ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 7 - Intégrales simples.

On considère dans ce chapitre des fonctions (numériques ou vectorielles) bornées sur un intervalle compact (c'est-à-dire fermé et borné) de $\mathbb{R}$.

1 Intégration des fonctions en escalier

Définition 1.1 *Soit $[a, b]$ un intervalle compact (c'est-à-dire fermé et borné) de $\mathbb{R}$. Une subdivision de $[a, b]$ est une suite finie et strictement croissante de points de $[a, b]$ dont le premier terme est a, et le dernier b.*

À chaque subdivision σ de $[a, b]$ on associe l'ensemble S constitué par les points de la suite σ. Inversement, à chaque ensemble fini S de points de $[a, b]$, contenant a et b, on associera la subdivision σ obtenue en rangeant ces points dans l'ordre naturel de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 *Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que la subdivision σ' est plus fine que σ, ou consécutive à σ, si les ensembles S et S' respectivement associés à σ et σ' vérifient l'inclusion $S \subset S'$. En d'autres termes, la subdivision σ' est plus fine si tous les points de σ appartiennent à σ'.*

Définition 1.3 *Étant donné deux subdivisions quelconques σ, σ' de $[a, b]$ la réunion de σ et de σ' est la subdivision σ'' dont l'ensemble associé est la réunion des ensembles associés à σ et σ'.*

Définition 1.4 *Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé. Une application $f : [a, b] \to E$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ $(1 \leq i \leq n)$.*

Un telle fonction ne prend qu'un nombre fini de valeurs : ses valeurs $f(x_i)$ aux $n + 1$ points de la subdivision, et les valeurs constantes qu'elle prend sur les n intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$. Il en résulte qu'une fonction en escalier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est nécessairement bornée.

Proposition 1.1 *Soit f une fonction vectorielle en escalier sur $[a, b]$ et pour chaque subdivision $\sigma = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n, x_n = b)$ de $[a, b]$ associée à f, posons :*

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i,$$

où f_i désigne la valeur constante de f sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$. Alors $I(f, \sigma)$ ne dépend que de f et non du choix de la subdivision σ associée à f.

Définition 1.5 *Soit f une fonction en escalier de l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. E. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'élément de E, noté $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ défini par*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i$$

où $(x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b)$ désigne une subdivision associée à f, et f_i la valeur constante de f sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$.

On notera que l'intégrale de f ne dépend que des valeurs prises par f à l'intérieur des intervalles de la subdivision, et non des valeurs prises par f aux points de la subdivision.

Proposition 1.2 *Additivité par rapport aux intervalles.*
Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a, b]$ et soit c un point quelconque de $[a, b]$. Alors f est en escalier sur chacun des intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ et on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Proposition 1.3 *Linéarité par rapport aux fonctions.*
Soient f, g deux fonctions en escalier sur le même intervalle $[a, b]$ à valeurs dans le même e.v.n. E (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors, quels que soient les scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est en escalier sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Proposition 1.4 *Croissance.*
L'intégrale d'une fonction numérique positive en escalier sur $[a, b]$ est positive ; en conséquence, si f, g sont deux fonctions numériques en escalier sur $[a, b]$, vérifiant $f(x) \leq g(x)$pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Proposition 1.5 *Majoration.*
Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. E. Alors la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$ est en escalier sur $[a, b]$ et on a :

$$\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

En conséquence, si f vérifie $\|f(x)\| \leq k$ pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq k(b - a).$$

2 Intégrale de Riemann (fonctions numériques)

Définition 2.1 *Une fonction numérique f définie sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un couple (g, h) de fonctions numériques en escalier sur $[a, b]$, vérifiant $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et :*

$$\int_a^b (h(x) - g(x))dx \leq \varepsilon.$$

De cette définition il résulte que toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est nécessairement bornée sur $[a, b]$ puisque les fonctions en escalier sont elles-mêmes bornées.
À chaque fonction numérique f, définie sur l'intervalle $[a, b]$ on associe les ensembles $\mathcal{E}_-(f)$ et $\mathcal{E}_+(f)$ ainsi définis :

