IMBS 3 **ISCID-CO Dunkerque/ULCO**

Mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion

Tests statistiques

Décembre 2015 - Examen terminal - Semestre 1 - Session 2

Durée de l'épreuve : 1h30 - Tous documents autorisés (internet et téléphone interdits)

Exercice 1 *Correction* : 5pts

1pt On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'ordinateurs en panne. On a alors $X = \{0, 1, 2, \ldots, 49, 50\}$. On considère l'épreuve de Bernoulli qui consiste à prendre un ordinateur au hasard parmi les 50 ordinateurs de l'entreprise et ayant les issues possibles :

- $\mathcal{S}$: "l'ordinateur est en panne"
- $\mathcal{E} = \overline{\mathcal{S}}$: "l'ordinateur n'est pas en panne"

On a $p(\mathcal{S}) = 0,01$ et $p(\mathcal{E}) = 1 - 0,01 = 0,99$. Une entreprise possède 50 ordinateurs. Ces ordinateurs étant indépendants les uns des autres, la loi de probabilité de X suit la loi binomiale de paramètres 50 et 0,01 notée aussi $\mathcal{B}(50; 0,01)$. On a alors $p(X = k) = C_{50}^k (0,01)^k (1 - 0,01)^{50-k}$, $\forall k \in \{0, \ldots, 50\}$.

1. 0,5pt $p(X = 0) = C_{50}^0 (0,01)^0 (0,99)^{50-0} = 0,99^{50} \simeq 0,605$.
2. 0,5pt $p(X = 5) = C_{50}^5 (0,01)^5 (0,99)^{50-5} \simeq 0,000128$.
3. 0,5pt L'événement E : "au moins un ordinateur est en panne" est le complémentaire de l'événement F : "aucun ordinateur n'est en panne". On a alors $p(E) = p(\overline{F}) = 1 - p(F) = 1 - p(X = 0) \simeq 1 - 0,605 = 0,395$.
4. (a) 0,5pt $p(X = 3)$ désigne la probabilité que 3 ordinateurs sur 50 soient en panne. On a $p(X = 3) = C_{50}^3 (0,01)^3 (0,99)^{50-3} \simeq 0,0122$.

   (b) 1,5pt $p(X \leq 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = C_{50}^0 (0,01)^0 (0,99)^{50-0} + C_{50}^1 (0,01)^1 (0,99)^{50-1} + C_{50}^2 (0,01)^2 (0,99)^{50-2} + C_{50}^3 (0,01)^3 (0,99)^{50-3} \simeq 0,699$. La probabilité que 3 ordinateurs au maximum soient en panne est de 0,7 environ. Ou bien encore, la probabilité qu'au moins 47 ordinateurs fonctionnent est de 0,7 environ.

   (c) 0,5pt On a $E(X) = np = 50 \times 0,01 = 0,5$. En moyenne, il y aura 0,5 ordinateurs en panne dans l'entreprise.

Exercice 2 *Correction* : 4pts

Soit T_D le temps de trajet du directeur ($Y = \frac{T_D - 13}{3}$), T_S celui de la secrétaire, T celui du train, B celui du bus. Soit R_D l'événement "le directeur est en retard" et R_S "la secrétaire est en retard".

1. 1pt $P(R_D) = P(T_D \geq 15) = P\left(\frac{T_D - 13}{3} \geq \frac{15 - 13}{3}\right) = 1 - P(Y \leq 0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514$.
2. 1,5pt $P(R_S) = P(T_S \geq 28) = P(\{T \geq 18\} \cup \{\{T < 18\} \cap \{B \geq 10\}\}) = p(T \geq 18) + P(T < 18)P(B \geq 10) = P\left(\frac{T-16}{2} \geq \frac{18-16}{2}\right) + P\left(\frac{T-16}{2} < \frac{18-16}{2}\right) P\left(\frac{B-9}{1} \geq \frac{10-9}{1}\right) = (1 - 0,8413) + 0,8413 \times (1 - 0,8413)$ par incompatibilité puis indépendance. On en déduit que $P(R_S) = 0,2922$ et que la probabilité $P(T_S < 28)$ recherchée vaut $1 - 0,2922 = 0,7078$.
3. 1,5pt $P(\overline{R_D} \cup \overline{R_S}) = 1 - P(R_D \cap R_S) = 1 - 0,2514 \times 0,2922 = 0,929$.

Exercice 3 *Correction* : 5pts

1. 1,5pt On calcule d'abors les effectifs théoriques en utilisant H_0. Le nombre total de ventes est égal à 150. On obtient les effectifs théoriques en multipliant 150 par les proportions théoriques données par H_0. On obtient :

N	E	L	S
60	15	45	30

$\boxed{1{,}5\text{pt}}$ Les effectifs théoriques sont supérieurs à 5, l'effectif total est égal à 150. On peut donc utiliser le test d'adéquation du χ^2. La statistique du test est :

$$\chi^2_{obs} = \frac{(48-60)^2}{60} + \frac{(10-15)^2}{15} + \frac{(50-45)^2}{45} + \frac{(42-30)^2}{30} \simeq 9,42.$$

On utilise la loi du χ^2 à 3 degrés de liberté pour déterminer la zone de rejet $]7,82;+\infty[$. La statistique de test est dans la zone de rejet $((\chi^2_{obs} = 9,42) > (\chi^2_{lu} = 7,82))$ donc on rejette H_0 : les ventes de la semaine dans le magasin testé ne correspondent pas aux proportions nationales.

