

Mathématiques appliquées à l'économie et à la gestion

Tests statistiques

Novembre 2015 - Examen terminal - Semestre 1 - Session 1

Durée de l'épreuve : 1h30 - Tous documents autorisés (internet et téléphone interdits)

Exercice 1 Une enquête marketing a pour but de vérifier si les cibles potentielles seraient tentées par un nouveau produit. Il a été montré que 56% des gens sont favorables au nouveau produit. Pour aller plus loin, on interroge à nouveau 200 personnes.

1. Quelle est la loi du nombre de clients potentiels parmi les 200 ?
2. Par quelle loi peut-on l'approcher et pourquoi ?
3. Calculer $P(X > 100)$ et $P(100 \leq X \leq 150)$.
4. Déterminer la taille de l'échantillon de personnes à interroger pour que notre échantillon contienne au moins 100 personnes favorables, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 2 L'emballage de boîtes de café indique une contenance de 500g. Un inspecteur de la répression des fraudes souhaite vérifier que les boîtes contiennent effectivement au moins 500g. Dans le cas contraire, il demandera des sanctions. Il réalise donc le test d'hypothèse suivant, en utilisant le seuil de signification $\alpha = 1\%$:

H_0 : "les boîtes contiennent un poids moyen de café supérieur ou égal à 500g".

H_1 : "les boîtes contiennent un poids moyen de café strictement inférieur à 500g".

1. (a) Rappeler ce qu'est une erreur de première espèce et une erreur de seconde espèce. À quoi correspondent-elles dans ce cas ?
(b) Supposons que les boîtes contiennent en moyenne exactement 500g de café. Quelle est la probabilité que l'inspecteur conclue qu'il faut rejeter H_0 ?
2. L'inspecteur dispose d'un échantillon de 110 boîtes ; la moyenne d'échantillon est de 495g, et l'écart-type d'échantillon de 20g. Calculer la statistique de test, puis conclure en expliquant votre démarche

Exercice 3 Une statistique relative au nombre de bouteilles non conformes (cassées, abimées, manquantes,...) chez un négociant en alcool fait ressortir, selon le type d'alcool considéré les répartitions suivantes :

Type d'alcool	Nombre total de bouteilles	Nombre total de bouteilles non conformes
Whisky	225	15
Cognac	98	6
Liqueur	59	4
Champagne	230	11
Vin rosé	180	9
Vin d'Alsace	154	8
Vin de Bordeaux	114	7

Peut-on admettre une répartition uniforme des bouteilles non conformes chez ce négociant ? On testera l'hypothèse au risque $\alpha = 5\%$ selon laquelle le type d'alcool n'a pas d'influence sur la non-conformité des bouteilles ?

Exercice 4 Un hypermarché assure les livraisons à domicile. Le tableau suivant donne le nombre de livraisons effectuées dans un trimestre, selon la distance du magasin au point de livraison.

Distance X (en km)	$[0; 5[$	$[5; 10[$	$[10; 15[$	$[15; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 30[$	$[30; 35[$	$[35; 40[$
Effectifs	50	250	500	800	700	650	320	230

On donne les résultats suivants :

$$\sum_i n_i x_i = 74900 \quad \text{et} \quad \sum_i n_i x_i^2 = 1844875$$

où n_i et x_i désignent respectivement l'effectif de la classe $[a_i; a_{i+1}[$ et son centre.

1. Calculer sur cet échantillon la moyenne arithmétique \bar{x} ainsi que l'écart-type σ_x .
2. Lors de la mise en place du service de livraison, le responsable de l'hypermarché souhaitait (dans un souci de rentabilité) que la variable aléatoire X , distance en kilomètres de la livraison, soit gaussienne de moyenne 21 et d'écart-type 8 (c'est-à-dire que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(21; 8)$). Afin de prendre une décision sur la poursuite de ce service, il réalise un test du χ^2 sur les livraisons observées :
 - H_0 : "les livraisons suivent les prévisions",
 - H_1 : "les livraisons ne suivent pas les prévisions",

et ceci avec un risque $\alpha = 5\%$.

Sous H_0 , on donne le tableau des probabilités suivantes :

Distance X (en km)	$] -\infty; 5[$	$[5; 10[$	$[10; 15[$	$[15; 20[$	$[20; 25[$	$[25; 30[$	$[30; 35[$	$[35; +\infty[$
$p_i = p(X \in [a_i; a_{i+1}[)$	0,0228	0,0610	0,1428	0,2217	0,2432	0,1793	0,0891	0,0401

- (a) Retrouver les trois résultats ci-dessous
 - $P(X \in [5; 10]) = 0,0610$
 - $P(X \in [20; 25]) = 0,2432$
 - $P(X \in [35; +\infty]) = 0,0401$
- (b) Calculer les effectifs théoriques ainsi que l'indicateur d'écart.
- (c) Que peut conclure le responsable au vu des résultats sur la poursuite du service ?

ANNEXE A - Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cette table donne $\Pi(x) = p(\{X \leq x\})$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$:

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

ANNEXE B - Quantiles de la loi du χ^2_ν

La table donne les valeurs (quantiles) $\chi^2_{\nu,1-\alpha}$ telles que $P(\chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

ν	$1 - \alpha$									
	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2