

Mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion

Tests statistiques

Janvier 2016 - Examen terminal - Semestre 1 - Session 1

Durée de l'épreuve : 1h30 - Tous documents autorisés (internet et téléphone interdits)

Exercice 1 Correction : 5pts

1. (a) 1pt On peut assimiler ces 40 ventes indépendantes à un schéma de Bernoulli où l'événement "succès" est "l'appareil de marque A est vendu", alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 40$ et $p = 0,386$ (la marque A réalise 38,6% du marché).
- (b) 0,5pt $P(X = 20) = C_{40}^{20} \times 0,386^{20} \times 0,614^{20} \simeq 0,04$.
- (c) 0,5pt $E(X) = np = 40 \times 0,386 = 15,44$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \times 0,386 \times 0,614} \simeq 3$.
2. (a) 1pt On peut approcher la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,386$ par la loi normale de paramètres $m = np = 15,44$ et $\sqrt{np(1-p)} = 3$.
- (b) 1pt En effectuant le changement de variable $T = \frac{Y - m}{\sigma} = \frac{Y - 15,44}{3}$, T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et on a $P(19,5 \leq Y \leq 20,5) = P(1,35 \leq T \leq 1,68) = 0,9535 - 0,9114 = 0,0421 \simeq 0,04$.
- (c) 0,5pt $P(Y > 19,5) = P(Y \geq 19,5) = P(T \geq 1,35) = 1 - P(T < 1,35) = 1 - 0,9114 = 0,0886 \simeq 0,09$.
- (d) 0,5pt $P(14,5 \leq Y \leq 25,5) = P(-0,31 \leq T \leq 3,35) = P(-0,31 \leq T \leq 0) + P(0 \leq T \leq 3,35) = 0,1217 + 0,4996 = 0,6213 \simeq 0,62$.

Exercice 2 Correction : 5pts

2pts On pose $H_0 : "p = 0,05"$ opposée à $H_1 : "p = 0,08"$. Comme $n > 30$, la variable aléatoire P : "proportion de pièces défectueuses dans un échantillon de 400 éléments" est approximativement distribuée selon la loi normale : $\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{400}}\right)$. La règle de décision est la suivante : si on note p la proportion de pièces défectueuses observées dans l'échantillon : si $p < 0,06$, on accepte H_0 , si $p > 0,06$, on refuse H_0 .

- 1,5pt Sous H_0 , $\alpha = p(P > 0,06) = p\left(U > \frac{0,06 - 0,05}{\sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{400}}}\right) = P(U > 0,92) = 0,1788$.

Le risque de refuser H_0 alors qu'elle est vraie est d'environ 0,18.

- 1,5pt Sous H_1 , $\beta = p(P < 0,06) = p\left(U < \frac{0,06 - 0,08}{\sqrt{\frac{0,08 \times 0,92}{400}}}\right) = P(U < -1,47) = 0,0708$.

Le risque d'accepter H_0 alors qu'elle est fautive est d'environ 0,07.

Exercice 3 Correction : 5pts

Le gérant de l'agence immobilière a donc réalisé 36 ventes. Elles se distribuent selon les saisons comme suit : 8 ventes en hiver, 17 au printemps, 6 en été, 5 en automne. On se demande si la répartition est uniforme suivant la saison, ou s'il y a un pic de mouvements immobiliers au printemps. Si la répartition avait été uniforme, on aurait attendu 9 ventes à chaque saison. On résume ceci dans le tableau suivant :

	Saisons	Hiver	Printemps	Été	Automne
	Ventes attendues	9	9	9	9
2pts	Ventes réalisées	8	17	6	5
	Fréquences attendues	25%	25%	25%	25%
	Fréquences réalisées	22,2%	47,2%	16,7%	13,9%

On note, par commodité, $p = (p_h; p_p; p_e; p_a)$ la loi commune des observations. On se demande si c'est la loi uniforme $p_{ref} = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

0,5pt On va tester l'hypothèse $H_0 : "p = p_{ref}"$ contre $H_1 : "p \neq p_{ref}"$.

1,5pt On a $k = 4$ classes et la valeur réalisée pour la statistique du χ^2 est

$$\chi_{obs}^2 = \frac{(8-9)^2}{9} + \frac{(17-9)^2}{9} + \frac{(6-9)^2}{9} + \frac{(5-9)^2}{9} = 10.$$

1pt Avec la table fournie, on lit $\chi_{lu}^2 = \chi_{3;0,95}^2 = 7,81$. Puisque $\chi_{lu}^2 < \chi_{obs}^2$, on rejette assez nettement l'hypothèse de répartition uniforme des ventes selon les saisons.

Exercice 4 Correction : 5pts

0,5pt Si le nombre d'arrêts de travail par jour suit une loi de Poisson, la moyenne arithmétique est une estimation ponctuelle du paramètre de la loi. Il faut calculer le nombre moyen d'arrêts de travail par jour.

La moyenne arithmétique est égale à $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i = \frac{180}{60} = 3$.

2pts Les p_i associés à la loi de Poisson $\mathcal{P}(3)$ de paramètre $\lambda = 3$ sont consignés dans le tableau suivant :

x_i	n_i	$n_i x_i$	p_i	$e_i = N p_i$
0	9	0	0,0498	2,988
1	9	9	0,1494	8,964
2	8	16	0,2240	13,44
3	11	33	0,2240	13,44
4	8	32	0,1680	10,08
5	6	30	0,1008	6,048
6	5	30	0,0504	3,024
7	3	21	0,0216	1,296
8	0	0	0,0081	0,486
9	1	9	0,0039	0,234

Remarques :

- On assimile la dernière modalité "9" à la modalité "9 et plus" donc la valeur p_i calculée est $P(X \geq 9)$. Cela permet d'avoir $\sum_i p_i = 1$ et $\sum_i N p_i = 60$.
- Certains e_i étant inférieurs à 5, on regroupe ces e_i avec les classes voisines de façon à obtenir des valeurs $n_{t,i}$ supérieures à 5. On regroupe également les n_i correspondants.

1pt Le tableau ci-dessous ne contient plus que 6 lignes.

x_i	n_i	$e_i = N p_i$	$\frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
$0 \leq x_1 \leq 1$	18	11,952	3,060
2	8	13,44	2,202
3	11	13,44	0,443
4	8	10,08	0,429
5	6	6,06	20,001
$6 \leq x_6 \leq 9$	9	5,04	3,112

1,5pt On obtient $\chi_{obs}^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - n_{t,i})^2}{n_{t,i}} \simeq 9,247$. Le nombre de degrés de liberté est $\nu = k - 1 - r$. Ici, il y a $k = 6$ classes et $r = 1$ paramètre à estimer, donc $\nu = 4$. On travaille au risque $\alpha = 0,05$. À l'aide de la table (de Pearson), on obtient $\chi_{lu}^2 = \chi_{4;0,95}^2 = 9,49$. On ne rejette donc pas l'hypothèse H_0 au risque $0,05$.

ANNEXE A - Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cette table donne $\Pi(x) = p(\{X \leq x\})$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$:

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

ANNEXE B - Quantiles de la loi du χ^2_ν

La table donne les valeurs (quantiles) $\chi^2_{\nu,1-\alpha}$ telles que $P(\chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

ν	$1 - \alpha$									
	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2