- $\mathcal{E}_-(f)$ est l'ensemble des fonctions numériques g, en escalier sur $[a, b]$ et minorant f, c'est-à-dire vérifiant $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$,
- $\mathcal{E}_+(f)$ est l'ensemble des fonctions numériques h, en escalier sur $[a, b]$ et majorant f, c'est-à-dire vérifiant $h(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 2.1 *À chaque fonction numérique f, définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on associe l'ensemble $\mathcal{E}_+(f)$ (resp. $\mathcal{E}_-(f)$) constitué des fonctions numériques en escalier majorant (resp. minorant) f sur $[a, b]$ et on pose :*

$$I_-(f) = \sup_{g \in \mathcal{E}_-(f)} \int_a^b g(x)dx, \qquad I_+(f) = \inf_{h \in \mathcal{E}_+(f)} \int_a^b h(x)dx.$$

Pour que f soit intégrable sur $[a, b]$, il faut et il suffit que l'on ait : $I_-(f) = I_+(f)$.

Définition 2.2 *Les notations étant celles de du Théorème précédent, l'intégrale d'une fonction numérique intégrable f sur $[a, b]$ est le nombre $I_+(f) = I_-(f)$. On le note :*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Proposition 2.1 *Si f est une fonction numérique positive et intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, son intégrale est positive (éventuellement nulle).*

Proposition 2.2 *Fonctions monotones.*
Toute fonction numérique f, monotone sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est intégrable.

Proposition 2.3 *Fonctions continues.*
Toute fonction numérique f continue sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est intégrable.

Définition 2.3 *Interprétation géométrique de l'intégrale.*
Soit D un ensemble plan défini par des inégalités de la forme $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$, où f désigne une fonction numérique positive intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. L'aire de D est le nombre

$$\int_a^b f(x)dx.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Les fonctions suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?

1. $f(x) = [x]$ sur $[0, 2]$.
2. $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{x}\right] & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $k : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Calculer $\displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$ (on posera pour cela, $\theta = \arcsin\left(\dfrac{x}{R}\right)$) et en déduire l'aire d'un disque de rayon R.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ et $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

3 Intégrale de Riemann (fonctions vectorielles)

Définition 3.1 *Soient E un e.v.n. complet sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une application $f : [a, b] \to E$ est dite intégrable sur $[a, b]$ si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction vectorielle $\varphi : [a, b] \to E$, et une fonction numérique $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$, toutes deux en escalier, vérifiant :*

- $\forall x \in [a, b]$, $\|f(x) - \varphi(x)\| \leq \theta(x)$,
- $\displaystyle\int_a^b \theta(x)dx \leq \varepsilon$.

Proposition 3.1 *Soient E un e.v.n. complet sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour qu'une application $f : [a, b] \to E$ soit intégrable, il faut et il suffit qu'il existe une suite (φ_n) d'applications en escalier de $[a, b]$ dans E, et une suite (θ_n) de fonctions numériques en escalier sur $[a, b]$ telles que :*

- $\forall x \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f(x) - \varphi_n(x)\| \leq \theta_n(x)$,
- *la suite* $\varepsilon_n = \displaystyle\int_a^b \theta_n(x)dx$ *tende vers zéro.*

Pour abréger, on appellera simplement fonction vectorielle toute fonction à valeurs dans un e.v.n. complet E (éventuellement $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si f est une fonction vectorielle définie sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on appellera suite associée à f toute suite (φ_n, θ_n) de couples de fonctions en escalier sur $[a, b]$ énoncées dans la Proposition précédente : l'existence d'une telle suite est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable. Enfin, on emploiera souvent les termes « fonction intégrable » au lieu de « fonction vectorielle intégrable », sans préciser dans quel e.v.n. complet cette fonction prend ses valeurs. Avec ces conventions, on a la

Proposition 3.2 *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et soit (φ_n, θ_n) une suite associée à f. Alors la suite $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)dx$ est de Cauchy, donc convergente et sa limite I ne dépend que de la fonction f.*

