\left|\sum_{n=p}^{q} w_n\right| \leq \varepsilon.$$

Prenons $N = \max(N_1, N_2)$ et $q \geq p \geq N$. De l'inégalité

$$\sum_{n=p}^{q} u_n \leq \sum_{n=p}^{q} v_n \leq \sum_{n=p}^{q} w_n,$$

on tire

$$\left|\sum_{n=p}^{q} v_n\right| \leq \max\left(\left|\sum_{n=p}^{q} u_n\right|, \left|\sum_{n=p}^{q} w_n\right|\right) \leq \varepsilon$$

(on a utilisé l'implication $x \leq y \leq z \Rightarrow |y| \leq \max(|x|, |z|)$). Ceci prouve bien, par le critère de Cauchy, la convergence de $\sum_n v_n$.

2 Séries à termes positifs et séries absolument convergentes

Propriété 2.1 *Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit convergente, il faut et il suffit que la suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ soit majorée.*
La somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est alors égale à la borne supérieure des nombres S_n : on a donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout majorant des S_n est un majorant de S.

Propriété 2.2 *Critère de comparaison*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres positifs vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum_n v_n$ converge, il en est de même de $\sum_n u_n$.
Si l'inégalité $u_n \leq v_n$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a de plus, l'inégalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Enfin, si la série $\sum_n u_n$ diverge, il en est de même de $\sum_n v_n$.

Propriété 2.3 *Critère d'équivalence*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres positifs telles que le rapport u_n/v_n soit défini pour n assez grand et admette un limite finie k lorsque n tend vers $+\infty$. Alors la convergence de $\sum_n v_n$ entraîne celle de $\sum_n u_n$. Si $k \neq 0$, les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.
En particulier, si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres positifs telles que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tende vers 1, alors les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Propriété 2.4 *Soit (u_n) une suite d'éléments d'un e.v.n. E. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit absolument convergente, il suffit qu'il existe une série convergente à termes positifs, soit $\sum_n v_n$, et un nombre $k \geq 0$ vérifiant $\|u_n\| \leq kv_n$ pour n assez grand.*

Propriété 2.5 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels ou complexes telles que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ soient absolument convergentes et pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons*

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est absolument convergente et on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ *Inégalité de Carleman.*
Soit (a_n) une suite à termes positifs tels que $\sum_n a_n$ converge.

1. Prouver que la série de terme général $\dfrac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n(n+1)}$ converge et est de même somme que la série de terme général a_n.
2. Montrer l'inégalité $\dfrac{1}{(n!)^{1/n}} \leq \dfrac{e}{n+1}$.
3. En conclure que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \ldots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

<u>*Correction :*</u>

1. On transforme la N-ième somme partielle associée à la série de terme général $\dfrac{a_1 + \ldots + na_n}{n(n+1)}$ de la façon suivante :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 + \ldots + na_n}{n(n+1)} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=j}^{N} \frac{ja_j}{n(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} ja_j \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{N+1}\right) = \sum_{j=1}^{N} a_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{j}{N+1} a_j.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N_0 tel que, pour tout $q \geq p \geq N_0$, on ait

$$0 \leq \sum_{j=p}^{q} a_j \leq \varepsilon.$$

En particulier, en notant $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pour $N \geq N_0$, on a

$$0 \leq S - \sum_{n=1}^{N} a_n \leq \varepsilon.$$

D'autre part, pour $N \geq N_0$,

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{j}{N+1}a_j=\sum_{j=1}^{N_0}\frac{j}{N+1}a_j+\sum_{j=N_0+1}^{N}\frac{j}{N+1}a_j\leq\frac{N_0}{N+1}S+\sum_{j=N_0+1}^{N}a_j\leq 2\varepsilon$$

dès que N est assez grand (disons $\frac{N_0}{N+1}S\leq\varepsilon$). En regroupant toutes ces informations et en utilisant l'inégalité triangulaire, on conclut que si N est assez grand, alors

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+\ldots+na_n}{n(n+1)}-S\right|\leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve le résultat.

