

Une Introduction aux Formes Quadratiques : Géométrie, Algèbre et Arithmétique

Isar Stubbe

(Version du 17 mars 2025 à 11:02)

Table des matières

1	Espaces quadratiques	1
1.1	Géométrie : espaces	1
1.2	Algèbre : matrices	5
1.3	Arithmétique : polynômes	8
1.4	Exercices	10
2	Régularité et orthogonalité	13
2.1	Espace dual	13
2.2	Espace quadratique régulier	16
2.3	Exercices	21
3	Sommes orthogonales	23
3.1	Somme interne	23
3.2	Somme externe	27
3.3	Exercices	31
4	Diagonalisation	33
4.1	Représentation	33
4.2	Diagonalisation	35
4.3	Exercices	40
5	Classification des espaces quadratiques complexes, réels et finis	43
5.1	Espaces quadratiques complexes	43
5.2	Espaces quadratiques réelles	44
5.3	Espaces quadratiques finis	46
5.4	Exercices	49
6	Isotropie et plans hyperboliques	51
6.1	Espaces hyperboliques	51
6.2	Décomposition de Witt	54
6.3	Exercices	56
7	Simplification et décomposition de Witt	59
7.1	Les théorèmes de Witt	59
7.2	La démonstration de la simplification	60

7.3 Exercices	63
8 Etude du groupe orthogonal	65
8.1 Réflexions	65
8.2 Exemples	68
8.3 Exercices	72
9 Anneau de Witt : définition	75
9.1 Un double monoïde	75
9.2 Groupe de Grothendieck et anneau de Witt	79
9.3 Exercices	82
10 Anneau de Witt : exemples	85
10.1 Sur le corps des nombres complexes	85
10.2 Sur le corps des nombres réels	86
10.3 Sur un corps fini	86
10.4 Exercices	88
Références	91

1. Espaces quadratiques

Dans le cours de géométrie en L3 Math, nous avons étudié en particulier le *groupe orthogonal* $O(V)$ d'un *espace euclidien* V : ses éléments sont exactement les isomorphismes linéaires $f: V \rightarrow V$ préservant le produit scalaire sur V . Dans la suite, nous allons nous intéresser à une vaste généralisation de cette situation : nous remplacerons l'espace euclidien par un espace vectoriel V (de dimension finie) sur un corps F (de caractéristique différente de 2) muni d'une forme bilinéaire symétrique quelconque $b: V \times V \rightarrow F$.

1.1. Géométrie : espaces

On fixe un corps quelconque F . Pour V un espace vectoriel sur F , on note $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \dots \in V$ les éléments de V . Pour l'instant, nous ne fixons aucune base de V (et V peut être de dimension infinie).

Définition 1.1.1 Une forme¹ $b: V \times V \rightarrow F: (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto b(\underline{x}, \underline{y})$ est dite

1. bilinéaire si $b(\underline{x}, -): V \rightarrow F: \underline{y} \mapsto b(\underline{x}, \underline{y})$ et $b(-, \underline{y}): V \rightarrow F: \underline{x} \mapsto b(\underline{x}, \underline{y})$ sont linéaires

2. symétrique si $b(\underline{x}, \underline{y}) = b(\underline{y}, \underline{x})$

(pour tout \underline{x} et \underline{y} dans V , bien sûr).

Exemple 1.1.2 Pour $F = \mathbb{R}$ et $V = \mathbb{R}^2$, le produit scalaire usuel $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2$ est une forme bilinéaire symétrique.

Exemple 1.1.3 On note $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus n à coefficients dans \mathbb{R} . Pour un polynôme $f(X) = a_nX^n + \dots + a_1X + a_0$ on note $f'(X) = na_nX^{n-1} + \dots + 2a_2X + a_1$ pour sa dérivée (formelle). L'application

$$b: \mathbb{R}_{\leq n}[X] \times \mathbb{R}_{\leq n}[X] \rightarrow \mathbb{R}: (f, g) \mapsto f'(1)g(0)$$

est une forme bilinéaire (non-symétrique).

