IMBS 3	**ISCID-CO Dunkerque/ULCO**

Mathématiques appliquées à la gestion

Tests statistiques

Octobre 2015 - Contrôle Continu 1 - Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 - Tous documents autorisés

Exercice 1 *Correction* : 7pts

2pts Soit X le nombre de garçons dans une famille de n enfants. Pour un enfant qui naît, de deux choses l'une : ou bien c'est un garçon, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou bien c'est une fille, avec la probabilité $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Le fait de regarder si l'enfant qui naît est un garçon ou une fille constitue une épreuve de Bernoulli. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les n enfants de la famille, le nombre de succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli est le nombre X de garçons de la famille : sa loi de probabilité est une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$, et on a :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} C_n^k. \tag{1}$$

1. 1,5pt On souhaite calculer $P(X \leq 1)$. Comme les événements $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$ sont disjoints,
$$P(X \leq 1) = P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{1}{2^n} C_n^0 + \frac{1}{2^n} C_n^1 = \frac{1}{2^n}(1 + n) = \frac{n+1}{2^n}.$$
2. 1,5pt On souhaite calculer $P(1 \leq X \leq n-1)$. En utilisant le complémentaire de l'événement $\{1 \leq X \leq n-1\}$, on a
$$P(1 \leq X \leq n-1) = 1 - [P(\{X = 0\} \cup \{X = n\}] = 1 - P(X = 0) - P(X = n)$$
car les événements $\{X = 0\}$ et $\{X = n\}$ sont disjoints. Ainsi,
$$P(1 \leq X \leq n-1) = 1 - \frac{1}{2^n}[C_n^0 + C_n^n] = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$
3. 2pts Pour valider l'indépendance des deux événements, il faut vérifier que
$$P(\{X \leq 1\} \cap \{1 \leq X \leq n-1\}) = P(X \leq 1) \times P(1 \leq X \leq n-1).$$
D'après les questions précédentes,
$$P(X \leq 1) \times P(1 \leq X \leq n-1) = \frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$
Comme $\{X \leq 1\} \cap \{1 \leq X \leq n-1\} = \{X = 1\}$, on a d'après (1)
$$P(\{X \leq 1\} \cap \{1 \leq X \leq n-1\}) = \frac{n}{2^n}.$$
A t-on $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$? On prouve aisément à l'aide d'un contre-exemple que l'égalité n'est pas inconditionnellement vraie et donc que les deux événements $\{X \leq 1\}$ et $\{1 \leq X \leq n-1\}$ ne sont pas indépendants en général. En effet, si on considère le cas $n = 2$, l'égalité impliquerait que $\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ ce qui est absurde. On peut cependant prouver que les deux événements sont indépendants dans le cas particulier $n = 3$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ *Correction* : $\boxed{\text{2pts}}$
La loi de Poisson de paramètre λ est définie par :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Par conséquent, la probabilité recherchée vaut :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (e^{-3} + 3e^{-3}) = 1 - 4e^{-3} = 0,80085$$

à 10^{-5} près par défaut avec la calculatrice. Avec les tables, nous obtenons $P(X \geq 2) = 0,801$ à 10^{-3} près.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$
Désignons par Π la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

1. $\boxed{\text{2pts}}$ On obtient aisément (en utilisant la même unité à savoir le centimètre)

   $$P(19,75 < X < 20,25) = \Pi\left(\frac{20,25 - 20}{0,15}\right) - \Pi\left(\frac{19,75 - 20}{0,15}\right) = \Pi\left(\frac{5}{3}\right) - \Pi\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\Pi\left(\frac{5}{3}\right) - 1.$$

   À l'aide de la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite, on trouve $\Pi\left(\frac{5}{3}\right) = 0,9522$. On en déduit que

   $$P(19,75 < X < 20,25) = 2 \times 0,9522 - 1 = 0,9044.$$

2. $\boxed{\text{2pts}}$ Un intervalle centré en $\mu = 20$ est de la forme $\mu \pm us$. Sa probabilité est donnée par :

   $$P(\mu - us < X < \mu + us) = \Pi(u) - \Pi(-u) = 2\Pi(u) - 1.$$

   Pour avoir $P(\mu - us < X < \mu + us) = 0,95$, il faut prendre u tel que :

   $$2\Pi(u) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi(u) = \frac{1,95}{2} = 0,975 \Leftrightarrow u = 1,96$$

   d'après les tables. Finalement, l'intervalle de sécurité à 95% cherché est :

   $$[20,00 - 1,96,15; 20,00 + 1,96 \times 0,15] = [20,00 - 0,29; 20,00 + 0,29] = [19,71; 20,29].$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ *Correction* : $\boxed{\text{7pts}}$

Une estimation de m (la moyenne de la population) est donnée par $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{300}{30} = 10.$

1. L'écart-type σ est connu.
   (a) $\boxed{\text{2pts}}$ L'intervalle de confiance recherché est donné par :

   $$IC_1 = \left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Pi(0,975); \overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Pi(0,975)\right].$$

   (On rappelle que l'intervalle de confiance est bilatéral d'où l'utilisation de $\Pi(0,975)$ et non de $\Pi(0,95)$.)
   En utilisant la table de la loi normale centrée réduite, on lit $\Pi(0,975) = 1,96$. Par conséquent,

   $$IC_1 = \left[30 - \frac{3,2}{\sqrt{10}} \times 1,96; 30 + \frac{3,2}{\sqrt{10}} \times 1,96\right] = [28,017; 31,983]$$

   à 10^{-3} près par défaut.

   (b) $\boxed{\text{2pts}}$ On souhaite déterminer n tel que l'amplitude de l'intervalle précédent soit inférieure à 1mm. On impose donc que n vérifie $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Pi(0,975) \leq 1$. Comme

   $$2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Pi(0,975) \leq 1 \Leftrightarrow 2 \times \frac{3,2}{\sqrt{n}} \times 1,96 \leq 1 \Leftrightarrow n \geq 39,338,$$

   il faut un échantillon de 40 airbags au minimum pour estimer m avec une incertitude n'éxcédant pas 1 milliseconde.

2. On suppose dorénavant que σ est inconnu.

   (a) $\boxed{\text{2pts}}$ L'intervalle de confiance recherché est donné par :

$$IC_2 = \left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_9(0,975); \overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_9(0,975)\right].$$

   Puisque σ est inconnu, on utilise l'estimation $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x}))^2} = 3,266$ à 10^{-3} près par excès. En utilisant la table de Student-Fischer, on lit $t_9(0,975) = 2,262$. Par conséquent,

$$IC_2 = \left[30 - \frac{3,266}{\sqrt{10}} \times 2,262; 30 - \frac{3,266}{\sqrt{10}} \times 2,262\right] = [27,664; 32,336].$$

   à 10^{-3} près par défaut.

   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ On remarque que $IC_1 \subset IC_2$ ce qui est normal puisque le fait de connaître σ permet d'affiner l'estimation de m en construisant un intervalle de confiance plus restreint.