Définition 3.2 *Les notations étant celles de la Proposition précédente, le vecteur (ou nombre)*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

est appelé intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ et noté $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Plaçons nous maintenant dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension finie : soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Si $\varphi : [a,b] \to E$ est en escalier, il est évident que les composantes de l'intégrale de φ par rapport à la base (e_i) sont les intégrales des composantes de φ. Par passage à la limite, on voit que cette propriété reste vraie pour toute fonction intégrable à valeurs dans E. On a ainsi la

Proposition 3.3 *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour qu'une application $f : [a,b] \to E$ soit intégrable sur $[a,b]$ il faut et il suffit que chacune de ses composantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ par rapport à une base (e_i) de E le soit et on a alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(x)dx \right) e_i.$$

En d'autres termes, les composantes de l'intégrale de f sont les intégrales de ses composantes.

Dans le cas où f est une fonction complexe, on a de même :

Proposition 3.4 *Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f = u + iv : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction complexe sur $[a,b]$. Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$, il faut et il suffit que sa partie réelle u et sa partie imaginaire v le soient et on a alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

4 Propriétés générales de l'intégrale de Riemann

Proposition 4.1 *Additivité par rapport aux intervalles.*
Soit f une fonction vectorielle définie sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et soit c un point de $]a,b[$. Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$, il faut et il suffit que ses restrictions à chacun des intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$ le soient. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Proposition 4.2 *Linéarité.*
Soient f, g deux fonctions intégrables sur l'intervalle compact $[a,b]$, à valeurs dans le même e.v.n. complet E (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Quels que soient les scalaires (réels ou complexes) λ, μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

On en déduit donc que les fonctions intégrables (au sens de Riemann) sur un intervalle $[a,b]$, à valeurs dans un e.v.n. complet donné E, constituent un espace vectoriel $\mathcal{R}_E$ sur le même corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) que E et l'application :

$$I : \mathcal{R}_E \to E,\ f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

est linéaire. Lorsque $E = \mathbb{R}$, cette application I est une forme linéaire vérifiant $I(f) \geq 0$ pour toute fonction intégrable positive f : on dit que c'est une forme linéaire positive (ou croissante).

Proposition 4.3 *Croissance.*
Soient f, g deux fonctions numériques intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ vérifiant pour tout $x \in [a,b]$: $f(x) \leq g(x)$. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{1}$$

Remarque 4.1 Si f, g sont deux fonctions numériques ou vectorielles intégrables sur $[a,b]$ et si leurs valeurs ne diffèrent qu'en un nombre fini de points de $[a,b]$, leurs intégrales sont égales : en effet, leur différence $f - g$ est une fonction en escalier, nulle sauf en nombre fini de points, son intégrale est donc nulle. Cet exemple montre que l'inégalité (1) peut se réduire à une égalité sans que l'on ait $f = g$. Le Théorème fondamental suivant montre que ce n'est pas possible si f et g sont continues.

Théorème 4.1 *L'intégrale d'une fonction numérique f, positive et continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, ne peut être nulle que si cette fonction est partout nulle.*

Théorème 4.2 *Majoration.*
Soit f une fonction vectorielle intégrable sur l'intervalle compact $[a,b]$. Alors, la fonction $F : x \mapsto \|f(x)\|$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx.$$

Corollaire 4.1 *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle compact $[a,b]$, vérifiant pour tout $x \in [a,b]$ l'inégalité $\|f(x)\| \leq k$ (k =cste). On a alors :*

$$\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq k(b-a). \tag{2}$$

Interprétation : On désigne par $\mathcal{R}(a,b,E)$ l'espace vectoriel constitué par les fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$, à valeurs dans un e.v.n. complet donné E. Les fonctions intégrables étant bornées, on peut munir $\mathcal{R}(a,b,E)$ de la norme de la convergence uniforme définie par $\nu(f) = \sup\limits_{a \leq x \leq b} \|f(x)\|$. L'inégalité (2) entraîne alors l'inégalité $\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq (b-a)\nu(f)$ qui montre que l'application linéaire $\mathcal{R}(a,b,E) \to E$, $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est continue, de norme au plus égale à $(b-a)$.

