ANALYSE NUMÉRIQUE - TPs

Fiche de Mathématiques 1 - L'algorithme QD.

1 Algorithme des fractions continues

1.1 Frations continues formelles

Soient n un entier et $X_0, X_1, \ldots, X_n$ des variables. On considère la fraction rationelle :

$$F_n = X_0 + \cfrac{1}{X_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{X_{n-2} + \cfrac{1}{X_{n-1} + \cfrac{1}{X_n}}}}} \tag{1}$$

On peut définir plus formellement F_n par récurrence par :

$$F_{n+1}(X_0, \ldots, X_n, X_{n+1}) = F_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, X_n + \frac{1}{X_{n+1}}).$$

De manière évidente, ces écritures sont rapidement trop lourdes et inexploitables. Dans la suite, la fraction rationnelle F_n ci-dessus sera notée :

$$F_n = [X_0, X_1, \ldots, X_n]. \tag{2}$$

Proposition 1.1
• *Il existe une suite (P_n) de polynômes telle que pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme P_n ne dépende que des variables $X_0, \ldots, X_n$ et telle que les conditions suivantes soient vérifiées :*
 – $P_0 = X_0$, $P_1 = X_0X_1 + 1$;
 – *pour tout entier* $n \geq 2$: $P_n = X_nP_{n-1} + P_{n-2}$.
• *Il existe une suite (Q_n) de polynômes telle que pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme Q_n ne dépende que des variables $X_1, \ldots, X_n$ et telle que les conditions suivantes soient vérifiées :*
 – $Q_0 = 1$, $Q_1 = X_1$;
 – *pour tout entier* $n \geq 2$: $Q_n = X_nQ_{n-1} + Q_{n-2}$.
• *Les coefficients de P_n et de Q_n sont des entiers naturels.*

Pour tout entier n, P_n est un polynôme de degré $n+1$ dont la partie homogène de degré $n+1$ est réduite au monôme $X_0X_1 \ldots X_n$ et Q_n est un polynôme de degré n, dont la partie homogène de degré n est réduite au monôme $X_1 \ldots X_n$.

Théorème 1.1 *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$F_n = [X_0, X_1, \ldots, X_n] = \frac{P_n}{Q_n}$$

1.2 Mise en place de l'algorithme

Soit θ un nombre réel. On considère sa partie entière $a_0 = [\theta]$.
– Si θ est un entier, $\theta = a_0$ et l'algorithme s'arrête.
– Sinon, θ n'est pas un entier, $\theta - a_0$ est un réel tel que $0 < \theta - a_0 < 1$. Il s'écrit donc sous la forme $\frac{1}{\theta_1}$ avec $\theta_1 > 1$. Dans ce cas, on a :

$$\theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1}.$$

Le procédé se réitère alors en remplaçant θ par θ_1 : soit a_1 la partie entière de θ_1.
– Si θ_1 est un entier, donc égal à a_1, l'algorithme s'arrête et on a l'égalité :

$$\theta = a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

– Sinon, θ_1 n'est pas un entier et $\theta_1 - a_1$ est un réel qui s'écrit sous la forme $\dfrac{1}{\theta_2}$ avec $\theta_2 > 1$. Dans ce cas, le même procédé s'applique à θ_2.

Ce processus s'arrête à l'itération (étage, rang, cran,...) n si et seulement si θ_n est un entier, égal à sa partie entière a_n. Dans ce cas, on a l'égalité :

$$\theta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}. \tag{3}$$

Lemme 1.1 *Réciproquement, si θ est un nombre rationnel, l'algorithme des fractions continues s'arrête après un nombre fini d'itérations. Si de plus $\theta = p/q$, les calculs des nombres a_k peuvent se faire par des divisions euclidiennes successives, comme dans l'algorithme d'Euclide.*

