*Master 1 Métiers de l'Enseignement, Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2012/2013*

ANALYSE 2

**Fiche de Mathématiques 4 -** Séries numériques.

Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour toute famille finie $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $E$, la somme $\sum_{i\in I} u_i$ a un sens et nous savons que cette somme possède les propriétés d'associativité et commutativité généralisées. On se propose alors de donner un sens à une expression de la forme $\sum_{i\in I} u_i$ lorsque l'ensemble des indices $I$ est infini.

# 1 Séries : propriétés générales

$E$ désigne dans cette section un e.v.n sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et la norme d'un élément $x$ de $E$ sera notée $\|x\|$.

**Définition 1.1** *Soit $(u_n)$ une suite d'éléments de $E$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite. On dit que la série de terme général $u_n$ est convergente si la suite $(S_n)$ a une limite dans $E$. La limite $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est alors appelée somme de la série $\sum_n u_n$ et désignée par $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.*
*Si la suite $(S_n)$ n'a pas de limite, on dit que la série $\sum_n u_n$ est divergente.*

Inversement, si $(S_n)$ est une suite donnée d'éléments de $E$, on peut lui associer la série dont le terme général $u_n$ est défini par : $u_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

**Propriété 1.1** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites d'éléments de $E$. Si ces deux suites ne diffèrent que par un nombre fini de termes, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature, c'est-à-dire simultanément convergentes ou divergentes. En d'autres termes, on ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes.*

**Propriété 1.2** *Pour qu'une série converge, il est nécessaire mais non suffisant, que son terme général tende vers zéro.*

**Exemple 1.1** Soit dans $\mathbb{R}$, la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Son terme général tend vers zéro mais la suite $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sqrt{n+1}$ tend vers $+\infty$. Cette série est donc divergente.

**Propriété 1.3** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites d'éléments de $E$ telles que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ soient convergentes. Alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

**Propriété 1.4** *Soit $E$ un e.v.n. sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $(u_n)$ une suite d'éléments de $E$ telle que la série $\sum_n u_n$ converge. Alors, pour tout $\lambda \in K$, la série $\sum \lambda u_n$ est convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

**Théorème 1.1 Critère de Cauchy**.
*Soit $(u_n)$ une suite d'éléments de $E$. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit convergente, il faut qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$, on puisse associer un entier $N_\varepsilon$ tel que les inégalités $p > n \geq N_\varepsilon$ entraînent :*

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right\| = \|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_p\| \leq \varepsilon$$

*et cette condition est suffisante lorsque $E$ est complet.*

**Propriété 1.5** *Soit $(u_n)$ une suite d'éléments d'un e.v.n. quelconque $E$. Pour que la série $\sum_n u_n$ vérifie la condition de Cauchy, il suffit que la série numérique (à termes positifs) $\sum_n \|u_n\|$ la vérifie*

**Définition 1.2** *Soit $(u_n)$ une suite d'éléments d'un e.v.n. $E$. On dit que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente si la série des normes $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

**Propriété 1.6** *Dans un e.v.n. complet, toute série absolument convergente est convergente.*

**Exercice 1** *Théorème des gendarmes pour les séries.*
Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour chaque $n \geq 0$. On suppose que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ sont convergentes. Démontrer que la série $\sum_n v_n$ est convergente.

## 2 Séries à termes positifs et séries absolument convergentes

**Propriété 2.1** *Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels positifs. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit convergente, il faut et il suffit que la suite $(S_n)$ définie par $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ soit majorée.*
*La somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est alors égale à la borne supérieure des nombres $S_n$ : on a donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout majorant des $S_n$ est un majorant de $S$.*

**Propriété 2.2** *Critère de comparaison*
*Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de nombres positifs vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum_n v_n$ converge, il en est de même de $\sum_n u_n$.*
*Si l'inégalité $u_n \leq v_n$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a de plus, l'inégalité :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

*Enfin, si la série $\sum_n u_n$ diverge, il en est de même de $\sum_n v_n$.*

**Propriété 2.3** *Critère d'équivalence*
*Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de nombres positifs telles que le rapport $u_n/v_n$ soit défini pour $n$ assez grand et admette un limite finie $k$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Alors la convergence de $\sum_n v_n$ entraîne celle de $\sum_n u_n$. Si $k \neq 0$, les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.*
*En particulier, si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites de nombres positifs telles que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tende vers 1, alors les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.*

**Propriété 2.4** *Soit $(u_n)$ une suite d'éléments d'un e.v.n. $E$. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit absolument convergente, il suffit qu'il existe une série convergente à termes positifs, soit $\sum_n v_n$, et un nombre $k \geq 0$ vérifiant $\|u_n\| \leq kv_n$ pour $n$ assez grand.*

**Propriété 2.5** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de nombres réels ou complexes telles que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ soient absolument convergentes et pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons*

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0.$$

*Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est absolument convergente et on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

**Exercice 2** *Inégalité de Carleman.*

Soit $(a_n)$ une suite à termes positifs tels que $\sum_n a_n$ converge.

