

Mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion

Tests statistiques

Janvier 2016 - Examen terminal - Semestre 1 - Session 1

Durée de l'épreuve : 1h30 - Tous documents autorisés (internet et téléphone interdits)

Exercice 1 Un revendeur de matériel photographique désire s'implanter dans une galerie marchande. Il estime qu'il pourra vendre 40 appareils photographiques par jour et les ventes sont deux à deux indépendantes. Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques disponibles, la marque A réalise 38,6% du marché.

1. On note X la variable aléatoire qui, un jour donné, associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.
 - (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
 - (b) Calculer la probabilité que, sur 40 appareils vendus par jour, 20 soient de la marque A. En donner une valeur arrondie à 0,01 près.
 - (c) Calculer l'espérance de X . Calculer l'écart type de X et en donner une valeur approchée à 1 près.
2. On décide d'approcher cette loi par une loi normale de paramètres m et σ .
 - (a) Expliquer pourquoi $m = 15,44$ et $\sigma = 3$.
Dans ce qui suit, tous les résultats seront arrondis à 0,01 près.
 - (b) On note Y la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(15,44; 3)$. Donner une approximation de la probabilité de l'événement : "un jour choisi au hasard, il y a exactement 20 appareils de marque A vendus", c'est-à-dire calculer $P(19,5 \leq Y \leq 20,5)$.
 - (c) Déterminer une valeur approchée de la probabilité de l'événement : "un jour donné, 20 au moins des appareils vendus sont de marque A", c'est-à-dire calculer $P(Y > 19,5)$.
 - (d) Déterminer une valeur approchée de la probabilité de l'événement : "un jour donné, le nombre d'appareils de marque A vendus est compris entre 15 et 25", c'est-à-dire calculer $P(14,5 \leq Y \leq 25,5)$.

Exercice 2 On se propose d'effectuer un contrôle de réception de pièces fabriquées en série. p étant le pourcentage de pièces défectueuses fabriquées, on confronte les deux hypothèses suivantes :

$H_0 : p = 0,05$, il s'agit d'un lot conforme

$H_1 : p = 0,08$ il faut renvoyer le lot.

Afin de prendre une décision, on extrait de façon aléatoire un échantillon de 400 pièces et on fixe à 0,06 la valeur critique pour le pourcentage de pièces défectueuses de l'échantillon. Définir puis calculer les risques de première et de deuxième espèces dans cette situation.

Exercice 3 On dit souvent que c'est au printemps qu'il se vend et s'achète le plus de logements, en prévision des déménagements d'été. Le gérant d'une agence immobilière, fort de ses certitudes, explique donc à ses employés qu'il faut absolument recruter un stagiaire pour les aider dans leurs tâches au printemps (mois d'avril, mai et juin). Pour cela, il s'apprête à faire le tour des formations BTS. A-t-il raison de faire cela, au risque 0,05, au vu de l'historique, mois par mois, des ventes de l'an dernier ? On se demandera si la répartition est uniforme suivant la saison, ou s'il y a un pic de mouvements immobiliers au printemps.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Ventes	1	3	4	6	6	5	3	1	2	1	2	2

Exercice 4 Dans une PME, durant les 60 derniers jours ouvrables, on a relevé chaque jour le nombre de salariés en arrêt de travail, et consigné les résultats dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	9	9	8	11	8	6	5	3	0	1

où n_i est le nombre de jours où l'on a observé x_i arrêts de travail.

Tester l'hypothèse nulle H_0 : “le nombre d'arrêts de travail par jour suit une loi de Poisson” contre l'hypothèse alternative H_1 : “le nombre d'arrêts de travail par jour ne suit pas une loi de Poisson”, au risque 0,05.

ANNEXE A - Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cette table donne $\Pi(x) = p(\{X \leq x\})$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

ANNEXE B - Quantiles de la loi du χ^2

La table donne les valeurs (quantiles) $\chi_{\nu,1-\alpha}^2$ telles que $P(\chi_{\nu}^2 < \chi_{\nu,1-\alpha}^2) = 1 - \alpha$.

ν	1 - α									
	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2