Si θ n'est pas rationnel, il existe donc une suite (a_n) d'entiers qui, sauf peut-être le premier a_0, sont supérieurs ou égaux à 1 et une suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement plus grands que 1 vérifiant les relations :

$$\theta_n = a_n + \frac{1}{\theta_{n+1}}. \tag{4}$$

De plus, pour tout entier n on a :

$$\theta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\theta_{n+1}}}}}}. \tag{5}$$

Dans la suite, on suppose que dans l'algorithme des fractions continues, n itérations sont possibles et produisent donc des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ qui à l'exception de a_0 sont strictement positifs, ainsi que des réels $\theta_1, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}$ strictement plus grands que 1. Dans la fraction rationnelle F_n, définie en (1), on peut donc substituer $(a_0, \ldots, a_n)$ à $(X_0, \ldots, X_n)$.

Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres tels que $F_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ soit définie, on notera

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = F_n(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Lorsque θ est un nombre rationnel, l'égalité (3) s'écrit donc :

$$\theta = [a_0, a_1, \ldots, a_n]. \tag{6}$$

De même, si θ n'est pas un nombre rationnel, l'égalité (5) se notera :

$$\theta = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \theta_{n+1}]. \tag{7}$$

Définition 1.1 *En conservant les notations précédentes et en supposant $a_0, a_1, \ldots, a_n$ définis,*
- *pour tout entier $k \leq n$, a_k s'appelle le quotient incomplet de θ d'indice k et θ_k s'appelle le quotient complet de θ d'indice k ;*
- *le nombre rationnel $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ s'appelle la réduite d'indice k.*

En substituant $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ à $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ dans les polynômes P_n et Q_n, on obtient des nombres qui seront notés p_n et q_n respectivement. Comme ces polynômes sont à coefficients entiers, les nombres p_n et q_n sont eux-même des entiers. De plus, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ on a $a_k \geq 1$ et donc : $q_k \geq q_{k-1} + q_{k-2}$.
D'autre part, pour tout entier $n \geq 2$, les suites d'entiers (p_n) et (q_n) vérifient les relations suivantes :

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \tag{8}$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \tag{9}$$

Ceci découle de la définition même des polynômes P_n et Q_n. Il en résulte par une récurrence immédiate que pour tout entier n : $q_n \geq n$.

Lemme 1.2 *Les suites d'entiers (p_n) et (q_n) vérifient les relations suivantes.*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1} \tag{10}$$
$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n. \tag{11}$$

Corollaire 1.1 *Les entiers p_n et q_n sont premiers entre-eux, et l'écriture de la réduite $[a_0, a_1, \dots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$ est l'écriture de la fraction sous forme irréductible*

Lemme 1.3 *Pour tout entier n on a la relation*

$$\theta = \frac{\theta_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\theta_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

1.3 Meilleure approximation

On considère dans cette section un nombre réel θ irrationnel. On notera (a_n) la suite des quotients incomplets et (θ_n) la suite des quotients complets.

Lemme 1.4 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a la relation :*

$$\left(\theta - \frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{(-1)^n}{q_n(\theta_{n+1} q_n + q_{n-1})}. \tag{12}$$

Proposition 1.2 *Les réduites d'indices pairs $f_{2n} = \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$ et les réduites d'indices impairs f_{2n+1} forment deux suites adjacentes, telles que la sous-suite des termes d'indice pair est croissante et la sous-suite des termes d'indice impair est décroisssante. La suite des réduites converge vers θ.*
Pour tout indice $n \geq 1$, on a l'inégalité :

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Corollaire 1.2 *Si θ est un nombre irrationnel, il existe une infinité de nombres rationnels de la forme $\dfrac{p}{q}$ tels que*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Proposition 1.3

- *Pour tout entier n les nombres $q_n\theta - p_n$ et $q_{n+1}\theta - p_{n+1}$ sont de signes contraires.*
- *La suite de terme général $|q_n\theta - p_n|$ est décroissante.*

Théorème 1.2 *(Meilleure approximation).*
Quel que soit l'entier $n \geq 1$, pour tout entier p et tout entier q tel que $0 < q < q_{n+1}$ on a :

$$|q\theta - p| \geq |q_n\theta - p_n|. \tag{13}$$

De plus l'inégalité est une égalité si et seulement si $p = p_n$ et $q = q_n$.