2. Posons $u_n=\left(\frac{n+1}{e}\right)^n\times\frac{1}{n!}$. Puisque $u_0=1$, il suffit de démontrer que la suite (u_n) est décroissante. Pour cela, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+1}\times\frac{1}{(n+1)!}\times\left(\frac{e}{n+1}\right)^n\times n!=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\times\frac{1}{e}=\exp\left((n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)\times\frac{1}{e}.$$
Maintenant, $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\leq\frac{1}{n+1}$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$.
3. Nous avons $(a_1\ldots a_n)^{1/n}=\frac{(a_1 2a_2\ldots na_n)^{1/n}}{(n!)^{1/n}}$, et d'après l'inégalité arithmético-géométrique (pour n réels strictement positifs $x_1,\ldots,x_n$, on a $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\leq\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$) et le résultat de la question précédente :
$$(a_1\ldots a_n)^{1/n}\leq\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n(n!)^{1/n}}\leq e\frac{a_1+\ldots+na_n}{n(n+1)}.$$
Il suffit alors d'appliquer le résultat de la première question.

Exercice 3 Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n=\frac{u_n}{1+u_n}$

1. Prouver que la fonction $x\mapsto\frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$.
2. Démontrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Correction :

1. Il suffit d'étudier la fonction. Sa dérivée est $x\mapsto 1/(1+x)^2\geq 0$, donc la fonction est croissante.
2. On distingue deux cas :
   - Si (u_n) tend vers 0, alors $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$, et ces deux suites sont positives. Par le critère d'équivalence, on en déduit que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont la même nature.
   - Si (u_n) ne tend pas vers 0 (ce qui implique que $\sum_n u_n$ diverge car CN), alors, il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $n\geq N$ tel que $u_n\geq\varepsilon$ (rappelons que $u_n\geq 0$). Mais alors, d'après la première question, on a $v_n\geq\varepsilon/(1+\varepsilon)>0$, et donc la suite (v_n) ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_n v_n$ est aussi divergente, et dans ce cas, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont bien la même nature.

3 Exemples de séries à termes positifs, étude des séries de Riemann

Propriété 3.1 Règle $n^\alpha u_n$.
Pour qu'une série $\sum_n u_n$ à termes réels positifs soit convergente, il suffit qu'il existe un réel $\alpha>1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit majorée. Pour qu'elle soit divergente, il suffit qu'il existe un nombre $k>0$ tel que l'on ait, à partir d'un certain rang, $nu_n\geq k$.

On en déduit que

– la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ est convergente pour $\alpha>1$ et divergente pour $\alpha\leq 1$

– la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^z}$ est absolument convergente pour $x=\Re(z)>1$.

Exercice 4 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
Montrer que $u_n = \bigcirc(v_n)$.
2. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1.$$
Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que $\sum_n u_n$ converge.

Correction :

1. Via télescopage, pour tout $n > N$: $0 < u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$ donc $u_n = \bigcirc(v_n)$.
2. Soit $1 < \beta < \alpha$ et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Alors
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$
À partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ donc $u_n = \bigcirc(v_n)$ or $\sum_n v_n$ converge absolument donc $\sum_n u_n$ aussi.

Exercice 5 *Séries de Bertrand.*

Étudier, suivant la valeur de α et β, la convergence des séries suivantes :
$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}.$$

Correction : On sépare trois cas suivant les valeurs de α :

- $1 < \alpha$. On fixe γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montre que :
$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta} = 0.$$
Cela signifie qu'à partir d'un cerain rang, $\frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta} \leq \frac{1}{n^\gamma}$. Par comparaison à la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$, la série est convergente.
- $\alpha < 1$. On fixe γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montre que :
$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta} = +\infty.$$
Cela signifie qu'à partir d'un cerain rang, $\frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta} \geq \frac{1}{n^\gamma}$. Par comparaison à la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$, la série est divergente.
- $\alpha = 1$.
  - Remarquons d'abord que si $\beta < 0$, la série est divergente car son terme général est supérieur à $1/n$.
  - Si $\beta \geq 0$, la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ sur $[2, +\infty[$ nous autorise à comparer à une intégrale.
  On a, par les encadrements classiques pour $k \geq 3$:
  $$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}.$$
  On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :
  $$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}.$$
  Il faut maintenant intégrer la fonction.
  $\star$ Si $\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1$, on trouve :
  $$\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln(n+1)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(3)^{\beta-1}}\right) \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \leq \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln(n)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(2)^{\beta-1}}\right).$$
  . Pour $\beta < 1$, le terme de gauche (ainsi que celui de droite) tend vers $+\infty$, et la série est divergente.

