Exercice 1 Le gérant d'un hotel de luxe souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de :

- 90 draps de bain,
- 240 serviettes et
- 240 gants de toilette.

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants pour 200€.
Une deuxième entreprise vend pour 400€ un lot B de 3 draps de bains, 12 serviettes et 6 gants de toilettes.
Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots A et y lots B.

1. Traduire par un système d'inéquations les contraintes auxquelles satisfont x et y.
2. À l'aide de l'annexe A (à rendre avec la copie), représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ satisfaisant aux inéquations (on hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels les contraintes ne sont pas respectées).
3. Exprimer en fonction de x et de y la dépense en euros occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B.
4. Est-il possible de procéder aux achats nécessaires avec 5 000€ ? Justifier la réponse.
5. Déterminer graphiquement, en précisant la démarche suivie, le nombres de lots A et de lots B à acheter pour avoir une dépense minimale.
6. Quelle est cette dépense minimale ?

Exercice 2 On considère le programme linéaire ci-dessous écrit sous sa forme canonique :

$$\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{3}{2}z \leq 120 \\ \dfrac{1}{2}x + z \leq 120 \\ 2x + y + z \leq 120 \\ \text{Maximiser } Z(x, y, z) = 35x + 45y + 42z \end{cases}$$

Déterminer à l'aide de la méthode du simplexe (et des tableaux de l'annexe B, à rendre avec la copie) le programme de production optimal. On utilisera la règle du plus grand gain marginal.

Exercice 3 Considérons le programme linéaire (en variables entières) suivant :

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in \mathbb{N}^\star \\ x_1 \leq 6 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 25 \\ 2x_1 + 12x_2 \leq 43 \\ 4x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ \text{Maximiser } Z(x_1, x_2) = 9x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

1. Dessiner le polyèdre P associé à la relaxation linéaire du programme linéaire précédent (à l'aide de l'annexe C, à rendre avec la copie).
2. Résoudre le programme linéaire (en variables entières) par un algorithme de Branch-and-Bound. Les bornes sont obtenues en résolvant la relaxation linéaire. Pour trouver la solution de la relaxation linéaire, vous pouvez vous baser sur le dessin. Illustrer chaque solution ainsi trouvée sur le dessin précédent. (Donner des explications pour chacune des étapes de l'algorithme.)

Exercice 4 On souhaite résoudre le programme de maximisation (PL) suivant :

$$(\text{PL})\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ \text{Minimiser } (x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 \end{cases}$$

1. Écrire le lagrangien associé à (PL).
2. Montrer que si $(x_1^\star, x_2^\star, \lambda_1^\star, \lambda_2^\star)$ est une solution du programme (PL) alors cette solution vérifie les conditions nécessaires du premier ordre suivantes, appelées également conditions de Kuhn et Tucker :

$$\begin{cases} 2(x_1^\star - 4) + \lambda_1^\star + \lambda_2^\star & = & 0 \\ 2(x_2^\star - 4) + \lambda_1^\star + 3\lambda_2^\star & = & 0 \\ x_1^\star + x_2^\star & \leq & 4 \\ \lambda_1^\star & \geq & 0 \\ \lambda_1^\star(x_1^\star + x_2^\star - 4) & = & 0 \\ x_1^\star + 3x_2^\star & \leq & 9 \\ \lambda_2^\star & \geq & 0 \\ \lambda_2^\star(x_1^\star + 3x_2^\star - 9) & = & 0 \end{cases}$$

3. Pour déterminer les solutions du système, on envisage successivement tous les cas de figure possibles portant sur la saturation des contraintes, et procéder ainsi par élimination.
   (a) On sature les deux contraintes de (PL) au maximum à savoir que la solution $(x_1^\star, x_2^\star)$ présumée vérifie les équations $x_1^\star + x_2^\star = 4$ et $x_1^\star + 3x_2^\star = 9$. Montrer que cette situation ne donne lieu à aucune solution.
   (b) On sature la première condition seulement ($x_1^\star + x_2^\star = 4$) et on considère l'inégalité $x_1^\star + 3x_2^\star < 9$. Déterminer alors la solution.
   (c) On sature la seconde condition seulement ($x_1^\star + 3x_2^\star = 9$) et on considère l'inégalité $x_1^\star + x_2^\star < 4$. Montrer que cette situation ne donne lieu à aucune solution..
   (d) On considère les deux inégalités strictes $x_1^\star + x_2^\star < 4$ et $x_1^\star + 3x_2^\star < 9$. Montrer que cette situation ne donne lieu à aucune solution.
4. On rappelle qu'
   – *un problème d'optimisation est dit convexe s'il s'agit de la minimisation d'une fonction convexe sur une région réalisable convexe, soit de la maximisation d'une fonction concave sur une région réalisable convexe,*
   – *dans le cas d'un problème convexe, les conditions de Kuhn et Tucker sont aussi suffisantes pour montrer qu'on est à l'optimum.*