Proposition 1.4 *Pour tout entier n, l'une des réduites $f_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ ou $f_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ satisfait à :*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Proposition 1.5 *Soient p et $q > 0$ deux entiers. La relation $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q^2}$ implique que $\dfrac{p}{q}$ est une réduite de θ.*

2 L'algorithme QD et les racines de polynômes

S.M. Compton [7] : « *From its initial announcement by E. Stiefel [23] in 1953, the Quotient-Difference algorithm has been successfully applied to numerous problems of numerical analysis. These problems include the determination of the poles of a meromorphic function from the coefficients of one of its Taylor expansions, the computation of eigenvalues and eigenvectors of a matrix, the approximation of the zeros of a polynomial and the determination of the continued fraction expansion of a function represented by a power series.* »

C'est ce dernier cas qui nous intéresse ici. Cependant, on va considérer l'algorithme QD dans son contexte le plus général afin de permettre une pleine compréhension de cette méthode et de ses limites.

• Cette étude nécessite dans un premier temps la présentation des déterminants de Hankel.

Définition 2.1 *Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $k = 1, 2, 3, \ldots$ on appelle déterminants de Hankel les déterminants*

$$H_n^{(k)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} & \cdots & a_{n+2k-2} \end{vmatrix}$$

avec $H_n^{(0)} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Propriété 2.1 *On a $\forall n, k \geq 0$,*

$$(H_n^{(k)})^2 - H_{n-1}^{(k)} H_{n+1}^{(k)} + H_{n-1}^{(k+1)} H_{n+1}^{k-1} = 0. \tag{14}$$

L'équation (14) peut être réécrite sous la forme

$$H_{n-1}^{(k+1)} = \frac{H_{n-1}^{(k)} H_{n+1}^{(k)} - (H_n^{(k)})^2}{H_{n+1}^{(k-1)}} \tag{15}$$

et fournit ainsi une formule qui permet de générer par récurrence des déterminants $H_n^{(i)}$.
Connaissant $H_n^{(0)} = 1$ et $H_n^{(1)} = a_n$, on peut calculer $H_n^{(2)}$ et ainsi de suite.

• Considérons ensuite le problème de la détermination des zéros d'un polynôme de la forme

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n. \tag{16}$$

où $P(z)$ admet n racines distinctes. L'algorithme QD, qui peut être pensé comme une extension de la méthode de Bernoulli [7] (qui fournit seulement le zéro dominant d'un polynôme), permet de déterminer tous les zéros d'un polynôme, y compris les racines complexes conjuguées, de manière simultanée. Cette méthode implique une table de quotients et de différences à partir de laquelle les zéros peuvent être déduits.

On définit d'une manière générale les relations :

$$q_k^{(i+1)} = \frac{d_{k+1}^{(i)}}{d_k^{(i)}} q_{k+1}^{(i)} \tag{17}$$

$$d_k^{(i)} = q_{k+1}^{(i)} - q_k^{(i)} + d_{k+1}^{(i-1)} \tag{18}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et $k = 0, 1, 2, \ldots$, où $q_k^{(1)}$ est spécifique à chaque problème et $d_k^{(0)} = 0$ pour tout $k \geq 0$. Les quotients et différences formés par (17) et (18) peuvent être réarrangés de la manière suivante :