. Pour $\beta > 1$, le terme de droite tend vers une limite finie, et la série est convergente (une série à terme positif est convergente si, et seulement si, elle est majorée).

$\star$ Si $\beta = 1$, la fonction s'intègre en $\ln(\ln(x))$, et le terme à droite de l'inégalité tend là encore vers $+\infty$. La série est divergente.

$\star$ Si $\beta = 0$, on travaille avec une série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n}$ donc divergente.

4 Règles de Cauchy, d'Alembert, Duhamel

Propriété 4.1 *Soit (u_n) une suite de nombres complexes. Si pour n assez grand on a $|u_n| \leq k^n$ avec $k < 1$ alors la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est absolument convergente.*

Pour savoir s'il existe un nombre k vérifiant l'inégalité $|u_n| \leq k^n$, l'idée la plus naturelle est d'étudier la suite $(|u_n|^{1/n})$ qui conduit à la règle de Cauchy. Un autre procédé consiste à étudier la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, qui conduit à la règle de d'Alembert. Enfin, un étude plus poussée de la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ conduit à la règle de Duhamel.

Propriété 4.2 Règle de Cauchy.
Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes, et soit :

$$L = \lim_{n\to\infty} \sup |u_n|^{1/n} \ (0 \leq L \leq +\infty).$$

Si $L < 1$, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est absolument convergente.

Si $L > 1$, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est divergente, car son terme général ne tend pas vers zéro.

En particulier, si la suite $(|u_n|^{1/n})$ a une limite L (finie ou infinie) lorsque n tend vers $+\infty$ et si $L < 1$ (resp. $L > 1$), la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est convergente (resp divergente).

Propriété 4.3 Règle de d'Alembert.
Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes telle que la suite $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ soit définie pour n assez grand, et admette une limite L, finie ou infinie $(0 \leq L \leq +\infty)$.

Si $L < 1$, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est absolument convergente.

Si $L > 1$, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est divergente car son terme général ne tend pas vers zéro.

Propriété 4.4 *Si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tend vers L dans $\overline{\mathbb{R}}$ $(0 \leq L \leq +\infty)$ alors la suite $(u_n)^{1/n}$ tend aussi vers L.*

Propriété 4.5 Règle de Duhamel.
Soit (u_n) une suite de nombres positifs satisfaisant à

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \ (\beta = \text{cste}).$$

Si $\beta > 1$, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est convergente.

Si $\beta < 1$, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 6 *Quelques convergences.*

Étudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_n u_n$ suivantes :

1. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$	2. $u_n = \frac{n^n}{2^n}$
3. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$	4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $u_n = 1-\cos\frac{\pi}{n}$	6. $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
7. $u_n = a^n n!,\ a\in\mathbb{R}$	8. $u_n = n\exp(-\sqrt{n})$
9. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$	10. $u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$.

Correction :