1. Prouver que la série de terme général $\dfrac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n(n+1)}$ converge et est de même somme que la série de terme général $a_n$.
2. Montrer l'inégalité $\dfrac{1}{(n!)^{1/n}} \leq \dfrac{e}{n+1}$.
3. En conclure que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \ldots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

**Exercice 3** Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

1. Prouver que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Démontrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

# 3 Exemples de séries à termes positifs, étude des séries de Riemann

**Propriété 3.1 Règle $n^\alpha u_n$.**
*Pour qu'une série $\sum_n u_n$ à termes réels positifs soit convergente, il suffit qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit majorée. Pour qu'elle soit divergente, il suffit qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que l'on ait, à partir d'un certain rang, $nu_n \geq k$.*

On en déduit que

- la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$
- la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^z}$ est absolument convergente pour $x = \Re(z) > 1$.

**Exercice 4** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n = \bigcirc(v_n)$.

2. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1.$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que $\sum_n u_n$ converge.

**Exercice 5** *Séries de Bertrand.*

Étudier, suivant la valeur de $\alpha$ et $\beta$, la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}.$$

# 4 Règles de Cauchy, d'Alembert, Duhamel

**Propriété 4.1** *Soit $(u_n)$ une suite de nombres complexes. Si pour $n$ assez grand on a $|u_n| \leq k^n$ avec $k < 1$ alors la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente.*

Pour savoir s'il existe un nombre $k$ vérifiant l'inégalité $|u_n| \leq k^n$, l'idée la plus naturelle est d'étudier la suite $(|u_n|^{1/n})$ qui conduit à la règle de Cauchy. Un autre procédé consiste à étudier la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, qui conduit à la règle de d'Alembert. Enfin, un étude plus poussée de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ conduit à la règle de Duhamel.

**Propriété 4.2 Règle de Cauchy.**
*Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels ou complexes, et soit :*

$$L = \lim_{n\to\infty} \sup |u_n|^{1/n} \quad (0 \leq L \leq +\infty).$$

*Si $L < 1$, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente.*
*Si $L > 1$, la série $\sum_n u_n$ est divergente, car son terme général ne tend pas vers zéro.*

En particulier, si la suite $(|u_n|^{1/n})$ a une limite $L$ (finie ou infinie) lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et si $L < 1$ (resp. $L > 1$), la série $\sum_n u_n$ est convergente (resp divergente).

**Propriété 4.3 Règle de d'Alembert.**
*Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels ou complexes telle que la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ soit définie pour $n$ assez grand, et admette une limite $L$, finie ou infinie $(0 \leq L \leq +\infty)$.*
*Si $L < 1$, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente.*
*Si $L > 1$, la série $\sum_n u_n$ est divergente car son terme général ne tend pas vers zéro.*

**Propriété 4.4** *Si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tend vers $L$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ $(0 \leq L \leq +\infty)$ alors la suite $(u_n)^{1/n}$ tend aussi vers $L$.*

**Propriété 4.5 Règle de Duhamel.**
*Soit $(u_n)$ une suite de nombres positifs satisfaisant à*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\beta = \text{cste}).$$

*Si $\beta > 1$, la série $\sum_n u_n$ est convergente.*
*Si $\beta < 1$, la série $\sum_n u_n$ est divergente.*

**Exercice 6** *Quelques convergences.*
Étudier la convergence des séries $\sum_n u_n$ suivantes :

| | |
|---|---|
| 1. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ | 2. $u_n = \frac{n^n}{2^n}$ |
| 3. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ | 4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ |
| 5. $u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$ | 6. $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$ |
| 7. $u_n = a^n n!$, $a \in \mathbb{R}$ | 8. $u_n = n\exp(-\sqrt{n})$ |
| 9. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ | 10. $u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$. |

**Exercice 7** *Cas limite de la règle de d'Alembert.*
Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour $n$ assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$ ?

