MASTER 1 SIDE **Pôle Lamartine - ULCO**

INFORMATIQUE ET MODÈLES LINÉAIRES Décembre 2010 - Session 1, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents autorisés. Calculatrice autorisée

(Les deux exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1

Le tableau suivant donne la répartition d'un groupe de 306 étudiants de 1ère année universitaire selon leur âge et la note obtenue à l'examen de fin de 1er semestre. On introduit la variable X qui représente la note obtenue sur 20. Les valeurs de X sont réparties en classes de centres x_i, $i \in [1, 8]$. Les âges Y des étudiants sont situés entre 18 ans et 21 ans au 1er juillet de l'année universitaire. Ils sont répartis en 3 classes d'amplitude une année, de centres y_j, $j = 1, 2, 3$.

X \ Y	$]18, 19]$	$]19, 20]$	$]20, 21]$
$]5, 7]$	3	12	11
$]7, 8]$	6	11	6
$]8, 9]$	12	10	12
$]9, 10]$	22	24	14
$]10, 11]$	22	19	13
$]11, 12]$	17	13	8
$]12, 13]$	13	16	10
$]13, 15]$	7	17	8

On donne également un histogramme 3D fournissant une représentation graphique de la distribution de (X, Y) dans $\mathbb{R}^2$.

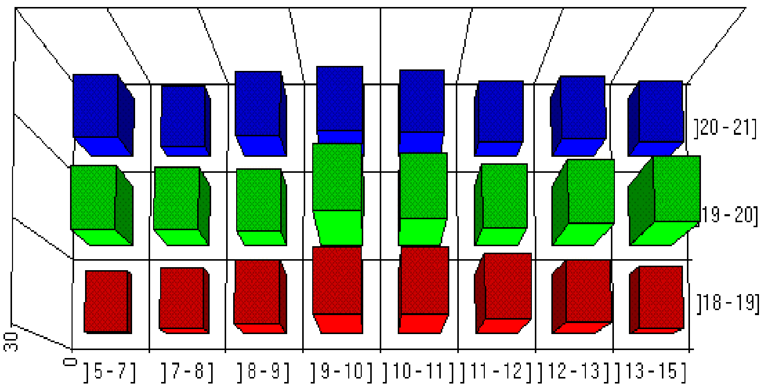


FIGURE 1 – Histogramme 3D.

1. Représenter graphiquement la distribution de (X, Y) dans $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un nuage de points et de l'annexe A.
2. Remplir le tableau de l'annexe B.
3. Dessiner les lignes de régression de X en Y et de Y en X sur le graphique de l'annexe A.
4. Donner la formule de décomposition de la variance de X puis vérifier la numériquement.
5. En déduire les rapports de corrélation $h^2_{X/Y}$ et $h^2_{Y/X}$ et tester leur significativité à l'aide d'un test de Fisher-Snédécor au risque de 5% et de l'annexe D. Quels sont vos commentaires ?

6. Donner l'expression de la covariance de X et Y et la calculer.
   En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire $r(X, Y)$ et tester sa significativité à l'aide d'un test de Student-Fisher au seuil de 5%. On utilisera pour cela la statistique
   $$T = \sqrt{n-2}\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$$
   qui suit une loi de Student-Fisher à $\nu = n - 2$ degrés de liberté, ainsi que la table de l'annexe C.
7. Déterminer les équations des droites de régression de X en Y et de Y en X.
   Les représenter sur le graphique de l'annexe A. Quels sont vos commentaires ?

Correction :

1. Pour représenter un nuage de points, nous utiliserons, dans chaque case de la distribution conjointe, un nombre de croix égal à l'effectif de la modalité conjointe de Z. On peut aussi mettre une coloration plus ou moins intense suivant l'effectif.

FIGURE 2 – Nuage de points.