Exemple 1.1.4 Soit $F^{k \times k}$ l'espace de matrices $k \times k$ à coefficients dans F ; on note typiquement $M = (m_{ij})_{i,j}$ pour les éléments d'une matrice. L'application

$$b: F^{k \times k} \times F^{k \times k} \rightarrow F: (M, N) \mapsto m_{11}n_{11} + m_{22}n_{22} + \dots + m_{kk}n_{kk}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

1. Le mot "forme" est utilisé ici dans le sens d'une application d'une puissance d'un espace vectoriel V vers le corps de base F ; donc typiquement $f: V^m \rightarrow F$ où $V^m = V \times \dots \times V$ est le produit ("cartésien") à m facteurs.

Dans le cours de géométrie en L3 Math, nous avons souligné l'importance de la norme $\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$ associée au produit scalaire d'un espace euclidien V . Par ailleurs, on vérifie facilement que le produit scalaire est à son tour déterminé par la norme :

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \frac{1}{2}(\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 - \|\underline{x}\|^2 - \|\underline{y}\|^2).$$

Observons que c'est en fait la quantité $q(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x}$ que l'on utilise dans cette formule. Nous voulons maintenant développer cette même idée pour une forme bilinéaire quelconque. Cependant, la formule ci-dessus contenant la fraction $\frac{1}{2}$, on doit donc s'assurer que $2 \neq 0$ dans le corps F .

Convention 1.1.5 Dans la suite du cours, tout corps sera de caractéristique différente de 2.

Cela nous permet de poser :

Définition 1.1.6 Une forme $q: V \rightarrow F: \underline{x} \mapsto q(\underline{x})$ est dite quadratique si

1. $q(a\underline{x}) = a^2q(\underline{x})$ pour tout $a \in F$ et $\underline{x} \in V$,
2. et la formule $b_q(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2}(q(\underline{x} + \underline{y}) - q(\underline{x}) - q(\underline{y}))$ définit une forme bilinéaire.

Dans ce cas, on appelle (V, q) un espace quadratique.

Exemple 1.1.7 L'application $q: F^{k \times k} \rightarrow F: M \mapsto \det(M)$ est une forme quadratique si et seulement si $k = 2$.

L'observation suivante est cruciale :

Proposition 1.1.8 1. Si $b: V \times V \rightarrow F$ est une forme bilinéaire (pas nécessairement symétrique), alors

$$q_b: V \rightarrow F: \underline{x} \mapsto b(\underline{x}, \underline{x})$$

est une forme quadratique.

2. Si $q: V \rightarrow F$ est une forme quadratique, alors

$$b_q: V \times V \rightarrow F: (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \frac{1}{2}(q(\underline{x} + \underline{y}) - q(\underline{x}) - q(\underline{y}))$$

est une forme bilinéaire symétrique.

3. La correspondance entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques est bijective :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{formes bilinéaires symétriques sur } V\} & \xrightarrow{\quad} & \{\text{formes quadratiques sur } V\} \\ b & \longmapsto & q_b \\ b_q & \longleftarrow & q \end{array}$$

Démonstration. Exercice. □

Dans la suite on confondra, pour un espace vectoriel V donné, la donnée d'une forme quadratique $q: V \rightarrow F$ et la donnée d'une forme bilinéaire symétrique $b: V \times V \rightarrow F$, lorsqu'elles se déterminent mutuellement via la correspondance de la Proposition précédente; on écrira $(V, q) = (V, b)$ pour l'espace quadratique, si le contexte est sans ambiguïté.

Exemple 1.1.9 Pour la forme bilinéaire symétrique

$$b: F^{k \times k} \times F^{k \times k} \rightarrow F: (M, N) \mapsto m_{11}n_{11} + m_{22}n_{22} + \dots + m_{kk}n_{kk}$$

on trouve la forme quadratique $q_b: F^{k \times k} \rightarrow F: M \mapsto \sum_i m_{ii}^2$.