**Exercice 8** *Cas limite de la règle de d'Alembert.*

1. Soit, pour tout entier $n \geq 1$,
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times (2n)}.$$
Quelle est la limite de $u_{n+1}/u_n$ ? Montrer que la série de terme général $nu_n$ est croissante. En déduire que la série de terme général $u_n$ est divergente.
2. Soit, pour tout entier $n \geq 2$,
$$v_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times (2n)}.$$
Quelle est la limite de $v_{n+1}/v_n$ ? Montrer que, si $0 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$. En déduire que la série de terme général $v_n$ converge.

**Exercice 9** *Règle de Raabe-Duhamel.*
Soit $(u_n)$ une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in ]1, a[$ et posons $v_n = \dfrac{1}{n^b}$. Comparer $u_n$ et $v_n$. En déduire que $\sum_n u_n$ converge si $a > 1$.
2. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les séries de Bertrand, montrer que le cas $a = 1$ est « douteux ».
4. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \bigcirc\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On pose $v_n = \ln(nu_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Montrer que $w_n = \bigcirc\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum_n u_n$ est divergente.

# 5 Exemples de séries semi-convergentes

**Définition 5.1** *Une série est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

**Définition 5.2** *On appelle série alternée une série numérique dont le terme général $u_n$ est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ où $(v_n)$ désigne une suite décroissante de nombres positifs convergeant vers zéro.*

**Théorème 5.1** *Toute série alternée $\sum_n u_n$ est convergente, et si on pose*
$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$
*sa somme $S = \sum_{n=0}^{\infty}$ vérifie : $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.*
*De façon plus précise, les sommes $S_{2p}$ d'indice pair tendent en décroissant vers $S$, tandis que les sommes $S_{2p+1}$ d'indice impair, tendent en croissant vers $S$.*

**Propriété 5.1 Règle d'Abel.**
*Soient $(v_n)$ une suite de nombres réels ou complexes telle que la suite*
$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$
*soit bornée et $(\varepsilon_n)$ une suite de nombres positifs, décroissante et tendant vers zéro. Alors la série $\sum \varepsilon_n v_n$ est convergente.*

**Propriété 5.2** *Soit $(\varepsilon_n)$ une suite décroissante de nombres positifs, tendant vers zéro. Quel que soit le nombre réel $\alpha$ tel que $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Z}$, la série $\sum \varepsilon_n \exp(in\alpha)$ est convergente.*

**Exercice 10** *Séries semi-convergentes et produit de Cauchy.*
Soit, pour $n \geq 0$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. Vérifier que $\sum_n u_n$ est semi-convergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum_n u_n$ par $\sum_n u_n$ ne converge pas.
3. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\sigma(3p) = 2p$, $\sigma(3p+1) = 4p+1$, $\sigma(3p+2) = 4p+3$. Vérifier que $\sigma$ est une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$ ?

# 6 Calculs approchés de la somme d'une série

**Définition 6.1** *Dans un e.v.n. quelconque $E$, soient $(u_n)$ une suite telle que la série $\sum_n u_n$ soit convergente et*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,\ S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

*Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre $n$ de cette série est :*

$$R_n = S - S_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p.$$

**Propriété 6.1** *Soit $f$ une fonction numérique définie sur la demi-droite réelle $x \geq a$, positive, décroissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Alors la série $\sum_n f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont simultanément convergentes ou divergentes.*

**Propriété 6.2** *Soit $f$ une fonction numérique définie sur la demi-droite réelle $x \geq a$, positive, décroissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Supposons de plus que la série $\sum_n f(n)$ soit convergente. Alors le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ vérifie la double inégalité*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx.$$

**Exercice 11**

1. Justifier la convergence de la série numérique $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

   On pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

2. Montrer que

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

   Déterminer un équivalent de $R_n$ au voisinage de $+\infty$.
3. Donner la nature de $\sum_{n\geq 1} R_n$.

**Exercice 12** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1}$ à $10^{-3}$ près.

**Exercice 13** On cherche $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ à $10^{-3}$ près.

## Références

[1] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition .*

[2] Jean-Etienne ROMBALDI. *Séries réelles ou complexes.*
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/Capes/AnalyseChap6.pdf

[3] Exercices collection BIBMATH. *Exercices - Suites - Études pratiques.*
http ://www.bibmath.net/exercices/bde/analyse/suitesseries/serieeno.pdf