Données		$i = 1$		$i = 2$		$i = 3$		$i = \ldots$
	$q_0^{(1)}$							
0		$d_0^{(1)}$						
	$q_1^{(1)}$		$q_0^{(2)}$					
0		$d_1^{(1)}$		$d_0^{(2)}$				
	$q_2^{(1)}$		$q_1^{(2)}$		$q_0^{(3)}$			
0		$d_2^{(1)}$		$d_1^{(2)}$		$d_0^{(3)}$		
	$q_3^{(1)}$		$q_2^{(2)}$		$q_1^{(3)}$		$q_0^{(4)}$	
0		$d_3^{(1)}$		$d_2^{(2)}$		$d_1^{(3)}$		$\ddots$
	$q_4^{(1)}$		$q_3^{(2)}$		$q_2^{(3)}$		$q_1^{(4)}$	
0		$d_4^{(1)}$		$d_3^{(2)}$		$d_2^{(3)}$		$\ddots$
$\vdots$	$q_5^{(1)}$	$\vdots$	$q_4^{(2)}$	$\vdots$	$q_3^{(3)}$	$\vdots$	$q_2^{(4)}$	
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

Table 1 – Table des quotients et Différences (construction par colonnes)

Propriété 2.2

1. *Dans un parallélogramme (NESO) centré en une colonne « quotient », on a S+O=N+E.*
2. *Dans un parallélogramme (NESO) centré en une colonne « différence », on a S×O=N×E.*
3. *Le nombre de colonnes « quotient » est égal au degré du polynôme considéré.*
4. *Chaque colonne « quotient » (avec des valeurs croissantes de k) convergera vers une racine du polynôme.*
5. *Si le polynôme ne possède pas de racines complexes conjugées, les colonnes « différence » convergent vers 0.*

Revenons-en maintenant à notre problème de détermination des racines du polynôme $P(z)$. La méthode de Bernoulli consiste à utiliser l'équation aux différences associées à (16) soit

$$D_k(u) = c_0 u_{k-n} + c_1 u_{k-n+1} + \ldots + c_{n-1} u_{k+1} + c_n u_k. \tag{19}$$

On génère alors la suite $\{u_k\}$, ainsi que le rapport $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$, à partir de (19) avec $D_k(u) = 0$ et les valeurs initiales $u_0 = 1$ et $u_{-1} = u_{-2} = \ldots = u_{-n+1} = 0$. La théorie nous dit que la suite $\{q_k\}$ converge vers la racine dominante de (16). Rutishauser et Stiefel (1954) ont ensuite généralisé cette méthode en utilisant les tables de quotients et différences, avec $q_k^{(1)} = \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ et $D_k(0) = 0$, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$.

Il existe deux procédures qui permettent de produire, dans notre situation, la table des quotients et différences.
- La procédure la plus naturelle consiste à fabriquer la table par colonnes du bas vers le haut (deux boucles seront alors imbriquées, une boucle principale sur i soit l'indice de colonne, puis une boucle secondaire sur k, soit l'indice de ligne). Cependant, cette méthode est très sensible aux erreurs d'arrondis et est considérée par conséquent comme instable.
- Une deuxième manière de procéder consiste à construire la table par lignes, de la droite vers la gauche, en utilisant des entrées fictives pour les deux premières lignes, comme dans la version modifiée de la table TAB.1 ci-dessous. Les entrées sont bien-évidemment générées à l'aide des règles 1. et 2. énoncées dans la Propriété 2.2 :

Données		$\boxed{-\frac{c_n}{c_{n-1}}}$		$\boxed{0}$		$\boxed{0}$		$\boxed{0}$		$\ldots$
	0		$\boxed{\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}}$		$\boxed{\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}}$		$\boxed{\frac{c_{n-3}}{c_{n-4}}}$		$\ldots$	
k=0		$q_1^{(1)}$		$\star$		$\star$		$\star$		$\ldots$
	0		$\star$		$\star$		$\star$		$\ldots$	
k=1		$q_2^{(1)}$		$\star$		$\star$		$\star$		$\ldots$
	0		$\star$		$\star$		$\star$		$\ldots$	
k=2		$q_3^{(1)}$		$\star$		$\star$		$\star$		$\ldots$
	0		$\star$		$\star$		$\star$		$\ldots$	
k=3		$q_4^{(1)}$		$\star$		$\star$		$\star$		$\ldots$
	0		$\star$		$\star$		$\star$		$\ldots$	
k=...		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$				
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			

TABLE 2 – Table des quotients et Différences (construction par lignes)

Chaque colonne « quotient » va, pour des valeurs de k croissantes, converger vers une racine du polynôme. Si le polynôme ne possède pas de racines complexes conjuguées, les colonnes « différence » vont converger vers 0.