Proposition 4.4 *Si f est une fonction numérique (resp. complexe), intégrable sur $[a,b]$, sa valeur absolue (resp. son module) $x \mapsto |f(x)|$ est une fonction numérique intégrable sur $[a,b]$ et on a :*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Corollaire 4.2 *Si f, g sont deux fonctions numériques intégrables sur $[a,b]$, les fonctions*

$$\sup(f,g) : x \mapsto \sup(f(x), g(x)) \ \textit{et} \ \inf(f,g) : x \mapsto \inf(f(x), g(x))$$

sont intégrables.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$

1. Calculer $\int_0^3 f(t)dt$.
2. Soit $x \in [0,3]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,3]$?

Exercice 5 Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \exp(x)$, sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales

$$\int_0^1 f(x)dx, \int_1^2 g(x)dx \text{ et } \int_0^x h(t)dt.$$

Exercice 6 Calculer l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \cos(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $x_k = aq^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (q étant à déterminer),
3. $h(x) = \alpha^x$ sur $[a,b]$, $\alpha > 0$, et $x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Exercice 7 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ ($a < b$).

1. On suppose que f est positive ou nulle sur $[a,b]$. On suppose que f est également continue en un point $x_0 \in [a,b]$ et que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x) = 0$ alors f est identiquement nulle.
2. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, et que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 8 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, positive ; on pose $m = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = m.$$

Exercice 9 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

5 Produit de fonctions intégrables, inégalités de Schwarz et de Minkowski

Proposition 5.1 *Si f, g sont deux fonctions numériques ou complexes intégrables sur l'intervalle compact $[a,b]$, leur produit fg est intégrable sur $[a,b]$.*

Proposition 5.2 *Si f, g sont deux fonctions numériques ou complexes intégrables sur l'intervalle $[a,b]$, elles vérifient l'inégalité de Schwarz :*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right) \tag{3}$$

et l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{4}$$

De plus, si f et g sont continues, l'inégalité (3) ne se transforme en égalité que si on a $f = 0$ ou s'il existe une constante complexe k telle que l'on ait $g(x) = k\overline{f(x)}$ pour tout $x \in [a,b]$ et l'inégalité (4) ne se transforme en égalité que si on a $f = 0$ ou s'il existe une constante positive k vérifiant $g(x) = kf(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

6 Exemples de fonctions intégrables : fonctions réglées, fonctions continues

Définition 6.1 *Fonctions réglées.*
Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et E un e.v.n.. Une application $f : [a,b] \to E$ est dite réglée si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une application en escalier $\varphi : [a,b] \to E$ vérifiant pour tout $x \in [a,b]$:

$$\|\varphi(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 6.1 *Une application $f : [a,b] \to E$ est réglée si et seulement si il existe une suite (φ_n) d'applications en escalier de $[a,b]$ dans E, convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Théorème 6.1 *Toute application réglée d'un intervalle compact $[a,b]$ dans un e.v.n. complet E est intégrable.*

Théorème 6.2 *Cas particulier : fonctions continues.*
Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et E un e.v.n.. Toute application continue $f : [a,b] \to E$ est dite réglée. En conséquence, si E est complet, toute application continue de $[a,b]$ dans E est intégrable.

Proposition 6.2 *Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to E$ une application de $[a,b]$ dans un e.v.n. complet. Si f est bornée sur $[a,b]$ et intégrable sur tout intervalle compact $[\alpha,\beta]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Corollaire 6.1 *Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to E$ une application de $[a,b]$ dans un e.v.n. complet E. Si f est bornée sur $[a,b]$ et continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ alors f est intégrable.*

Plus généralement on a :

Proposition 6.3 *Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to E$ une application de $[a,b]$ dans un e.v.n. complet E. Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$, il suffit que f soit bornée et que l'ensemble de ses points de discontinuité soit fini.*

Proposition 6.4 *Approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues.*
Soit $f:[a,b]\to E$ une fonction intégrable. Quel que soit le nombre $\varepsilon>0$ donné, il existe une fonction continue $g:[a,b]\to E$ vérifiant

$$\int_a^b \|f(x)-g(x)\|dx \leq \varepsilon.$$

Cette approximation permet souvent de ramener la démonstration de propriétés des fonctions intégrables à celles des propriétés des fonctions continues.