2. On a le tableau

X \ Y	$]18, 19]$	$]19, 20]$	$]20, 21]$	x_i	$n_{i.}$	$\overline{Y}_i$	$n_{i.}\overline{Y}_i$	$n_{i.}\overline{Y}_i^2$	$n_{i.}x_i$	$n_{i.}x_i^2$
$]5, 7]$	3	12	11	6	26	19,81	515,06	10203,34	156	936
$]7, 8]$	6	11	6	7,5	23	19,5	448,5	8745,75	172,5	1293,75
$]8, 9]$	12	10	12	8,5	34	19,5	663	12928,5	289	2456,5
$]9, 10]$	22	24	14	9,5	60	19,37	1162,2	22511,81	570	5415
$]10, 11]$	22	19	13	10,5	54	19,33	1043,82	20177,05	567	5953,5
$]11, 12]$	17	13	8	11,5	38	19,26	731,88	14096,01	437	5025,5
$]12, 13]$	13	16	10	12,5	39	19,42	757,38	14708,32	487,5	6093,75
$]13, 15]$	7	17	8	14	32	19,53	624,96	12205,47	448	6272
y_j	18,5	19,5	20,5				5946,8	115576,25	3127	33446
$n_{.j}$	102	122	82							
$\overline{X}_j$	10,40	10,28	9,90							
$n_{.j}\overline{X}_j$	1060,8	1254,16	811,8	3126,76					10,22	4,874
$n_{.j}\overline{X}_j^2$	11032,32	12896,26	8036,82	31965,4					0,0203	0,0042
$n_{.j}y_j$	1887	2379	1681	5947			19,43	0,0511		
$n_{.j}y_j^2$	34909,5	46390,5	34460,5	115760,5			0,597	0,0861		

Les formules utlisées dans ce tableau sont :

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i,j} n_{ij}x_i y_j - \overline{x}\,\overline{y} \text{ avec } n = \sum_{i,j} n_{ij} = 100,\ n_{i.} = \sum_j n_{ij},\ n_{.j} = \sum_i n_{ij},$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.}x_i = \frac{1}{n}\sum_{i,j} n_{ij}x_i = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}\overline{X_j} \text{ avec } \overline{X_j} = \frac{1}{n_{.j}}\sum_i n_{ij}x_i,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}y_j = \frac{1}{n}\sum_{i,j} n_{ij}y_j = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.}\overline{Y_i} \text{ avec } \overline{Y_i} = \frac{1}{n_{i.}}\sum_j n_{ij}y_j,$$

$$s_T^2(X) = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.}x_i^2 - \overline{x}^2 \text{ et } s_T^2(Y) = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}y_j^2 - \overline{y}^2,$$

$$s_m^2(X) = \frac{1}{n}\sum_j n_{.j}\overline{X_j}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_j n_{.j}\overline{X_j}\right)^2 \text{ et } s_m^2(Y) = \frac{1}{n}\sum_i n_{i.}\overline{Y_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_i n_{i.}\overline{Y_i}\right)^2,$$

$$h^2_{Y/X} = \frac{s_m^2(Y)}{s_T^2(Y)} \text{ et } h^2_{X/Y} = \frac{s_m^2(X)}{s_T^2(X)}.$$

3. De ce tableau on extrait les données suivantes qui permettent de tracer les lignes de régression.

Régression de Y en X	
y_j	$\overline{X_j}$
18,5	10,40
19,5	10,28
20,5	9,90

Régression de X en Y	
x_i	$\overline{Y_i}$
6	19,81
7,5	19,5
8,5	19,5
9,5	19,37
10,5	19,33
11,5	19,26
12,5	19,42
14	19,53

On représente ci-dessous la ligne de régression $\{(y_j, \overline{X}_j)\}$.

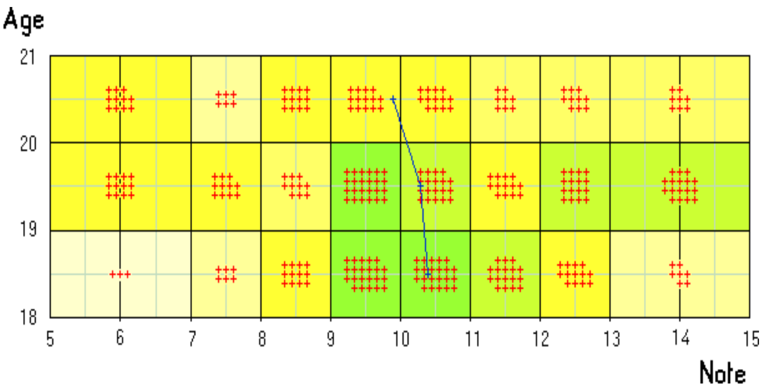


FIGURE 3 – Ligne de régression.

