

Mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion

Tests statistiques

Décembre 2015 - Examen terminal - Semestre 1 - Session 2

Durée de l'épreuve : 1h30 - Tous documents autorisés (internet et téléphone interdits)

Exercice 1 Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.

1. Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
2. Calculer la probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.
3. Calculer la probabilité de l'événement E : "au moins un ordinateur est en panne".
4. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.
 - (a) Que signifie $p(X = 3)$? Calculer ensuite $p(X = 3)$.
 - (b) Calculer $p(X \leq 3)$. Interpréter ce résultat.
 - (c) Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2 Dans ce problème, les durées des trajets sont supposées de loi normale.

1. Un directeur de société habite dans la ville A. Il part de chez lui à 8h45 et se rend en voiture à son bureau qui ouvre à 9h. La durée de son trajet est, en moyenne, de 13 minutes, avec un écart-type de 3 minutes. Quelle est la probabilité que le directeur arrive en retard ?
2. La secrétaire du directeur habite en A, elle va au bureau avec le train de 8h32 ; elle descend à la station B. Elle prend ensuite le bus qui part de B à 8h50 (sans attendre le train), pour aller de B à son bureau. La durée du trajet en train a pour moyenne 16 minutes, pour écart-type 2 minutes, et la durée du trajet en bus a pour moyenne 9 minutes et pour écart-type 1 minute. Les durées de trajet en train et en bus sont indépendantes. Quelle est la probabilité que la secrétaire arrive à l'heure ?
3. Quelle est la probabilité pour que le directeur ou la secrétaire (c'est-à-dire l'un au moins des deux) arrive à l'heure, les durées des trajets du directeur ou de la secrétaire étant supposées indépendantes ?

Exercice 3 Une marque de boisson vend quatre types des sodas :

- normal (N)
- exotique (E)
- light (L)
- super-light (S)

Sur l'ensemble du pays, les proportions des différents types de sodas dans les ventes de la marque sont les suivantes :

$$N : 40\% ; E : 10\% ; L : 30\% ; S : 20\%$$

On a recueilli les données suivantes, sur une semaine de ventes dans un magasin particulier :

N	E	L	S
48	10	50	42

- Effectuer le test d'adéquation suivant, au seuil de signification $\alpha = 0,05$.
 - H_0 : "dans le magasin testé, les proportions de ventes de sodas N,E,L et S sont respectivement 0,4 ; 0,1 ; 0,3 et 0,2"
 - H_1 : "dans le magasin testé, les proportions de ventes de sodas N,E,L et S ne sont pas respectivement 0,4 ; 0,1 ; 0,3 et 0,2"
- Rappeler ce qu'est une erreur de première espèce et une erreur de seconde espèce. À quoi correspondent-elles dans ce cas ?

Exercice 4 Un concessionnaire automobile commande une enquête statistique auprès d'un organisme spécialisé. Cette enquête porte sur le nombre de voitures vendues par tranche horaire dans une journée ouvrable, les tests étant réalisés sur une période de 10 jours. Le tableau ci-dessous fournit les statistiques obtenues :

Tranches horaires	[9; 10[[10; 11[[11; 12[[12; 13[[13; 14[[14; 15[[15; 16[[16; 17[[17; 18[[18; 19[
Nombre de voitures vendues	4	9	14	26	22	34	24	17	6	4

- On considère la variable X : "horaire de vente". Montrer que la moyenne de cette variable vaut 14 et que son écart-type est voisin de 2. Interpréter ces deux valeurs.
- L'organisme qui réalise l'enquête se propose d'effectuer un test du χ^2 avec un risque $\alpha = 5\%$ pour justifier l'ajustement de la loi de X à une loi normale, les paramètres de cette loi étant respectivement la moyenne et l'écart-type estimés à la question précédente.
 - Préciser l'hypothèse fondamentale H_0 .
 - Déterminer dans le tableau de l'annexe A les probabilités théoriques suivies des effectifs théoriques (lorsqu'ils ne sont pas donnés) de chaque tranche horaire.
 - Calculer l'indicateur d'écart puis conclure.

ANNEXE A - Exercice 4 - À joindre à la copie.

Tranche horaire X	Nombre de ventes n_i	Probabilités théoriques p_i	Effectifs théoriques $e_i = Np_i$	Effectifs théoriques modifiés e'_i	$\frac{(e'_i - n_i)^2}{e'_i}$
[9; 10[4	0,0228			
[10; 11[9	0,0440	7,04		
[11; 12[14	0,0919			
[12; 13[26	0,1498			
[13; 14[22	0,1915			
[14; 15[34		30,64		
[15; 16[24				
[16; 17[17				
[17; 18[6		7,04		
[18; 19[4				
Total					

ANNEXE B - Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cette table donne $\Pi(x) = p(\{X \leq x\})$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$:

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

ANNEXE C - Quantiles de la loi du χ^2_ν

La table donne les valeurs (quantiles) $\chi^2_{\nu,1-\alpha}$ telles que $P(\chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

ν	$1 - \alpha$									
	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2