Exemple 1.1.10 Pour la forme quadratique $q: F^{2 \times 2} \rightarrow F: M \mapsto \det(M) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$ on trouve la forme bilinéaire symétrique

$$b_q: F^{2 \times 2} \times F^{2 \times 2} \rightarrow F: (M, N) \mapsto \frac{1}{2} \left(m_{11}n_{22} + n_{11}m_{22} - m_{12}n_{21} - m_{21}n_{12} \right).$$

Remarque 1.1.11 Nous ne demandons pas que le corps F soit \mathbb{R} , ou même un corps ordonné², et donc il n'a pas de sens de demander que “la forme quadratique soit positive”, ou que “la forme bilinéaire soit définie positive”, comme c'est le cas pour le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 (ou même \mathbb{R}^n). En effet, c'est exactement cette positivité (sur \mathbb{R}) qui distingue les produits scalaires parmi les formes bilinéaires symétriques. On peut donc bien faire appel à notre “intuition réelle”, car \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel est bel et bien un *exemple* d'un espace quadratique—mais la théorie *générale* des espaces quadratiques réserve tout de même quelques surprises et subtilités!

Nous voulons maintenant définir le groupe orthogonal d'un espace quadratique quelconque. Nous avons donc tout intérêt à étudier d'abord les applications linéaires adéquates entre espaces quadratiques quelconques :

Proposition 1.1.12 Soient des espaces quadratiques (V, q) et (V', q') (avec b et b' les formes bilinéaires symétriques associées). Pour une application linéaire $f: V \rightarrow V'$ on a l'équivalence des conditions suivantes :

1. $q(\underline{x}) = q'(f\underline{x})$, (pour tout $\underline{x} \in V$),
2. $b(\underline{x}, \underline{y}) = b'(f\underline{x}, f\underline{y})$ (pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in V$).

On dit alors que f est une application linéaire isométrique (pour q et q').

Démonstration. Exercice. □

Pour une application linéaire isométrique $f: (V, q) \rightarrow (V', q')$ on peut visualiser les conditions équivalentes de la Proposition ci-dessus : elles expriment la commutativité des diagrammes suivantes :



2. Nous reviendrons sur la notion de ‘corps ordonné’ dans un chapitre ultérieur.

Il est alors évident que la composée de deux applications linéaires isométriques est encore une application linéaire isométrique, et que l'application "identité" $\text{id}_V: V \rightarrow V: \underline{x} \mapsto \underline{x}$ est une application linéaire isométrique, quelque soit la forme quadratique que l'on met sur V . (Les espaces quadratiques et les applications linéaires isométriques forment une catégorie.)

Exemple 1.1.13 L'application linéaire $i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y) \mapsto (x, y, 0)$ est isométrique pour les produits scalaires usuels sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 ; par contre, l'application linéaire $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto (x, y)$ ne l'est pas.

Exemple 1.1.14 L'application linéaire $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x - y$ est isométrique pour les formes bilinéaires symétriques $b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ et $b'(s, t) = st$ (mais elle ne l'est pas pour les produits scalaires usuels).

En "oubliant" les formes quadratiques, il est clair que toute application linéaire isométrique $f: (V, q) \rightarrow (V', q')$ a une application linéaire *sous-jacente* $f: V \rightarrow V'$. On laisse en exercice la démonstration de :

Proposition 1.1.15 Soit une application linéaire isométrique $f: (V, q) \rightarrow (V', q')$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une (unique) application linéaire isométrique $g: (V', q') \rightarrow (V, q)$ telle que $g \circ f = \text{id}_{(V, q)}$ et $f \circ g = \text{id}_{(V', q')}$,
2. l'application linéaire sous-jacente $f: V \rightarrow V'$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (dont $g: V' \rightarrow V$ est l'(unique) inverse).