7 Intégrale indéfinie. Dérivation

Proposition 7.1 *On a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$.*

Proposition 7.2 *Formule de Chasles.*
On a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

pourvu que f soit intégrable sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ d'extrémités $\alpha=\inf(a,b,c)$ et $\beta=\sup(a,b,c)$.

Définition 7.1 *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle compact $[a,b]$. Pour tout $t\in[a,b]$, f est intégrable sur l'intervalle $[a,t]$ et la fonction $\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ est appelée intégrale indéfinie de la fonction f.*

Proposition 7.3 *Continuité.*
Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to E$ une application intégrable de $[a,b]$ dans un e.v.n. complet E. Alors la fonction

$$F:[a,b]\to E,\ t\mapsto \int_a^t f(x)dx$$

est lipschitzienne, de rapport $k=\sup\limits_{a\leq x\leq b}\|f(x)\|$, donc continue sur $[a,b]$.

Proposition 7.4 *Dérivabilité.*
Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, la fonction

$$F:t\to \int_a^t f(x)dx$$

admet $f(t+0)$ pour dérivée à droite (resp. $f(t-0)$ pour dérivée à gauche) en tout point où cette limite existe.

Corollaire 7.1 *Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle compact $[a,b]$, l'intégrale indéfinie $F:t\to \displaystyle\int_a^t f(x)dx$ admet $f(t)$ pour dérivée en tout point t de $[a,b]$ où f est continue.*

Définition 7.2 *Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un e.v.n. quelconque E. On appelle primitive de f toute application $F:I\to E$ vérifiant pour tout $t\in I$: $F'(t)=f(t)$.*

Théorème 7.1 *Soit $f:[a,b]\to E$ une application continue de l'intervalle $[a,b]$ dans un e.v.n. complet E. Alors l'intégrale indéfinie*

$$F : t \to \int_a^t f(x)dx$$

est une primitive de f sur $[a, b]$ et si G est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Théorème 7.2 *Toute fonction continue définie sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un e.v.n. complet admet une primitive.*

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 11 Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1 + t^2 + t^4}$.

Exercice 12 Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ? F est-elle continue, dérivable sur son ensemble de définition ?
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} F(x)$ en comparant F à $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$.

8 Changement de variable

Théorème 8.1 *Soit φ une fonction numérique définie sur un intervalle compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, et pourvue d'une dérivée continue. Pour toute fonction f (numérique, complexe ou à valeurs dans un e.v.n. complet) définie et continue sur l'intervalle compact $\varphi(I)$, on a la formule dite de « changement de variable » :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

Proposition 8.1 *Cas où l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à l'origine.*
Soit f une fonction intégrable sur un intervalle compact $[-a, a]$ de centre O, alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))dx.$$

Proposition 8.2 *Invariance par translation. Application aux fonctions périodiques.*
Soit f une fonction intégrable quelconque sur l'intervalle compact $[a, b]$, alors la fonction translatée $f_u : x \mapsto f(x+u)$ est intégrable sur l'intervalle $[a - u, b - u]$ et qu'elle vérifie la relation :

$$\int_{a-u}^{b-u} f_u(x)dx = \int_{a-u}^{b-u} f(x + u)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

En particulier, si f est une fonction périodique, de période T sur $\mathbb{R}$, on a quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

9 Intégration par parties

Proposition 9.1 *Soient u, v deux fonctions numériques ou complexes définies sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et pourvues de dérivées continues. On a la formule d'intégration par parties :*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

soit, sous forme condensée :