4. On a théoriquement (pour chaque variable), $s_T^2 = s_m^2 + s_r^2$. Étant donné que $s_T^2(X) = 4,874$, $s_m^2(X) = 0,0407$ et $s_r^2(X) = 4,8333$, on a bien la décomposition de la variance attendue. (Pour Y, on a $s_T^2(Y) = 0,597$, $s_m^2(Y) = 0,0514$ et $s_r^2(Y) = 0,5456$.)

5. On obtient dans un premier temps $h^2_{X/Y} = \frac{s_m^2(X)}{s_T^2(X)} = \frac{0,0407}{4,874} = 0,0084$. Comme le rapport de corrélation est très faible, l'âge n'explique pratiquement rien de la note obtenue : il n'y a pas de corrélation entre l'âge et la note obtenue à l'examen. Ensuite, on obtient $h^2_{Y/X} = \frac{s_m^2(Y)}{s_T^2(Y)} =$

$\dfrac{0,0514}{0,597} = 0,086$. La conclusion semble être sensiblement la même que précédemment.
Testons la significativité de $h^2_{X/Y}$ et $h^2_{Y/X}$: on utilise un test de Fisher-Snédécor (au seuil de $\alpha = 5\%$).

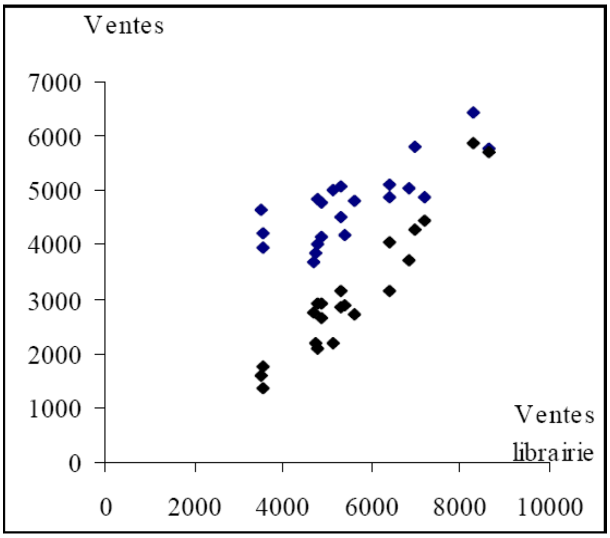
- On a pour $h^2_{X/Y}$:
$$F_{obs} = \frac{(n-k)}{k-1}\frac{h^2_{X/Y}}{1-h^2_{X/Y}} = \frac{(306-8)}{8-1}\frac{0,0084}{1-0,0084} = 0,361.$$
On compare F_{obs} à la valeur lue $F_{lu} = F_{7;298;0,95} \simeq 2,29$ et on remarque que $F_{obs} < F_{lu}$ donc on ne rejette pas l'hypothèse H_0 selon laquelle le rapport de corrélation n'est pas significatif.
- On a pour $h^2_{Y/X}$:
$$F_{obs} = \frac{(n-k)}{k-1}\frac{h^2_{Y/X}}{1-h^2_{Y/X}} = \frac{(306-3)}{3-1}\frac{0,086}{1-0,086} = 14,255.$$

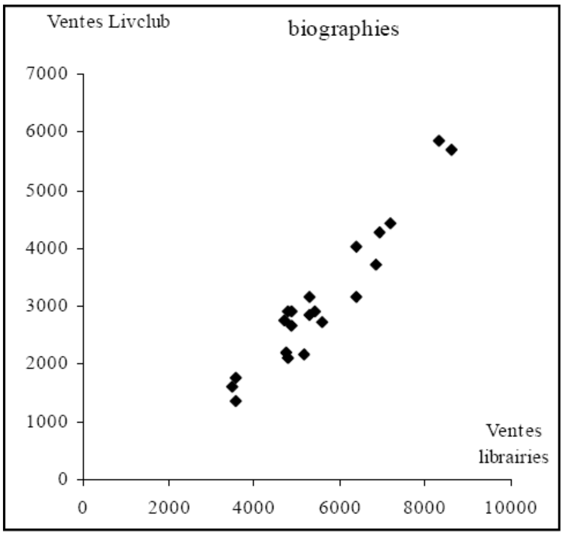
On compare F_{obs} à la valeur lue $F_{lu} = F_{2;298;0,95} \simeq 3,69$ et on remarque que $F_{obs} > F_{lu}$ donc on rejette l'hypothèse H_0 selon laquelle le rapport de corrélation n'est pas significatif (contrairement à ce qu'on pensait initialement).