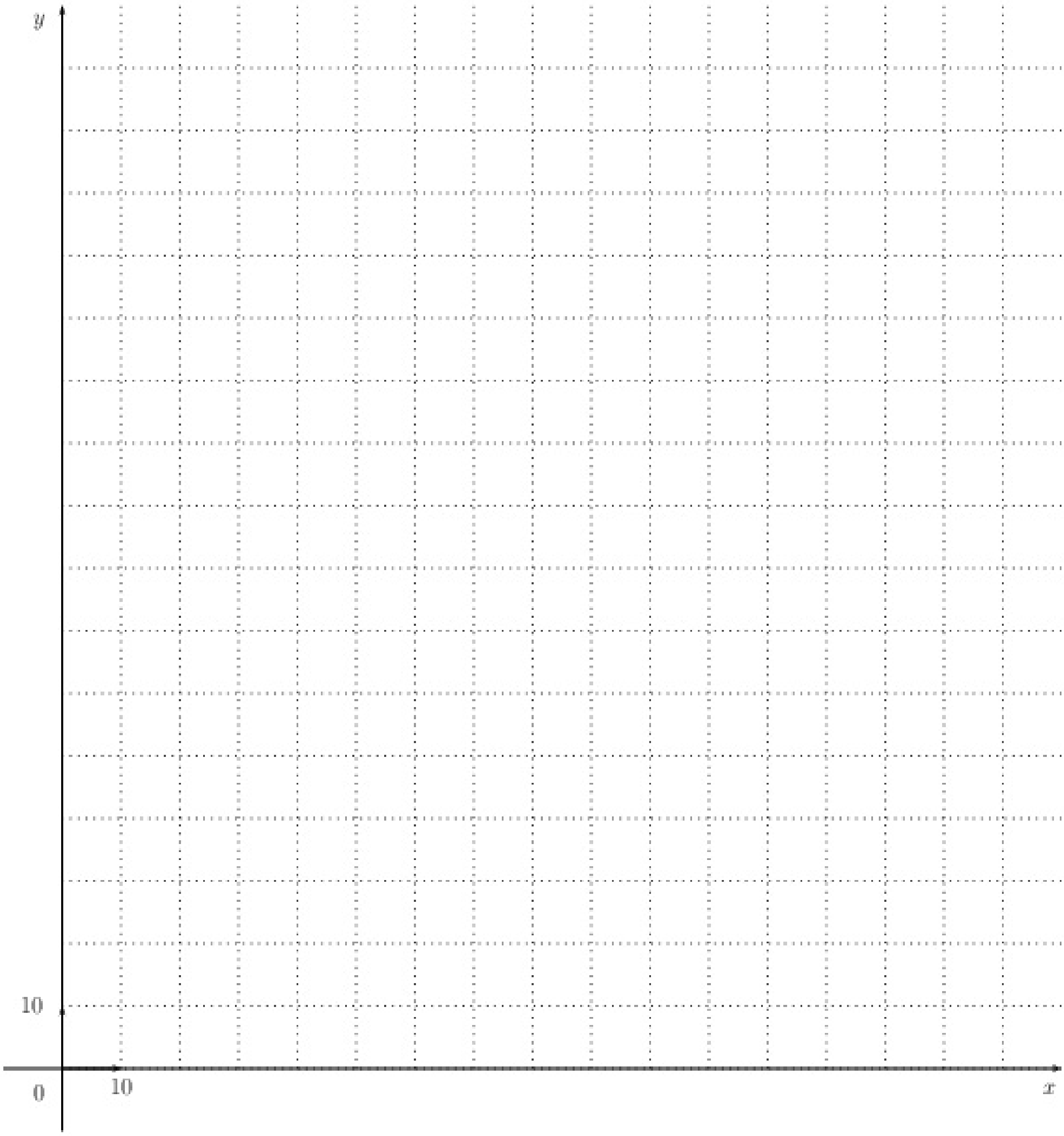
   Que peut-on alors conclure ?

Exercice 5 Le département sanitaire d'une ville dispose de 180 camions ainsi que d'un groupe de 480 hommes pour faire la cueillette des déchets. Une équipe de 3 hommes assignés à un camion ramasse l'équivalent de 6 tonnes de déchets par jour tandis qu'une équipe de 2 hommes assignés à un camion ramasse l'équivalent de 5 tonnes de déchets par jour. On souhaite utiliser le solveur d'Excel afin de déterminer le nombre d'équipes de 2 hommes et d'équipes de 3 hommes qu'on doit former afin de maximiser la quantité de déchets ramassés par jour.