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$$

Proposition 9.2 *Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et E un e.v.n. complet sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si les applications $u : [a, b] \to K$ et $v : [a, b] \to E$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, on a :*

$$\int_a^b u(x)v^{(n)}(x)dx = [u(x)v^{(n-1)}(x) - u'(x)v^{(n-2)}(x) + \ldots + (-1)^p u^{(p)}(x)v^{(n-p-1)}(x) + \ldots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)v(x)]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(x)v(x)dx.$$

Proposition 9.3 *Cas particulier des polynômes de degré $n-1$ au plus.*
Si u est un polynôme de degré $n-1$ au plus, on a $u^{(n)} = 0$ d'où :

$$\int_a^b u(x)v^{(n)}(x)dx = \sum_{p=0}^{n-1}[u^{(p)}(x)v^{(n-p-1)}(x)]_a^b = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}[u^{(n-k-1)}(x)v^{(k)}(x)]_a^b.$$

En changeant les notations et en prenant pour u le polynôme $t \to \dfrac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}$, on obtient la

Proposition 9.4 *Application. Formule de Taylor avec reste intégral.*
Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ sur $[a, b]$, à valeurs dans un e.v.n. complet E. Pour tout $t \in [a, b]$ on a alors :

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx.$$

10 Calcul des primitives

Exercice 13 Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\int \arctan(x)dx$	*b)* $\int \tan^2(x)dx$	*c)* $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$	*d)* $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$
e) $\int \arcsin(x)dx$	*f)* $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$	*g)* $\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$	*h)* $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$
i) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp(x)}}dx$	*j)* $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$	*k)* $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx$	*l)* $\int \cos(x)\exp(x)dx$

Exercice 14 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx \text{ et } \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx.$$

Exercice 15 Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\int \sin^8(x)\cos^3(x)dx$	*b)* $\int \cos^4(x)dx$	*c)* $\int \cos^{2003}(x)\sin(x)dx$	*d)* $\int \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}dx$
e) $\int \frac{1}{\sin(x)}dx$	*f)* $\int \frac{1}{\cos(x)}dx$	*g)* $\int \frac{3-\sin(x)}{2\cos(x)+3\tan(x)}dx$	*h)* $\int \frac{1}{7+\tan(x)}dx$

Exercice 16 Intégrales de Wallis.

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
2. Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n, en déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$.
3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$.
4. À l'aide de $(n+1)I_n I_{n+1}$ montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. En déduire $\dfrac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n)} \sim 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$.

Voici un tableau (non limitatif) de primitives utiles :

$\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste}, \quad \alpha \neq 1$	$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \text{Log}\lvert x\rvert + \text{cste}$
$\displaystyle\int \exp((\alpha+i\beta)x)dx = \frac{\exp((\alpha+i\beta)x)}{\alpha+i\beta} + \text{cste}$	$\displaystyle\int \sin(x)dx = -\cos x + \text{cste}$
$\displaystyle\int \cos(x)dx = \sin(x) + \text{cste}$	$\displaystyle\int \tan(x)dx = -\text{Log}\lvert\cos(x)\rvert + \text{cste}$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)} = \text{Log}\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)} = \text{Log}\left\lvert\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\rvert + \text{cste}$
$\displaystyle\int \text{cotan}(x)dx = \text{Log}\lvert\sin(x)\rvert + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + \text{cste}$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\text{cotan(x)} + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)\cos(x)} = \text{Log}\lvert\tan(x)\rvert + \text{cste}$
$\displaystyle\int \text{sh}(x)dx = \text{ch}(x) + \text{cste}$	$\displaystyle\int \text{ch}(x)dx = \text{sh(x)} + \text{cste}$
$\displaystyle\int \text{th}(x) = \text{Log(ch(x))} + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sh}(x)} = \text{Log}\left\lvert\text{th}\frac{x}{2}\right\rvert + \text{cste}$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\text{ch}(x)} = 2\arctan(\exp(x)) + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\text{th}(x)} = \text{Log}\lvert\text{sh}(x)\rvert + \text{cste}$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\text{ch}^2(x)} = \text{th(x)} + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sh}^2(x)} = \text{coth}(x) + \text{cste}$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sh}(x)\text{ch(x)}} = \text{Log}\lvert\text{th}(x)\rvert + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cste}$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\text{Log}\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right) + \text{cste}$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \text{arg sh}\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right) + \text{cste} = \text{Log}(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \text{cste}$	
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{arg ch}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cste} = \text{Log}\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + \text{cste}$	
$\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{3/2}} = \frac{x}{\alpha\sqrt{x^2+\alpha}} + \text{cste}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{(\alpha-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\alpha\sqrt{\alpha-x^2}} + \text{cste}, \quad \alpha \neq 0$