(Le foncteur "oubli" de la catégorie des espaces quadratiques à la catégorie des espaces vectoriels est fidèle et conservateur.) On introduit la terminologie suivante :

Définition 1.1.16 Une isométrie $f: (V, q) \rightarrow (V', q')$ d'espaces quadratiques est une application linéaire isométrique telle que $f: V \rightarrow V'$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (un "isomorphisme isométrique" donc).

Attention : dans ce cours, par "isométrie" on veut dire *isométrie linéaire* et non pas *isométrie affine*, comme dans le cours de géométrie en L3 Math.

Exemple 1.1.17 L'espace vectoriel F^4 est isomorphe à $F^{2 \times 2}$; explicitement on peut décrire cet isomorphisme par

$$f: F^4 \rightarrow F^{2 \times 2}: (w, x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}.$$

Si on définit la forme quadratique $q(w, x, y, z) = wz - xy$ sur F^4 , alors l'isomorphisme f est une isométrie de (F^4, q) à $(F^{2 \times 2}, \det)$.

Remarque 1.1.18 Soit (V, q) un espace quadratique, et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $q: V \rightarrow F$ à W définit un espace quadratique $(W, q|_W)$ tel que l'inclusion canonique

$i: (W, q|_W) \rightarrow (V, q): \underline{w} \rightarrow \underline{w}$ est (linéaire et) isométrique. On dit alors que $(W, q|_W)$ est un *sous-espace quadratique* de (V, q) , et si le contexte est clair on le note tout simplement (W, q) . Plus généralement, toute application linéaire injective isométrique $f: (V, q) \rightarrow (V', q')$ détermine l'isométrie $f: (V, q) \rightarrow (\text{im}(f), q'|_{\text{im}(f)})$, dont l'espace but est un sous-espace quadratique de (V', q') ; ainsi on peut dire que (V, q) est un sous-espace quadratique de (V', q') à *isométrie près*.

Exemple 1.1.19 L'inclusion $i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y) \mapsto (x, y, 0)$ étant isométrique pour les produits scalaires usuels (cf. Exemple 1.1.13), on peut identifier \mathbb{R}^2 à son image ("le plan XY ") et le considérer comme un sous-espace quadratique de \mathbb{R}^3 .

Finalement, pour les groupes des *automorphismes* d'un espace quadratique, on introduit la terminologie et la notation suivantes :

Définition 1.1.20 Le groupe orthogonal d'un espace quadratique (V, q) est

$$\mathcal{O}(V, q) = \{f: (V, q) \rightarrow (V, q) \mid f \text{ est une isométrie}\}.$$

Notons tout de suite une évidence : si $f: (V, q) \rightarrow (V', q')$ est une isométrie d'espaces quadratiques, alors $\mathcal{O}(V, q) \rightarrow \mathcal{O}(V', q'): g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$ est un isomorphisme de groupes (exercice). En mots : deux espaces quadratiques isométriques ont leurs groupes orthogonaux isomorphes. Et finalement, par la Proposition 1.1.15, il suit que $\mathcal{O}(V, b)$ est un sous-groupe de $GL(V)$ (= le groupe des isomorphismes linéaires de V).

1.2. Algèbre : matrices

Jusqu'à présent, notre approche aux espaces quadratiques (V, q) et leurs isométries était "canonique" : on ne faisait nullement référence à une éventuelle base de V . Si on *choisit* une base dans V , et on suppose que V est de dimension finie, alors on peut se servir du calcul matriciel.

Convention 1.2.1 Dans la suite du cours, tout espace vectoriel sera de dimension finie.