1. On a $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, la série est donc divergente.
2. Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et la série est divergente. (On pouvait aussi appliquer le critère de d'Alembert.)
3. On a : $n^2u_n = \exp(2\ln(n) - \sqrt{n}\ln(2)) = \exp\left(-\sqrt{n}(\ln(2) - 2\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}})\right)$. Il résulte de $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$, et par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.
4. Puisque $\ln(1+x)\underset{0}{\sim} x$, on obtient $u_n \underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, et la série est donc divergente.
5. En utilisant le développement limité du cosinus, ou l'équivalent $1-\cos x\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{2}$, on voit que : $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{2n^2}$, et la série est convergente.
6. On a $(-1)^n + n\underset{+\infty}{\sim} n$ et $n^2+1\underset{+\infty}{\sim} n^2$, donc $\frac{(-1)^n+n}{n^2+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum\limits_n u_n$ est divergente.
7. Par croissance comparée des suites géométriques et la suite factorielle, le terme général ne tend pas vers 0, sauf si $a=0$. La série $\sum\limits_n u_n$ est donc convergente si et seulement si $a=0$.
8. On écrit tout sous forme exponentielle : $n\exp(-\sqrt{n}) = \exp(\ln(n)-\sqrt{n})$. On a alors $\frac{\exp(\ln(n)-\sqrt{n})}{\exp(-2\ln(n))} = \exp(3\ln(n)-\sqrt{n})\underset{+\infty}{\to} 0$ et donc $n\exp-\sqrt{n} = \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série est convergente.
9. On écrit simplement $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{n^2}$. La série est donc convergente.
10. On vérifie aisément que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{2\ln(n)}{(4/\sqrt{2})^n}$. Puisque $4/\sqrt{2} > 2$, on obtient $u_n\underset{+\infty}{=}\circ\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et donc la série est convergente.

Exercice 7 *Cas limite de la règle de d'Alembert.*

Soit, pour $n\geq 1$ et $a>0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_n u_n$ lorsque $a\neq e$.
2. Lorsque $a=e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n\geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Correction :

1. Cette série est bien adaptée à l'utilisation du critère de d'Alembert. On calcule donc
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{a^n n!} = a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = a\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = a\exp\left(-n\times\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$
On obtient donc que u_{n+1}/u_n converge vers a/e. Par application de la règle de d'Alembert, si $a>e$, la série est divergente. Si $a<e$, la série est convergente. Le cas $a=e$ est un cas limite où le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure directement.
2. On pousse un peu plus loin le développement précédent. On obtient
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\times\exp\left(-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e.\exp\left(-1+\frac{1}{2n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\geq e.\exp(-1).$$

En particulier, pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, et donc la suite (u_n) est croissante. Elle ne converge donc pas vers zéro, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 8 *Cas limite de la règle de d'Alembert.*

1. Soit, pour tout entier $n \geq 1$,
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}.$$
Quelle est la limite de u_{n+1}/u_n ? Montrer que la série de terme général nu_n est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
2. Soit, pour tout entier $n \geq 2$,
$$v_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}.$$
Quelle est la limite de v_{n+1}/v_n ? Montrer que, si $0 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$. En déduire que la série de terme général v_n converge.

Correction :

1. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{2n+2}$. La suite u_{n+1}/u_n converge donc vers 1. En outre, on a :
$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{2n+1}{2n} \geq 1.$$
Par conséquent, la suite nu_n est croissante, et comme u_n est positive, on a :
$$nu_n \geq u_1 \Rightarrow u_n \geq \frac{u_1}{n}.$$
La série de terme général (u_n) est divergente (minorée par une série divergente).
2. - On a de même $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2n-1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. D'autre part, un calcul immédiat montre que :
$$\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right).$$
Effectuons un développement limité de cette quantité au voisinage de $+\infty$ afin d'obtenir la position par rapport à 1. On a :
$$\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right) = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{3}{2n+2}\right)$$
$$= 1 - \frac{3}{2n+2} + \frac{\alpha}{n} - \frac{3\alpha}{n(2n+2)} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{3n+2\alpha n + 2\alpha}{n(2n+2)} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2\alpha-3}{2n+2} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$
Pour n assez grand, $\dfrac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n}$ a le signe de $\dfrac{2\alpha-3}{2n+2}$, qui est négatif puisqu'on a supposé $\alpha < 3/2$.
- Soit n_0 un rang à partir duquel l'inégalité est vraie. On a, pour $n > n_0$:
$$\frac{v_{n+1}}{v_{n_0}} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{v_n}{v_{n-1}} \ldots \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \leq \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha} \ldots \frac{n_0^\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$
On a donc obtenu :
$$0 \leq v_{n+1} \leq v_{n_0}\frac{n_0^\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$
Prenons maintenant $\alpha \in]1, 3/2[$. Par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général (v_n) converge. On vient donc de voir deux phénomènes très différents de ce qui peut se passer dans le cas limite de la règle de d'Alembert. Le second résultat est un cas particulier de ce que l'on appelle la règle de Raabe-Duhamel.