2. — $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ On commet une erreur de première espèce lorsqu'on accepte l'hypothèse H_1 alors que H_0 est vraie.
   — $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ On commet une erreur de seconde espèce lorsqu'on conserve l'hypothèse H_0 alors que H_1 est vraie.
   — $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Ici, dans le cas d'une erreur de première espèce, on rejette à tort les proportions. Des actions seront alors engagées (communication, RH, aménagement du magasin) à tort.
   — $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Dans le cas d'une erreur de seconde espèce, on accepte à tort les proportions. On ne changera rien dans le magasin alors qu'il nécessiterait des actions.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{6\text{pts}}$

1. $\boxed{1{,}5\text{pt}}$ On a le tableau suivant :

X	$[9;10[$	$[10;11[$	$[11;12[$	$[12;13[$	$[13;14[$	$[14;15[$	$[15;16[$	$[16;17[$	$[17;18[$	$[18;19[$	Total
x_i	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5	18,5	–
n_i	4	9	14	26	22	34	24	17	6	4	160
$n_i x_i$	38	94,5	161	325	297	493	372	280,5	105	74	2240
$n_i x_i^2$	361	992,25	1851,5	4062,5	4009,5	7148,5	5766	4628,25	1837,5	1369	32026

$\boxed{1\text{pt}}$ Comme

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i = \frac{2240}{160} = 14$$

et

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{32026}{160} - 14^2 = 4,1625$$

c'est-à-dire que $\sigma = 2,04221$ à 10^{-5} près, la moyenne de la variable X vaut 14 et son écart-type est voisin de 2.
En moyenne, l'horaire moyen de vente des véhicules est 14h. L'écart-type nous renseigne sur la dispersion des valeurs autour de la moyenne $\overline{x}$. On sait par exemple que l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma] = [14-2;14+2] = [12;16]$ contient théoriquement 68% des valeurs de la série : approximativement 2 ventes sur 3 se déroulent entre 12h et 16h.

2. (a) $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Les hypothèses du test du χ^2 sont les suivantes :
   - H_0 : "$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(14,2)$"
   - H_1 : "X ne suit pas $\mathcal{N}(14,2)$"

   (b) $\boxed{2\text{pts}}$ On a le tableau de valeurs de la page suivante :

   (c) $\boxed{1\text{pt}}$ D'après le tableau précédent, $\chi^2_{obs} = 3,9136$. Le nombre de degrés de liberté est égal à $\nu = k-1-r = 8-2-1 = 5$. Comme $\chi^2_{lu} = \chi^2_{5;0,95} = 11,07 < \chi^2_{obs}$, on ne rejette pas l'hypothèse H_0.

<table>
<tr><th>Tranche horaire X</th><th>Nombre de ventes n_i</th><th>Probabilités théoriques p_i</th><th>Effectifs théoriques $e_i = Np_i$</th><th>Effectifs théoriques modifiés e'_i</th><th>$\frac{(e'_i-n_i)^2}{e'_i}$</th></tr>
<tr><td>$[9;10[$</td><td>4</td><td>0,0228</td><td>3,648</td><td rowspan="2">$10,688$</td><td rowspan="2">$0,5$</td></tr>
<tr><td>$[10;11[$</td><td>9</td><td>0,0440</td><td>7,04</td></tr>
<tr><td>$[11;12[$</td><td>14</td><td>0,0919</td><td>14,704</td><td>14,704</td><td>0,0337</td></tr>
<tr><td>$[12;13[$</td><td>26</td><td>0,1498</td><td>23,968</td><td>23,968</td><td>0,1723</td></tr>
<tr><td>$[13;14[$</td><td>22</td><td>0,1915</td><td>30,64</td><td>30,64</td><td>2,4363</td></tr>
<tr><td>$[14;15[$</td><td>34</td><td>0,1915</td><td>30,64</td><td>30,64</td><td>0,3685</td></tr>
<tr><td>$[15;16[$</td><td>24</td><td>0,1498</td><td>23,968</td><td>23,968</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$[16;17[$</td><td>17</td><td>0,0919</td><td>14,704</td><td>14,704</td><td>0,3585</td></tr>
<tr><td>$[17;18[$</td><td>6</td><td>0,0440</td><td>7,04</td><td rowspan="2">$10,688$</td><td rowspan="2">$0,0443$</td></tr>
<tr><td>$[18;19[$</td><td>4</td><td>0,0228</td><td>3,648</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>160</td><td>1</td><td>160</td><td>160</td><td>3,9136</td></tr>
</table>