Soit $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ une base d'un espace vectoriel V ; on peut donc écrire tout $\underline{x} \in V$ de façon unique comme $\underline{x} = \sum_i x_i \underline{e}_i$. Toute forme bilinéaire symétrique $b: V \times V \rightarrow F$ détermine une matrice symétrique

$$(b(\underline{e}_i, \underline{e}_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} b(\underline{e}_1, \underline{e}_1) & \cdots & b(\underline{e}_1, \underline{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\underline{e}_n, \underline{e}_1) & \cdots & b(\underline{e}_n, \underline{e}_n) \end{pmatrix} \in F^{n \times n}.$$

Réciproquement, si $B \in F^{n \times n}$ est une matrice symétrique quelconque, alors la formule

$$b\left(\sum_i x_i \underline{e}_i, \sum_i y_i \underline{e}_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

définit une forme bilinéaire symétrique. Ainsi, pour V un espace vectoriel muni d'une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, la procédure décrite ci-dessus donne une correspondance bijective entre les formes

bilinéaires symétriques $b: V \times V \rightarrow F$, et les matrices symétriques $B \in F^{n \times n}$. (Exercice : écrire les détails.)

Exemple 1.2.2 Soit la forme bilinéaire symétrique

$$b: \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \times \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \rightarrow \mathbb{R}: (f, g) \mapsto f'(1)g'(1).$$

La base “canonique” de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ est $(X^3, X^2, X, 1)$; pour cette base on peut calculer la matrice symétrique

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Étudions ensuite la “version matricielle” de morphisme entre espaces quadratiques :

Proposition 1.2.3 Soient deux espaces quadratiques (V, b) et (V', b') , avec des bases $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_m)$, et les matrices symétriques $B = (b(\underline{e}_i, \underline{e}_j))_{i,j} \in F^{n \times n}$ et $B' = (b'(\underline{e}'_i, \underline{e}'_j))_{i,j} \in F^{m \times m}$. Pour une application linéaire $f: V \rightarrow V'$ de matrice $C \in F^{m \times n}$ par rapport aux bases données, on a l'équivalence des assertions suivantes :

1. f est isométrique,
2. $B = C^t B' C$.

En particulier, f est une isométrie si et seulement si C est inversible et $B = C^t B' C$; on dit alors que les matrices symétriques B et B' sont congruentes.

Démonstration. (1) \Rightarrow (2) Rappelons que la matrice $C = (c_{ij})_{i,j}$ est telle que $f(\underline{e}_i) = \sum_j c_{ij} \underline{e}'_j$. Autrement dit, pour tout $\underline{x} = \sum_i x_i \underline{e}_i$ dans V on a $f\underline{x} = \sum_i x'_i \underline{e}'_i$ dans V' , où

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Puisque f est isométrique, on sait que $b(\underline{x}, \underline{y}) = b'(f\underline{x}, f\underline{y})$ pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in V$, ce qui veut dire pour les matrices B et B' que

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = b(\underline{x}, \underline{y}) = b'(f\underline{x}, f\underline{y}) = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_m \end{pmatrix} B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}.$$

Mais on a également le calcul matriciel

$$\begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_m \end{pmatrix} B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \left[C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t B' \left[C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} C^t B' C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Il suit ainsi que

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} C^t B' C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in F^n$, d'où $B = C^t B' C$.

(2) \Rightarrow (1) Exercice. □

Ainsi, deux espaces quadratiques (V, q) et (V', q') sont isométriques si et seulement si les matrices symétriques B et B' (déterminées par des bases aux choix de V et de V') sont congruentes.

Exemple 1.2.4 Soit encore la forme bilinéaire symétrique

$$b: \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \times \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \rightarrow \mathbb{R}: (f, g) \mapsto f'(1)g'(1),$$

mais équipons l'espace $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ de la base $(X^3 + X^2 + X + 1, X^2 + X + 1, X + 1, 1)$. Pour cette base aussi on peut calculer une matrice symétrique, soit :

$$B' = \begin{pmatrix} 36 & 18 & 6 & 0 \\ 18 & 9 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut donner explicitement la congruence $B = C^t B' C$ avec la matrice symétrique B calculée ci-dessus : la matrice C est la matrice du changement de base de $(X^3, X^2, X, 1)$ à $(X^3 + X^2 + X + 1, X^2 + X + 1, X + 1, 1)$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons aussi utiliser la Proposition 1.2.3 pour donner une description matricielle du groupe orthogonal :