Finalement, on note que l'expression (17) implique que l'algorithme QD échoue dès que $e_k^{(i)} = 0$, $0 < k < n$, ce cas ne survenant que lorsque $u_k = 0$.

Il a été montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithm QD soit valide est que les déterminants de Hankel $H_k^{(i)}$ sont toujours non nuls pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $k = 0, 1, 2, \ldots$. De plus, si l'algorithme QD est valide, alors

$$q_k^{(i)} = \frac{H_{k+1}^{(i)} H_k^{(i-1)}}{H_k^{(i)} H_{k+1}^{(i-1)}} \tag{20}$$

$$\text{et} \quad e_k^{(i)} = \frac{H_k^{(i+1)} H_{k+1}^{(i-1)}}{H_k^{(i)} H_{k+1}^{(i)}} \tag{21}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $k = 0, 1, 2, \ldots$

3 L'algorithme QD et les fractions continues

On rappelle qu'à chaque série entière formelle

$$1 + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i z^i \tag{22}$$

correspond au plus une fraction continue de la forme

$$1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \cfrac{a_3 z}{1 + \ldots}}} \tag{23}$$

où $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$ On rappelle également que cette fraction continue correspond à la série entière (22) dans le sens où le développement de Taylor Mac-Laurin à l'ordre n coïncide, terme à terme, avec la série (22).

Il a été montré qu'une telle fraction continue existe pour (22) si et seulement si les déterminants

$$A_j = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_j \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_j & c_{j+1} & \ldots & c_{2j-1} \end{vmatrix} \text{ et } B_j = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_j \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_j & c_{j+1} & \ldots & c_{2j-2} \end{vmatrix},$$

pour $j = 1, 2, 3, \ldots$ et $j = 2, 3, 4, \ldots$ respectivement, sont non nuls. Ceci est équivalent au fait qu'une fraction continue infinie de la forme (23) ne peut pas correspondre à une série entière de la forme (22) qui représente une fonction rationnelle de z.

Si les déterminants A_j, $j = 1, 2, \ldots$, et B_j, $j = 2, 3, 4, \ldots$, sont tous non nuls, il a été établi alors que les coefficients a_i, $i = 1, 2, \ldots$ de la fraction continue qui correspond à la série entière (22) sont donnés par :

$$a_1 = A_1 = c_1 \tag{24}$$

$$a_{2j} = -\frac{B_{j+1} A_{j-1}}{A_j B_j} \tag{25}$$

$$\text{et } a_{2j+1} = -\frac{A_{j+1} B_j}{B_{j+1} A_j} \tag{26}$$

pour $j = 1, 2, 3, \ldots$, et où $A_0 = B_1 \equiv 1$.

On note qu'en termes de déterminants d'Hankel,

$$A_j = H_1^{(j)} \text{ pour } j = 0, 1, 2, \ldots \text{ et } B_j = H_2^{(j-1)} \text{ pour } j = 1, 2, 3, \ldots$$

Donc, d'après les équations (25) et (26), on voit que :

$$a_{2j} = -\frac{H_2^{(j)} H_1^{(j-1)}}{H_1^{(j)} H_2^{(j-1)}} \text{ et } a_{2j+1} = -\frac{H_1^{(j+1)} H_2^{(j-1)}}{H_2^{(j)} H_1^{(j)}}$$

pour $j = 1, 2, \ldots$ On remarque de plus, d'après les équations (20),(21) et (24), (25), (26) que

$$a_{2j} = -q_1^{(j)} \text{ et } a_{2j+1} = -d_1^{(j)} \text{ pour } j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{27}$$

donc que les coefficients de la fraction continue qui correspond à la série entière (22) peuvent être obtenus à partir d'un table quotients-différences composés des coefficients de la série entière.