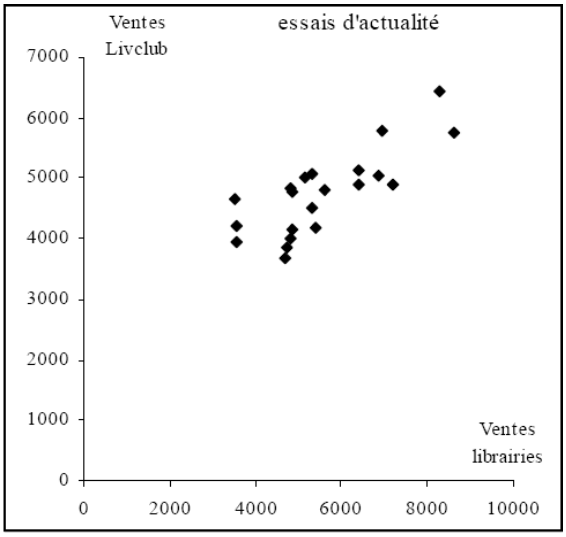
6. $Cov(X,Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i,j} n_{ij}x_iy_j - \overline{xy} = \dfrac{60727}{306} - \left(\dfrac{3127}{306}\right)\left(\dfrac{5947}{306}\right) = -0,1475$. On en déduit le coefficient de corrélation linéaire : $R(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dfrac{-0,1475}{\sqrt{4,874}\sqrt{0,597}} = -0,086$. Le coefficient de détermination est le carré du coefficient de corrélation linéaire : $R^2 = 0,0074$.
Testons maintenant la significativité de ce coefficient à l'aide d'un test de Student-Fisher au seuil de $\alpha = 5\%$. On a $T_{obs} = \sqrt{306-2}\dfrac{0,0074}{\sqrt{1-0,0074}} = 0,130$ et $T_{lu} = T_{304;0,05} = 1,94$ donc $T_{obs} < T_{lu}$, on accepte ainsi l'hypothèse H_0 selon laquelle le coefficient de corrélation linéaire R n'est pas significatif.
7. Les droites de régression sont déterminées par la méthode des moindres carrés ordinaire.
   - Régression linéaire de Y par rapport à X : on a $b = \dfrac{Cov(X,Y)}{s^2_T(X)} = \dfrac{-0,1475}{4,874} = -0,030$ et $a = \overline{y} - b\overline{x} = 19,43 + 0,030 \times 10,22 = 19,74$ ce qui donne l'équation de $D_{Y/X}$ soit
   $$D_{Y/X} \;:\; Y = 19,74 - 0,030X.$$
   - Régression linéaire de X par rapport à Y : on a $b = \dfrac{Cov(Y,X)}{s^2_T(Y)} = \dfrac{Cov(X,Y)}{s^2_T(Y)} = \dfrac{-0,1475}{0,597} = -0,247$ et $a = \overline{x} - b\overline{y} = 10,22 + 0,247 \times 19,43 = 15,02$ ce qui donne l'équation de $D_{X/Y}$ soit
   $$D_{X/Y} \;:\; X = -0,247Y + 15,02 \Leftrightarrow Y = -4,049X + 60,81.$$

Exercice 2 *Livclub* est un organisme qui distribue des livres sur catalogues. Il ne propose jamais d'ouvrage en première parution : il faut déjà qu'un ouvrage soit en vente depuis un an en librairie avant que *Livclub* ne puisse l'inscrire à son catalogue. Avant de proposer un livre à la vente, *Livclub* connaît donc son tirage en librairie.