Exercice 9 *Règle de Raabe-Duhamel.*

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1, a[$ et posons $v_n = \dfrac{1}{n^b}$. Comparer u_n et v_n. En déduire que $\sum_n u_n$ converge si $a > 1$.

2. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les séries de Bertrand, montrer que le cas $a = 1$ est « douteux ».
4. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \bigcirc\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $v_n = \ln(nu_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Montrer que $w_n = \bigcirc\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum_n u_n$ est divergente.

Correction :

1. Supposons d'abord $a > 1$, et prenons $b \in]1, a[$. Posons aussi $v_n = \frac{1}{n^b}$. Alors on a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^b}{(n+1)^b} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} = 1 - \frac{b}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$
Ainsi, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
On montre aisément par récurrence sur n que, pour $n \geq n_0$, $u_n \leq Cv_n$ avec $C = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$. Par comparaison (les séries sont à termes positifs), la série de terme général u_n converge puisque la série de terme général v_n converge.
2. Dans le cas où $a < 1$, on procède de même en choisissant cette fois $b \in]a, 1[$. On trouve alors que, pour n assez grand, $u_n \geq Cv_n$. Puisque la série de terme général v_n diverge (cette fois, $b < 1$), la série de terme général u_n diverge.
3. Posons $u_n = \frac{1}{n(\ln(n))^b}$ dont on rappelle qu'il est le terme général d'une série convergente si et seulement si $b > 1$. Alors,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^b = \left(1 - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n) + \ln(1+1/n)}\right)^b.$$
Or,
$$\frac{\ln(n)}{\ln(n) + \ln(1+1/n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n) + \bigcirc(1/n)} = \frac{1}{1 + \bigcirc(1/n\ln(n))} = \bigcirc\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right).$$
Effectuant le produit des deux développements limités, on trouve qu'au premier ordre,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$
Ce résultat ne nous permet pas de conclure, alors que la série de terme général u_n est parfois convergente, parfois divergente. Le cas $a = 1$ est bien un cas limite.
4. (a) On a
$$w_n = \ln\left(\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \bigcirc\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \bigcirc\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   (b) La question précédente prouve que la série de terme général w_n converge. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} w_k \underset{n\to+\infty}{\to} C$. Mais $\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln(nu_n) - \ln(u_1)$. On en déduit que la suite $(\ln(nu_n))$ converge vers un réel. Passant à l'exponentielle, on en déduit qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda$ c'est-à-dire $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$. Ainsi, par comparaison, la série de terme général u_n diverge.

5 Exemples de séries semi-convergentes

Définition 5.1 *Une série est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Définition 5.2 *On appelle série alternée une série numérique dont le terme général u_n est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ où (v_n) désigne une suite décroissante de nombres positifs convergeant vers zéro.*

Théorème 5.1 *Toute série alternée $\sum_n u_n$ est convergente, et si on pose*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

sa somme $S = \sum_{n=0}^{\infty}$ *vérifie :* $S_{2p+1} \le S \le S_{2p}$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.
De façon plus précise, les sommes S_{2p} *d'indice pair tendent en décroissant vers* S*, tandis que les sommes* S_{2p+1} *d'indice impair, tendent en croissant vers* S.

Propriété 5.1 Règle d'Abel.
Soient (v_n) *une suite de nombres réels ou complexes telle que la suite*

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

soit bornée et (ε_n) *une suite de nombres positifs, décroissante et tendant vers zéro. Alors la série* $\sum \varepsilon_n v_n$ *est convergente.*

Propriété 5.2 *Soit* (ε_n) *une suite décroissante de nombres positifs, tendant vers zéro. Quel que soit le nombre réel* α *tel que* $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Z}$*, la série* $\sum \varepsilon_n \exp(in\alpha)$ *est convergente.*

Exercice 10 *Séries semi-convergentes et produit de Cauchy.*

Soit, pour $n \ge 0$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. Vérifier que $\sum_n u_n$ est semi-convergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum_n u_n$ par $\sum_n u_n$ ne converge pas.
3. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\sigma(3p) = 2p$, $\sigma(3p+1) = 4p+1$, $\sigma(3p+2) = 4p+3$. Vérifier que σ est une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$?