11 Valeur approchée d'une intégrale définie

Lorsqu'on ne connaît pas l'expression d'une intégrale définie au moyen de fonctions continues, on peut en chercher une valeur approchée en remplaçant la fonction à intégrer par une fonction voisine plus simple.

Proposition 11.1 *Méthode des rectangles pour une fonction monotone.*
Soit f une fonction monotone (supposée croissante) sur l'intervalle compact $[a,b]$. L'entier $n \in \mathbb{N}^\star$ étant fixé arbitrairement, on pose $h = (b-a)/n$ et on considère la subdivision

$$(a, a+h, \ldots, a+kh, \ldots, a+nh = b).$$

On obtient alors

$$h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) \leq \int_a^b f(x)dx \leq h\sum_{k=1}^{n} f(a+kh),$$

c'est-à-dire la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ avec une erreur au plus égale à $E(f) = \dfrac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$.

Proposition 11.2 *Méthode des trapèzes.*
Soit $f : x \mapsto \lambda x + \mu$ une fonction affine sur l'intervalle $[a, b]$ où λ, μ désignent des constantes. On a :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\lambda \frac{x^2}{2} + \mu x\right]_a^b = (b-a)\left[\lambda \frac{b+a}{2} + \mu\right] = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Plus généralement, soit f une fonction intégrable quelconque sur l'intervalle $[a, b]$ et soit $(x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$ une subdivision quelconque de cet intervalle. On désigne par g la fonction qui prend les mêmes valeurs que f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ et qui se réduit à une fonction affine sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $(1 \leq i \leq n)$. On obtient alors :

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}.$$

Si f est pourvue d'une dérivée seconde vérifiant pour tout $x \in [a, b]$: $\alpha \leq f'(x) \leq \beta$ avec α, β des constantes, on a alors :

$$\frac{\alpha(b-a)^3}{12n^2} \leq S - \int_a^b f(x)dx \leq \beta\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

avec $S = \dfrac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)\right]$.

Proposition 11.3 *Autre méthode, applicable aux fonctions vectorielles.*
Soit f une fonction vectorielle définie sur l'intervalle compact $[a, b]$ et pourvue d'une dérivée seconde vérifiant pour tout $x \in [a, b]$: $\|f''(x)\| \leq k$ avec k une constante. On a alors :

$$\left\|\int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\| \leq k\frac{(b-a)^3}{24}$$

et plus généralement pour tout entier $n > 0$:

$$\left\|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (2k+1)\frac{b-a}{2n}\right)\right\| \leq \frac{k(b-a)^3}{24n^3}.$$

Proposition 11.4 *Méthode de Simpson.*
Soit f une fonction numérique ou vectorielle définie sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et pourvue d'une dérivée d'ordre 5 vérifiant pour tout $x \in [a, b]$: $\|f^{(5)}(x)\| \leq k$ avec k une constante. On a alors :

$$\left\|\int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right\| \leq k\frac{(b-a)^5}{2880}$$

d'où pour tout entier $n > 0$:

$$\left\|\int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6}\sum_{k=0}^{n}\left[f(a+kh) + f(a+kh-h) + 4f\left(a + kh - \frac{h}{2}\right)\right]\right\| \leq k\frac{(b-a)^5}{2880n^4}.$$

12 Limite uniforme de fonctions intégrables. Intégration terme à terme d'une série

Théorème 12.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite uniformément convergente de fonctions intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans le même e.v.n. complet E. Alors la fonction limite $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx. \tag{5}$$