1. On a observé la relation suivante entre les ventes dans le circuit classique de distribution en librairie et les ventes de *Livclub* : le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux variables est $\rho = 0,659$. Que peut-on dire de la qualité de la relation ?
2. En fait, dans les ouvrages précédents, il y avait deux catégories : des essais d'actualité et des biographies historiques. Les graphiques suivants représentent la relation entre les ventes en librairies et les ventes de Livclub pour chacune de ces catégories :







Des calculs ont donné les résultats suivants :

X = **ventes en librairie** et Y = **ventes de Livclub**

	Essais	Biographies
Moyenne de X	5 564,81	5 564,81
Moyenne de Y	4 743,76	3 105,44
Variance de X	1 935 081,01	1 935 081,01
Variance de Y	457 674,47	1 387 360,55
Covariance de X et Y	742 418,60	1 571 718,61

Calculer les coefficients de corrélation linéaire pour chacune des deux séries puis tester leur significativité à l'aide du test adéquat.
Livclub a décidé d'inscrire à son catalogue la biographie d'Attila le Hun qui s'est vendue en librairie à 6500 exemplaires. Combien d'ouvrages *Livclub* peut-il escompter vendre ?

Correction :

1. $|\rho| < 0,87$ donc la corrélation linéaire n'est pas bonne.
2. On a
   - $r_1 = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dfrac{742418,60}{\sqrt{1935081,01}\sqrt{457674,47}} = 0,789,$
   - $r_2 = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dfrac{1571718,61}{\sqrt{1935081,01}\sqrt{1387360,55}} = 0,959.$

On ne peut pas tester la significativité de ces coefficients car on ne connaît pas exactement l'effectif de chacun des échantillons ! Ils sont cependant très proches de 1.
Déterminons l'équation de la droite des moindres carrés $D_{Y/X} : Y = bX + a$ où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b & = & \dfrac{Cov(x,y)}{V(x)} = 0,812 \\ a & = & \overline{y} - b\overline{x} = 3105,44 - 0,812 \times 5564,81 = -1413,19 \end{array} \right. .$$

On en déduit l'équation $D_{Y/X} : 0,812X - 1413,19$.
Enfin, *Livclub* peut escompter vendre $0,812 \times 6500 - 1413,19 = 3864,81 \simeq 3865$ ouvrages de la bibliographie d'Attila le Hun si elle s'est vendue à 6500 exemplaires en librairie.

ANNEXE A - Graphique Exercice 1

Y

18

$(4, 15)$ 5 X

ANNEXE B - Tableau synthétique Exercice 1

$X \backslash Y$	$]18,19]$	$]19,20]$	$]20,21]$	x_i	$n_{i.}$	$\overline{Y_i}$	$n_{i.}\overline{Y_i}$	$n_{i.}\overline{Y_i}^2$	$n_{i.}x_i$	$n_{i.}x_i^2$
$]5,7]$	3	12	11							
$]7,8]$	6	11	6							
$]8,9]$	12	10	12							
$]9,10]$	22	24	14							
$]10,11]$	22	19	13							
$]11,12]$	17	13	8							
$]12,13]$	13	16	10							
$]13,15]$	7	17	8							
y_j										
$n_{.j}$										
$\overline{X_j}$										
$n_{.j}\overline{X_j}$									$\overline{x}$	$s_T^2(X)$
$n_{.j}\overline{X_j}^2$									$s_m^2(X)$	$h^2_{X/Y}$
$n_{.j}y_j$							$\overline{y}$	$s_m^2(Y)$		
$n_{.j}y_j^2$							$s_T^2(Y)$	$h^2_{Y/X}$		

ANNEXE C - Probabilités individuelles et cumulées de la loi de Student-Fisher $t_{\nu,\alpha}$.

Cette table donne les valeurs $t_{\nu,\alpha}$ telles que $p(\{t_{\nu,\alpha} < t_\nu < +t_{\nu,\alpha}\}) = 1 - \alpha$:

ν \ α	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,387	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,745	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,649
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,656
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,940	2,326	2,576	3,291

ANNEXE D - la loi de Fisher-Snedecor.

Cette table donne, pour $\alpha = 0,025$, pour ν_1 et ν_2 donnés, les valeurs $F_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha}$ telles que $p(\{X < F_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha}\}) = 1 - \alpha$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	19	20	24	30	40	60	120	∞
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	991,8	993,1	997,2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,18	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,58	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,34	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,18	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,48	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,02	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,68	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,44	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,24	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,09	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,96	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,86	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,77	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,70	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,63	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,58	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,90	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,53	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,48	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,44	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,41	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,37	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,35	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,32	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,29	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,27	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,25	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,23	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,21	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,09	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,96	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,84	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,74	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00