Mettre en place le problème à l'aide de l'annexe D (à rendre avec la copie) sachant que les cases grisées comportent des nombres et les cases blanches des formules. Compléter les paramètres du solveur afin de déterminer la solution optimale du problème.

ANNEXE A - Exercice 1

N° de carte d'étudiant(e) : ....



ANNEXE B - Exercice 2

N° de carte d'étudiant(e) : ....

- Tableau initial :

VHB / VDB	x	y	z	e_1	e_2	e_3	cste	C
Z								–

- Tableau 2 :

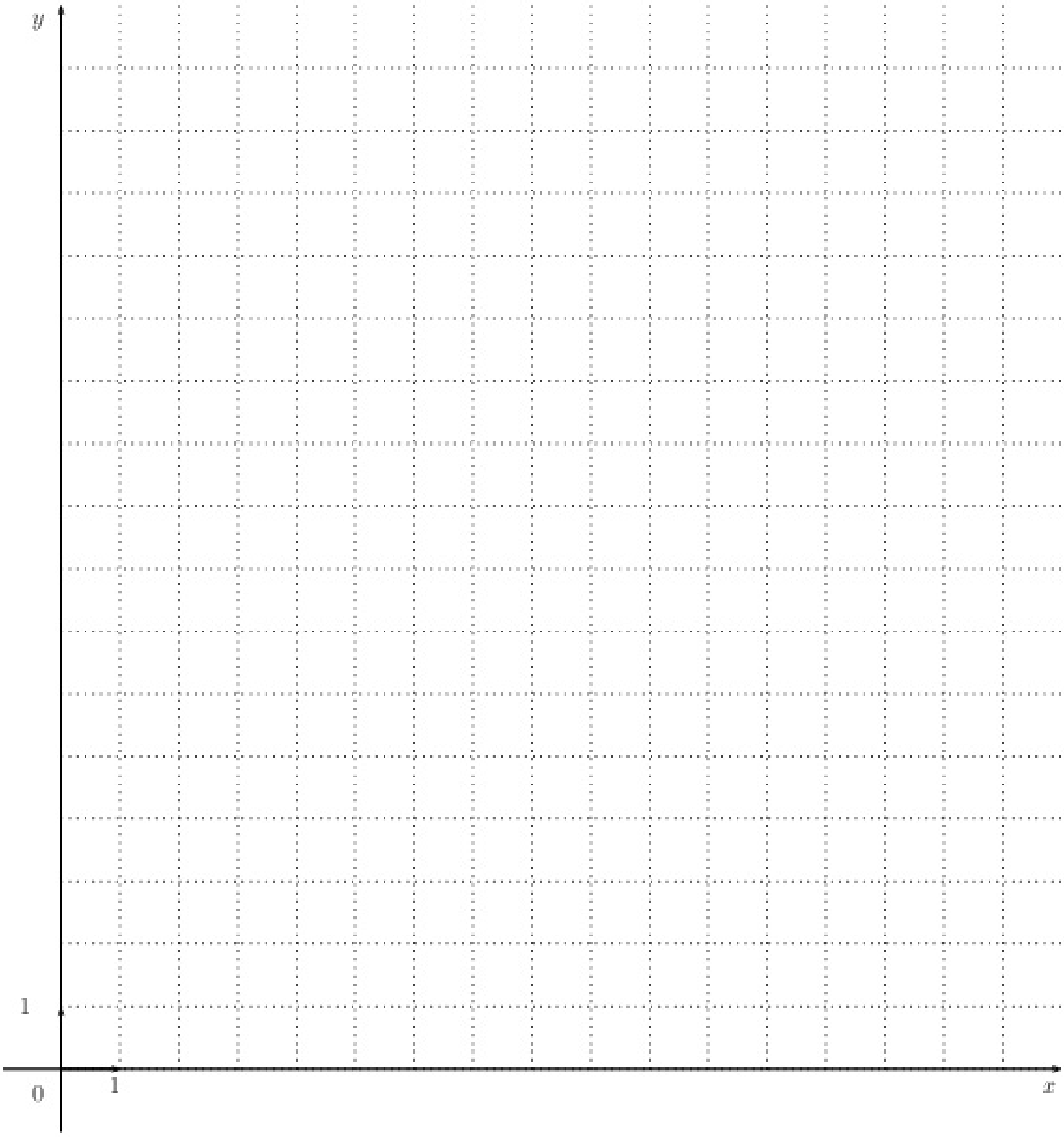
VHB / VDB	x	y	z	e_1	e_2	e_3	cste	C
Z								–

- Tableau 3 :

VHB / VDB	x	y	z	e_1	e_2	e_3	cste	C
Z								–

ANNEXE C - Exercice 3

N° de carte d'étudiant(e) : ....



ANNEXE D - Exercice 5

N° de carte d'étudiant(e) : ....