IMBS 3 **ISCID-CO Dunkerque/ULCO**

Mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion

Tests statistiques

Octobre 2015 - Contrôle Continu 1 - Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 - Tous documents autorisés

Exercice 1 *Correction* : 6pts

1. 1pt On travaille à 10^{-2} près. On reconnaît un schéma de Bernoulli : une épreuve consiste à interroger une personne. Si elle est favorable au produit, l'épreuve est un succès, sinon c'est un échec. La probabilité d'un succès vaut toujours $p = 0,56$ et les $n = 200$ épreuves sont indépendantes. Par conséquent, X, la variable aléatoire qui recense le nombre de clients potentiels, est également égale au nombre de succès et suit de fait une loi $\mathcal{B}(200; 0,56)$, c'est-à-dire que pour $k = 0, 1, \dots, 200$,
$$P(X = k) = C_{200}^{k} 0,56^{k}(1 - 0,56)^{200-k}.$$
2. 1pt On a $n = 200 \geq 20$, $np = 200 \times 0,56 = 112 \geq 5$ et $n(1 - p) = 200 \times 0,44 = 88 \geq 5$. On peut donc approcher la loi suivie par X par la loi normale $\mathcal{N}(112; 7,02)$ puisque $np = 112$ et $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{49,28} = 7,02$.
3. 0,5pt On pose $T = \dfrac{X - 112}{7,02}$ et $T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$. Ainsi :
   - 1pt $P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - P(T \leq \dfrac{100 - 112}{7,02}) = 1 - P(T \leq -1,71) = 1 - (1 - P(T \leq 1,71)) = P(T \leq 1,71) = 0,9564.$
   - 1pt $P(100 \leq X \leq 150) = P(X \leq 150) - P(X \leq 99) = P(Y \leq 5,41) - P(Y \leq -1,85) = 1 - (1 - P(Y \leq 1,85)) = P(Y \leq 1,85) = 0,9678.$

   On peut faire deux remarques :
   — même si $P(Y \leq 5,41)$ n'est pas disponible dans la table, on peut présumer que la valeur est très proche de 1.
   — Comme X suit initialement une loi binomiale (donc une loi discrète), on écrit que $P(100 \leq X \leq 150) = P(X \leq 150) - P(X \leq 99)$. Si X suivait une loi continue, on écrirait que $P(100 \leq X \leq 150) = P(X \leq 150) - P(X \leq 100)$.
4. 1,5pt Soit n la taille de l'échantillon. Le nombre X de personnes favorables dans cet échantillon suit une loi normale $\mathcal{N}(0,56 \times n; \sqrt{n \times 0,56 \times 0,44})$. On cherche donc n tel que
$$0,95 = P(X \geq 100) = P\left(T \geq \frac{100 - n \times 0,56}{\sqrt{n \times 0,56 \times 0,44}}\right)$$
$$\Leftrightarrow 100 - n \times 0,56\sqrt{n \times 0,56 \times 0,44} = 1,6449 \Leftrightarrow n = 200.$$

Exercice 2 *Correction* : 4pts

1. (a) — 0,5pt On commet une erreur de première espèce lorsqu'on accepte l'hypothèse H_1 alors que H_0 est vraie.
   — 0,5pt On commet une erreur de seconde espèce lorsqu'on conserve l'hypothèse H_0 alors que H_1 est vraie.
   — 0,5pt Ici, dans le cas d'une erreur de première espèce, l'inspecteur engage des poursuites à tort.
   — 0,5pt Dans le cas d'une erreur de seconde espèce, il laisse passer des boîtes insuffisamment remplies.

(b) $\boxed{\text{1pt}}$ Le seuil de signification d'un test est précisément la probabilité de commettre une erreur de première espèce, lorsque l'hypothèse H_0 est vraie, c'est-à-dire que le poids moyen des boîtes est exactement $500g$. La probabilité de rejeter H_0 dans ce cas est donc égale à $\alpha = 0,01$.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ L'écart-type est inconnu ; on devrait utiliser une loi de Student à $110 - 1 = 109$ degrés de liberté. On considère que cette loi est très proche d'une loi normale centrée réduite. La statistique de test est

$$z = \sqrt{110} \times \frac{(495 - 500)}{20} \simeq -2,62.$$

La zone de rejet pour $\alpha = 0,01$ est $]-\infty; -2,33]$ (lecture de la table de la loi normale centrée réduite). Comme z est dans la zone de rejet, on rejette H_0.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{3pts}}$