Théorème 1.2.5 Soit (V, q) un espace quadratique. Si B est la matrice symétrique de (la forme bilinéaire symétrique b définie par) q pour une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ de V , alors on a un isomorphisme de groupes

$$\mathcal{O}(V, q) \cong \{C \in F^{n \times n} \mid B = C^t B C \text{ et } C \text{ est inversible}\}.$$

Démonstration. L'isomorphisme envoie une isométrie $f: (V, q) \rightarrow (V, q)$ sur sa matrice par rapport à la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$. □

Exemple 1.2.6 : Pour \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel et de la base canonique, on trouve que son groupe orthogonal est isomorphe au groupe des matrices orthogonales $n \times n$.

1.3. Arithmétique : polynômes

Si V est un espace vectoriel muni d'une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, alors toute forme quadratique $q: V \rightarrow F$ détermine un polynôme homogène de degré 2 en n variables X_1, \dots, X_n et à coefficients dans F :

$$f_q(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i,j} b(\underline{e}_i, \underline{e}_j) X_i X_j = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in F[X_1, \dots, X_n].$$

(On retrouve ici la même matrice symétrique B que ci-dessus.) Réciproquement, si un polynôme $f \in F[X_1, \dots, X_n]$ est homogène de degré 2, alors de manière générale on a bien

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j.$$

Mais une simple manipulation des coefficients

$$b_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

permet de l'écrire aussi comme

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i,j} b_{ij} X_i X_j \quad \text{avec} \quad b_{ij} = b_{ji}.$$

Cette matrice symétrique $B = (b_{ij})_{i,j}$ définit alors la forme bilinéaire symétrique

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sur l'espace V muni de la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, qui détermine à son tour l'espace quadratique (V, q) de départ. Autrement dit, si V est un espace vectoriel muni d'une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, alors la procédure décrite ci-dessus donne une correspondance bijective entre les formes quadratiques $q: V \times V \rightarrow F$, et les polynômes $f \in F[X_1, \dots, X_n]$ homogènes de degré 2.

Exemple 1.3.1 Soit la forme quadratique $q: F^{2 \times 2} \rightarrow F: M \mapsto \det(M) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$ et mettons la base canonique sur $F^{2 \times 2}$: c'est la suite de matrices

$$\left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On peut alors calculer le polynôme

$$f_q(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_4 - X_2 X_3.$$

Exemple 1.3.2 Soit le polynôme $3X_1 X_2 + X_2^2 - X_1 X_3 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$. On peut le réécrire comme

$$0X_1^2 + \frac{3}{2}X_1 X_2 - \frac{1}{2}X_1 X_3 + \frac{3}{2}X_2 X_1 + 1X_2^2 + 0X_2 X_3 - \frac{1}{2}X_3 X_1 + 0X_3 X_2 + 0X_3^2$$

et on voit donc qu'il détermine la matrice symétrique

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on prend n'importe quel espace vectoriel V de dimension 3, muni d'une base quelconque $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_3)$, alors on peut "réaliser" le polynôme donné par l'espace quadratique (V, b) où

$$b\left(\sum_i x_i \underline{e}_i, \sum_i y_i \underline{e}_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Mais pourquoi ne pas faire simple ? On peut prendre l'espace $V = \mathbb{Q}^3$ muni de sa base canonique $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, et le faire porter la forme bilinéaire symétrique

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

qui par ailleurs correspond à la forme quadratique

$$q: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}: (x_1, x_2, x_3) \mapsto 3x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3.$$

Autrement dit, le polynôme $3X_1X_2 + X_2^2 - X_1X_3 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ est réalisé, tout simplement, par la forme quadratique $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3$ sur \mathbb{Q}^3 .