4 Exercices

Exercice 1

1. Déterminer le développement en fraction continue de $\frac{29}{67}$.
2. Déterminer le développement en fraction continue de la fonction $f(z) = 1 + 3z + z^2$.
3. Déterminer les 4 premiers termes du développement en fraction continue de la fonction $f(z) = e^z$.

Exercice 2 Déterminer à l'aide de la méthode de Bernoulli la racine dominante des équations :

1. $2 - 7x + 9x^2 - 5x^3 + x^4 = 0$,
2. $24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4 = 0$.

Exercice 3 Déterminer à l'aide de l'algorithme QD les racines du polynôme à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

Exercice 4 Déterminer à l'aide de l'algorithme QD le développement en fraction continue des séries entières

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ où $x \in \mathbb{R}$,
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(n!)} = \int_0^x e^{-t^2} dt$ où $x \in \mathbb{R}$,
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)((2n+1)!)} = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Développement d'un nombre rationnel en fraction continue : algorithme direct.

1. Soient α_0 et α_1 deux entiers naturels non nuls. En appliquant l'algorithme d'Euclide à α_0 puis à α_1 (comme si on désirait calculer leur PGCD), on obtient un système d'égalités de division euclidienne :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{lcll} \alpha_0 & = & a_0\alpha_1 + \alpha_2 & 0 < \alpha_2 < \alpha_1 \\ \alpha_1 & = & a_1\alpha_2 + \alpha_3 & 0 < \alpha_3 < \alpha_2 \\ \vdots & = & \vdots & \\ \alpha_n & = & a_n\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} & 0 = \alpha_{n+2} \end{array} \right.$$

   On remarquera que n peut être nul, auquel cas le système (S) se réduit à la dernière égalité : $\alpha_0 = a_0\alpha_1$.

   (a) Démontrer que les conditions (FC) suivantes sont vérifiées :

   $$(\mathrm{FC}) \qquad \text{si } n \geq 1 \text{ alors } a_0 \geq 0,\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \geq 1 \text{ et } a_n \geq 2.$$

   (b) Programmer sous *SCILAB* l'algorithme d'Euclide.

   (c) Montrer que les conditions (FC) sont vérifiées.

   (d) Utiliser le programme pour calculer PGCD(148,1245), PGCD(23456,2364) et PGCD(5679,363).

2. On s'intéresse au nombre réel θ associé au couple (α_0, α_1) par l'intermédiaire de la suite des quotients $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de l'algorithme d'Euclide à l'aide de l'égalité (5).

   (a) Laquelle de ces égalités est une fraction continue ?

   $$7\ ;\ 6 + \frac{1}{1}\ ;\ \beta = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{9 + \frac{1}{10}}}}}}}}}. \tag{28}$$

   (b) Démontrer que le nombre θ défini par (5) est un nombre rationnel positif.

(c) Démontrer que si α_0 et α_1 sont multipliés par un même entier naturel non nul t, θ reste inchangé (ceci montre que θ ne dépend que du rationnel $r = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$).

(d) Justifier le système d'égalités :

$$(S') \left\{ \begin{array}{lcl} r & = & a_0 + \frac{1}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \\ r & = & a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}} \\ \vdots & & \vdots \\ r & = & a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}}}} = \theta \end{array} \right.$$

On a donc démontré que

– tout nombre rationnel positif peut se développer en fraction continue. Les conditions (FC) imposées font que ce développement est unique puisqu'il résulte de l'application de l'algorithme d'Euclide,
– toute fraction continue est un rationnel positif.