Correction :

1. La convergence de $\sum_n u_n$ se démontre par une simple application du critère des séries alternées. La série ne converge pas absolument, par application du critère de Riemann.
2. Le terme général de la série produit de Cauchy est donné par :
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$
Soit $u(x) = (x+1)(n+1-x)$. Sa dérivée est $u'(x) = n - 2x$. Une étude rapide montre donc que sur $[0,n]$, u atteint son maximum en $n/2$. On obtient donc
$$|v_n| \ge (n+1) \times \frac{1}{\sqrt{(n/2+1)(n/2+1)}} \ge C > 0.$$
Ainsi, v_n ne tend pas vers 0 et le produit de Cauchy de ces deux séries ne converge pas.
3. - Il est d'abord clair que σ est une bijection de $\mathbb{N}$. En effet, tout nombre est ou bien pair, et donc de la forme $2p$, ou bien impair, et ce sous cas se divise en « congru à 1 modulo 4 » ou « congru 3 modulo 4 ».
-Posons
$$w_n = u_{\sigma(3n)} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+2}} - \frac{1}{\sqrt{4n+4}},$$
de sorte que $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ avec $C < 0$. Ainsi, la série de terme général w_n diverge. Or,
$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{3N} u_{\sigma(n)}.$$
La série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est donc aussi divergente.

6 Calculs approchés de la somme d'une série

Définition 6.1 *Dans un e.v.n. quelconque E, soient (u_n) une suite telle que la série $\sum_n u_n$ soit convergente et*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \; S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n de cette série est :

$$R_n = S - S_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p.$$

Propriété 6.1 *Soit f une fonction numérique définie sur la demi-droite réelle $x \geq a$, positive, décroissante et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Alors la série $\sum_n f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont simultanément convergentes ou divergentes.*

Propriété 6.2 *Soit f une fonction numérique définie sur la demi-droite réelle $x \geq a$, positive, décroissante et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Supposons de plus que la série $\sum_n f(n)$ soit convergente. Alors le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ vérifie la double inégalité*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx.$$

Exercice 11

1. Justifier la convergence de la série numérique $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

   On pose
   $$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

2. Montrer que
   $$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$
   Déterminer un équivalent de R_n au voisinage de $+\infty$.

3. Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} R_n$.

Correction :

1. On applique le critère spécial.
2. Par décalage d'indice sur la deuxième somme
   $$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$
   Puisque $R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, on a $2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$. Or, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \bigcirc\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$.
3. Comme $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \bigcirc\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum_{n \geq 1} R_n$ est convergente.

Exercice 12 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ à 10^{-3} près.

Correction : La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par équivalence avec une série géométrique. On a $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2^k}$ qui est le terme général d'une série convergente, et donc : $0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant$

$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$. Il suffit donc de chercher n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$, c'est-à-dire $2^n \geqslant 10^3$ ou enfin $n \geqslant \dfrac{3\ln 10}{\ln 2} \simeq 9,97$ Donc $n = 10$ convient, $\displaystyle\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{2^n+1}$ est une valeur approchée à 10^{-3} près de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1}$. Il suffit donc de calculer cette somme.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ On cherche $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ à 10^{-3} près.

Correction : La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par comparaison avec une intégrale généralisée. En effet, f définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ est positive, décroissante et d'intégrale convergente à l'infini. On a $0 \leqslant u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ et donc $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{1+t^2} dt \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{n}$. Il suffit donc de chercher n tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant 10^{-3}$, c'est-à-dire $n \geqslant 1000$. Donc $n = 100$ convient, $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n^2+1}$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Il suffit donc de calculer cette somme.

Références

[1] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition .*

[2] Jean-Etienne ROMBALDI. *Séries réelles ou complexes.*
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼rombaldi/Capes/AnalyseChap6.pdf

[3] Exercices collection BIBMATH. *Exercices - Suites - Études pratiques.*
http ://www.bibmath.net/exercices/bde/analyse/suitesseries/serieeno.pdf