Voici la "version polynomiale" de morphisme entre espaces quadratiques :

Proposition 1.3.3 *Soient deux espaces quadratiques (V, q) et (V', q') , avec des bases $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_m)$, et notons les polynômes homogènes de degré 2 respectifs par $f \in F[X_1, \dots, X_n]$ et $f' \in F[X_1, \dots, X_m]$. Pour une application linéaire $g: V \rightarrow V'$ de matrice $C \in F^{m \times n}$ par rapport aux bases données, on a l'équivalence des assertions suivantes :*

1. g est isométrique,
2. pour $Y_i = \sum_j c_{ij} X_j$ on a $f(X_1, \dots, X_n) = f'(Y_1, \dots, Y_m)$.

En particulier, g est une isométrie si et seulement si C est inversible et pour $Y_i = \sum_j c_{ij} X_j$ on a $f(X_1, \dots, X_n) = f'(Y_1, \dots, Y_m)$; dans ce cas, on dit que f et f' sont équivalents, noté $f \cong f'$.

Démonstration. Ceci est une variante sur la démonstration de la Proposition 1.2.3. Pour vérifier facilement les détails, il est utile de penser les variables X_1, \dots, X_n et Y_1, \dots, Y_m comme des colonnes

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}$$

et de noter que le changement de variables $Y_i = \sum_j c_{ij} X_j$ n'est alors rien d'autre que le produit matriciel $Y = CX$. □

En mots, deux espaces quadratiques (V, q) et (V', q') sont isométriques si et seulement si les polynômes f et f' (déterminés par des bases aux choix de V et de V') sont “identiques à un changement linéaire et inversible de variables près”.

Exemple 1.3.4 Sur tout corps F , le polynôme $f(X_1, X_2) = X_1^2 - X_2^2$ est équivalent à $g(Y_1, Y_2) = Y_1 Y_2$, parce que l'on peut poser

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \end{cases}$$

qui est effectivement un changement de variables linéaire et inversible (exercice!), et sous son effet on a $f(X_1, X_2) = g(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$. Si on travaille sur le corps $F = \mathbb{C}$, on peut aussi montrer que $h(Z_1, Z_2) = Z_1^2 + Z_2^2$ est équivalent à f (et à g) : car maintenant le changement de variables

$$\begin{cases} Z_1 = X_1 \\ Z_2 = -iX_2 \end{cases}$$

est autorisé—mais ceci n'est clairement pas possible sur $F = \mathbb{R}$ par exemple. Autrement dit, la manipulation des polynômes à coefficients dans F dépend – bien évidemment – du corps F . Ceci montre bien que *l'étude des espaces quadratiques sur F est une façon d'étudier des propriétés du corps F* .

Pour résumer, nous avons maintenant

- l'outil géométrique : les espaces quadratiques de dimension n sur F , déterminés à isométrie près,
- l'outil algébrique : les matrices symétriques dans $F^{n \times n}$, déterminées à congruence près,
- l'outil arithmétique : les polynômes homogènes de degré 2 dans $F[X_1, \dots, X_n]$, déterminés à équivalence près,

pour parler essentiellement de la même chose : la *théorie des formes quadratiques sur F* . Le but principal de cette théorie est de répondre aux deux questions suivantes :

- pour un corps F donné, classifier les espaces quadratiques (V, q) à isométrie près,
- pour un espace quadratique (V, q) donné, déterminer la structure du groupe $O(V, q)$.

1.4. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. Déterminer les formes quadratiques parmi les applications suivantes. Le cas échéant, donner la forme bilinéaire symétrique associée, ainsi qu'une matrice symétrique (pour une base au choix) et un polynôme homogène de degré 2 (pour une base au choix).

- (a) $q: \mathbb{R}_{\leq n}[X] \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto f(1)^2$,
- (b) $q: \mathbb{R}_{\leq n}[X] \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$,
- (c) $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}: z \mapsto z\bar{z}$,
- (d) $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z\bar{z}$.