(e) L'algorithme « FractContDirect » ci-dessous, exécutable par *SCILAB* contient en entrée les entiers naturels non nuls α_0 et α_1. Que produit-il ? Commenter ?

```
-->  alpha0=input('alpha0=');
-->  alpha1=input('alpha1=');
-->  i=0;
-->  QUOTIENTS=[quotient(alpha0,alpha1)];//
-->  RESTES=[alpha0,alpha1,reste(alpha0,alpha1)];
-->  while RESTES(1,$)>=1,
-->     i=i+1;
-->     QUOTIENTS=[QUOTIENTS,quotient(RESTES(1,i+1),RESTES(1,i+2))];
-->     RESTES=[RESTES,reste(RESTES(1,i+1),RESTES(1,i+2))];
-->  end;
```

(f) Calculer le développement en fraction continue de $\frac{22}{7}$ et de $\frac{333}{106}$ sous la forme (6). Quel est le nombre d'étages n dans chaque cas ?

Exercice 6 Développement d'un nombre rationnel en fraction continue : algorithme inverse.

1. L'algorithme « FractContInverse » ci-dessous, exécutable par *SCILAB*, contient en entrée une fraction continue donnée sous forme (6), notée A. Que produit-il ? Comment ?

```
-->  A=input('A=');
-->  num=[A(1,$)];
-->  den=[1];
-->  for k=1 :size(A,'c')-1)
-->     a=num(1,$);
-->     b=den(1,$);
-->     num=[num,A(1,size(A,'c')-k)*a+b];
-->     den=[den,a];
-->  end;
```

Remarque 4.1 *SCILAB*
Pour calculer un rationnel, on calcule séparément son numérateur et son dénominateur (définis à une constante multiplicative près) parce que sinon, il sera traité par *SCILAB* comme un nombre réel.

2. Calculer le rationnel β défini par (28).

Exercice 7

1. Implémenter l'algorithme QD sous *SCILAB*

(a) par colonnes :
Pour construire la table par colonnes de la gauche vers la droite, on utilisera les formules de récurrence :

$$\left.\begin{array}{l} e_k^{(\nu)} := e_{k-1}^{(\nu+1)} + q_k^{(\nu+1)} - q_k^{(\nu)} \\ q_{k+1}^{(\nu)} := q_k^{(\nu+1)} \frac{e_k^{(\nu+1)}}{e_k^{(\nu)}} \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

(b) par lignes :
Pour construire la table par lignes, du bas vers le haut, on utilisera les formules de récurrence :

$$\left.\begin{array}{l} q_k^{(\nu+1)} := q_k^{(\nu)} + e_k^{(\nu)} - e_{k-1}^{(\nu+1)} \\ e_k^{(\nu+1)} := e_k^{(\nu)} \frac{q_k^{(\nu+1)}}{q_{k+1}^{(\nu)}} \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

2. Utiliser votre programme pour déterminer les racines du polynôme défini dans l'exercice 3.
3. Utiliser votre programme pour déterminer les développements en fractions continues des séries entières de l'exercice 4.

Références

[1] Jean-Michel FERRARD. *Problème sur les Fractions Continues.*
http ://www.melafrit.com/education/IPEST/Maths/1er/problemes/pb1-3-4.pdf

[2] André HAUTOT. *Accélération de la convergence en analyse numérique.*
http ://physinfo.org/Acc_Conv/Acc_Conv_Part1.pdf

[3] Claude BREZINSKI. *Ces étranges fractions qui n'en finissent pas.*
http ://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/IMG/pdf/Brezinski_fractions_continues.pdf

[4] Martin H. GUTKNECHT and Beresford N. PARLETT. *How Rutishauser may have found the qd and LR algorithms, the fore-runners of QR.*
http ://www.sam.math.ethz.ch/ mhg/talks/qdLR-GlasgowHO.pdf

[5] M. COUCHOURON. *Développement d'un réel en fractions continues.*
http ://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/fraccont.pdf

[6] Ron KNOTT. *An Introduction to the Continued Fraction.*
http ://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html

[7] Stanley Max COMPTON. *Continued Fractions and their application in the computation of definite Riemann Integrals.*
http ://etd.lib.ttu.edu/theses/available/etd-07242009-31295015507519/unrestricted/31295015507519.pdf