IMBS 3 ALT **ISCID-CO Dunkerque/ULCO**

Mathématiques appliquées à la gestion

Tests statistiques

Novembre 2015 - Contrôle Continu 1 - Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 - Tous documents autorisés

Exercice 1 *Correction* : 4pts

1pt On sait que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m = 50, \sigma = 0,26)$. On pose $T = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-50}{0,26}$ et $T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

1. 1,5pt On a :
$$P(X \geq 50,2) = P(T \geq 0,77) = 1 - P(T < 0,77) = 1 - \Pi_T(0,77) = 1 - 0,7794 = 0,2206.$$

2. 1,5pt $P(49,5 \leq X \leq 50,5) = P(-1,92 \leq T \leq 1,92) = 2\Pi_T(0,92) - 1 = 2 \times 0,9726 - 1 = 0,9452.$

Exercice 2 *Correction* : 10pts

Désignons par D la variable aléatoire mesurant le diamètre.

1. (a) 1,5pt On pose $T = \dfrac{D-m}{\sigma} = \dfrac{D-90}{0,16}$ et $T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors,
$$\begin{aligned} P(89,7 \leq D \leq 90,3) &= P(-1,875 \leq T \leq 1,875) = \Pi_T(1,875) - \Pi_T(-1,875) \\ &= 2\Pi_T(1,875) - 1 = 2 \times 0,9696 - 1 = 0,9392. \end{aligned}$$
0,5pt Par conséquent, la probabilité recherchée vaut $p = 1 - 0,9392 = 0,0608$.

   (b) 2pts On cherche d tel que $P(90 - d \leq D \leq 90 + d) = 0,9$. On a
$$P(90-d \leq D \leq 90+d) = 0,9 = P\left(-\frac{d}{0,16} \leq T \leq \frac{d}{0,16}\right) \Rightarrow 2\Pi_T\left(\frac{d}{0,16}\right) - 1 = 0,9$$
$$\Rightarrow 2\Pi_T\left(\frac{d}{0,16}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{d}{0,16} = 1,645 \Rightarrow d = 0,2632.$$

2. (a) i. 1pt Pour chaque pièce prélevée, il y a 2 issues possibles : soit la pièce est défectueuse, soit elle ne l'est pas. On répète l'expérience 4 fois de manière identique et indépendante. Par conséquent, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4; p = 0,06)$.

   ii. 1pt $P(X = k) = C_4^k (0,06)^k (0,94)^{4-k}$.

   iii. 0,5pt $P_1 = P(X = 3) \simeq 8,12 \times 10^{-4}$.

   iv. 1pt $P_2 = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \simeq 0,99$.

   (b) 1pt $\lambda = np = 50 \times 0,06 = 3$. On alors $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda = 3) = e^{-3} \times \dfrac{3^k}{k!}$.

   i. 0,5pt $P_3 = P(X = 0) = e^{-3} \simeq 0,050$.

   ii. 1pt $P_4 = P(X \leq 2) = (1 + 3 + \dfrac{9}{2})e^{-3} \simeq 0,42$.

Exercice 3 *Correction* : 6pts

1. On a les informations suivantes :
   - 0,5pt Population : {Enfants dyslexiques}.
   - 0,5pt Variable quantitative X ="Nombre de bonnes réponses au questionnaire"
   - 0,5pt 2 paramètres inconnus : moyenne μ et écart-type σ .

2. 0,5pt On estime la moyenne μ par la moyenne observée $\overline{x} = \dfrac{1502}{150} \simeq 10,01$.

3. $\boxed{\text{1,5pt}}$ Commençons par calculer la variance observée :

$$s^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{19486}{150} - (10,01)^2 = 29,7.$$

Calculons ensuite la variance corrigée :

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{150}{149} \times 29,7 \simeq 29,9.$$

Finalement, on estime l'écart-type σ par l'écart-type corrigé $\hat{s} = \sqrt{\hat{s}^2} \simeq 5,47$.

4. $\boxed{\text{2pts}}$ Puisque $n = 150 \geq 30$, l'estimation par intervalle de confiance à 99% est donnée par

$$IC_{0,99}(\mu) = \left[\overline{x} \pm z_{0,995}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right] = \left[10,01 \pm 2,57 \times \frac{5,47}{\sqrt{150}}\right] = [10,01 \pm 1,15] = [8,86;11,16],$$

on trouve en effet dans la table que $z_{0,995} \simeq 2,57$. Donc l'estimation de μ par l'intervalle à 99% est l'intervalle $[8,86;11,16]$.

5. $\boxed{\text{0,5pt}}$ La marge d'erreur est la demi-longueur de l'intervalle obtenu à la question précédente, elle vaut $1,15$.