On dénombre 60 bouteilles non conformes parmi les 1060 que compte le négociant soit une proportion $p = \dfrac{60}{1060} = \dfrac{3}{53}$ de bouteilles non conformes. On dresse le tableau suivant $\boxed{\text{2pts}}$:

Type d'alcool	Nombre total de bouteilles N_i	Nombre total de bouteilles non conformes n_i	$p_i = p$	$e_i = N_i p$	$\dfrac{(e_i - n_i)^2}{e_i}$
Whisky	225	15	$\frac{3}{53}$	12,7358	0,4025
Cognac	98	6 } 10	$\frac{3}{53}$	$5,5472$ } $8,8868$	0,1394
Liqueur	59	4	$\frac{3}{53}$	$3,3396$	
Champagne	230	11	$\frac{3}{53}$	13,0189	0,3131
Vin rosé	180	9	$\frac{3}{53}$	10,1887	0,1387
Vin d'Alsace	154	8	$\frac{3}{53}$	8,7170	0,0590
Vin de Bordeaux	114	7	$\frac{3}{53}$	6,4528	0,0464
Total	1060	60	–	60	1,0987

$\boxed{\text{1pt}}$ Le nombre de degrés de liberté est égal à $\nu = k - 1 - r = 6 - 1 - 0 = 5$. On lit dans la table $\chi^2_{lu} = \chi^2_{5;0,95} = 11,07 > \chi^2_{obs}$. Par conséquent, on ne rejette pas l'hypothèse H_0 : le type d'alcool n'a pas d'influence sur la non-conformité des bouteilles.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{\text{7pts}}$

1. Les calculs sont quasi immédiats :
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\overline{x} = \dfrac{74900}{3500} = 21,4$.
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{1844875}{3500} - (21,4)^2} = \sqrt{69,14} = 8,31$.

2. (a) On pose $T = \dfrac{X - 21}{8}$ et $T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $P(X \in [5;10[) = P(5 \leq X < 10) = P(\dfrac{5-21}{8} \leq T < \dfrac{10-21}{8}) = P(-2 \leq T < -1,375) = P(T < -1,375) - P(T \leq -2) = P(T \leq 2) - P(T < 1,375) = 0,9772 - 0,9162 = 0,0610$.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $P(X \in [20;25[) = P(20 \leq X < 25) = P(\dfrac{20-21}{8} \leq T < \dfrac{25-21}{8}) = P(-0,125 \leq T < 0,5) = P(T < 0,5) - P(T \leq -0,125) = P(T < 0,5) - (1 - P(T \geq 0,125)) = 0,6915 - (1 - 0,5517) = 0,2432$.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $P(X \in [35;+\infty[) = 1 - P(X < 35) = 1 - P(T < \dfrac{35-21}{8}) = 1 - P(T < 1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401$.

   (b) On assimile les classes $[0;5[$ et $[35;40[$ à $]-\infty;5[$ et $[35;+\infty[$ respectivement afin de travailler sur $\mathbb{R}$ tout entier et de vérifier $\sum_i p_i = 1$. On a le tableau de valeurs de la page suivante $\boxed{\text{2pts}}$.

Classe	Classe élargie	Effectif n_i	p_i	$e_i = Np_i$	$\frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
$[0;5[$	$]-\infty;5[$	50	0,0228	79,8	11,13
$[5;10[$	$[5;10[$	250	0,0610	213,5	6,24
$[10;15[$	$[10;15[$	500	0,1428	499,8	0
$[15;20[$	$[15;20[$	800	0,2217	775,95	0,75
$[20;25[$	$[20;25[$	700	0,2432	851,2	26,86
$[25;30[$	$[25;30[$	650	0,1793	627,55	0,80
$[30;35[$	$[30;35[$	320	0,0891	311,85	0,21
$[35;40[$	$[35;+\infty[$	230	0,0401	140,35	57,26
Total	–	3500	1	3500	103,25

L'indicateur d'écart est égal à $\chi^2_{obs} = 103,25$.

(c) $\boxed{\text{1pt}}$ Le nombre de degrés de liberté est égal à $\nu = k - r - 1 = 8 - 1 - 2 = 5$. Par conséquent, la table du χ^2 nous fournit $\chi^2_{lu} = \chi^2_{5;0,95} = 11,07$ et $\chi^2_{lu} < \chi^2_{obs}$. On rejette par conséquent l'hypothèse H_0 : le responsable doit convenir que les livraisons ne suivent pas les prévisions.