Il faut bien prendre garde que la convergence uniforme de la suite (f_n) est une condition suffisante mais non nécessaire pour entraîner l'égalité (5) et la théorie de Lebesgue permet d'établir le résultat puissant que voici :

Proposition 12.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions numériques ou complexes intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ convergeant simplement vers une fonction f intégrable sur $[a, b]$. Si les fonctions f_n sont bornées par un même nombre, on a encore l'égalité (5).*

Proposition 12.2 *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle compact $[a,b]$ convergeant simplement vers une fonction f sur $[a,b]$. Si les fonctions (f_n) snt bornées par un même nombre k, et si la convergence de f_n vers f est uniforme sur tout intervalle compact $[\alpha,\beta]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b]$ et on a encore l'égalité*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Proposition 12.3 *Application aux séries.*
Sit (u_n) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle compact $[a,b]$, à valeurs dans un e.v.n. complet E. Si la série $\sum_n u_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$, sa somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$. La série de terme général $v_n = \int_a^b u_n(x)dx$ est convergente et on a :

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

soit

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right]dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

En pratique, on retiendra les deux faits suivants :
- en intégrant terme à terme une série uniformément convergente sur l'intervalle compact $[a,b]$, on obtient une série convergente,
- la convergence uniforme d'une suite (resp. série) de fonctions définies sur un même intervalle compact est une condition suffisante pour pouvoir échanger les signes lim et $\int$ (resp. les signes $\sum$ et $\int$).

Exercice 17 Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.
1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

Exercice 18 Calculer la limite des suites suivantes :
1. $u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$;
2. $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

13 Formules de la moyenne

Proposition 13.1 *Soient f,g deux fonctions numériques intégrables sur l'intervalle $[a,b]$. Si la fonction g est positive et si m,M désignent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a,b]$, on a :*

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx.$$

Si de plus la fonction f est continue, il existe au moins un point $c\in[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Proposition 13.2 *Deuxième formule de la moyenne.*
Soient f,g deux fonctions numériques intégrables sur l'intervalle $[a,b]$, la fonction f étant supposée positive et décroissante. Il existe alors un point c de $[a,b]$ tel que l'on ait :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0)\int_a^c g(x)dx.$$

14 Sommes de Riemann

Théorème 14.1 *Soit* $f : [a, b] \to E$ *une application intégrable d'un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *dans un e.v.n. complet* E*. Quel que soit le nombre* $\varepsilon > 0$*, il existe un nombre* $h > 0$ *possédant la propriété suivante : pour toute subdivision* $\sigma = (x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ *de* $[a, b]$*, de pas au plus égal à* h *et toute suite* $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ *de points de* $[a, b]$ *vérifiant* $x_{i-1} \leq \zeta_i \leq x_i$ *pour* $i = 1, 2, \dots, n$*, on a*

$$\left\| S(f, \sigma, \zeta_1, \dots, \zeta_n) - \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 14.1 *Soit* f *une fonction intégrable sur l'intervalle* $[a, b]$ *et soit* (σ_p) *une suite de subdivisions de* $[a, b]$ *dont le pas tend vers zéro. Si pour chaque subdivision* $\sigma_p = (x_{p,0}, x_{p,1}, \dots, x_{p,n_p})$ *on choisit un point* $\zeta_{p,i}$ *dans chaque intervalle* $[x_{p,i-1}, x_{p,i}]$*, la somme de Riemann*

$$S_p = \sum_{i=1}^{n_p} (x_{p,i} - x_{p,i-1}) f(\zeta_{p,i})$$

tend vers l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *quand* p *tend vers l'infini.*
En particulier, si f *est intégrable sur* $[a, b]$*, la suite* (S_n) *définie par*

$$S_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

tend vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *quand l'entier* n *tend vers* $+\infty$*.*

Références

[1] JACQUELINE LELONG-FERRAND, JEAN-MARIE ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition.*

[2] EXERCICES COLLECTION EXO7. *Calculs d'intégrales.*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00015.pdf