3. Parmi les applications ci-dessous, déterminer les formes bilinéaires (pas nécessairement symétriques). Pour chaque forme bilinéaire, donner la forme quadratique associée, la forme bilinéaire *symétrique* associée à cette forme quadratique, une matrice symétrique de cette forme bilinéaire symétrique (pour une base au choix), et un polynôme homogène de degré 2 (pour une base au choix).

(a) $b: \mathbb{R}[X]_{\leq n} \times \mathbb{R}[X]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}: (P, Q) \mapsto P(0) \cdot Q'(0)$

(b) $b: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: (z_1, z_2) \mapsto i \cdot |z_1| \cdot \overline{z_2}$

(c) $b: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}: (z_1, z_2) \mapsto \Re(z_1 + z_2)$

(d) $b: \mathbb{Q}^{3 \times 3} \times \mathbb{Q}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{Q}: (A, B) \mapsto \text{tr}(A^t \cdot B)$

(e) $b: \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \times \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}: (P, Q) \mapsto \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt$

(f) $b: \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \times \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}: (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(k) \cdot Q(k)$

(g) $b: \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}: ((x_1, \dots, x_5), (y_1, \dots, y_5)) \mapsto x_1y_2 - (3x_3 + x_2)y_5$

4. Pour les polynômes suivants, donner si possible un espace quadratique (V, q) les réalisant (ou expliquer pourquoi ce n'est pas possible) :

(a) $X_1 + 2X_2 + 3X_3^2 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$

(b) $(X_1 + X_2)(X_3 + X_4) \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_4]$

(c) $X_1^2 + 4X_1X_2 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$

(d) $X_1^2 + 4X_1X_2 \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_5]$

5. *Géométrie symplectique.* Une forme bilinéaire $b: V \times V \rightarrow F$ est *anti-symétrique* si $b(\underline{x}, \underline{y}) = -b(\underline{y}, \underline{x})$ pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in V$; l'espace (V, b) est alors un *espace symplectique*. La définition d'isométrie $f: (V, b) \rightarrow (V', b')$ entre espaces symplectiques est sans surprise, et on note $\text{Sp}(V, b)$ le *groupe symplectique* des isométries sur (V, b) .

(a) Montrer que $b: V \times V \rightarrow F$ est anti-symétrique si et seulement si b est *alternée* : $b(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ pour tout $\underline{x} \in V$. La notion de "forme quadratique" n'a pas de sens dans ce contexte.

(b) Caractériser matriciellement les formes bilinéaires anti-symétriques.

(c) Soit une forme bilinéaire b sur V . Montrer que

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff b(\underline{y}, \underline{x}) = 0$$

si et seulement si b est symétrique ou anti-symétrique. (On dit parfois qu'une telle forme est *réflexive*, mais cela n'a rien à voir avec la réflexivité d'une relation binaire!)

Solution. Une implication est immédiate. Pour l'autre, si on a $b(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ pour *tout* $\underline{x} \in V$ alors en développant $b(\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y})$ (et en utilisant l'hypothèse) on trouve que b est anti-symétrique. Si b n'est pas anti-symétrique, il existe au moins un $\underline{x}_0 \in V$ tel que $b(\underline{x}_0, \underline{x}_0) \neq 0$. Pour tout $\underline{y} \in V$ on peut calculer que $b(\underline{x}_0, b(\underline{x}_0, \underline{y})\underline{x}_0 - b(\underline{x}_0, \underline{x}_0)\underline{y}) = 0$; par l'hypothèse

3. Comme toujours et partout, on suppose que $\text{car}F \neq 2$. Si $\text{car}(F) = 2$, on n'a pas l'équivalence de 'anti-symétrie' et 'alternance' d'une forme bilinéaire b !

on a aussi $b(b(\underline{x}_0, \underline{y})\underline{x}_0 - b(\underline{x}_0, \underline{x}_0)\underline{y}, \underline{x}_0) = 0$, dont le développement donne déjà l'identité $b(\underline{x}_0, \underline{y}) = b(\underline{y}, \underline{x}_0)$. Pour $\underline{x} \in V$ quelconque, si $b(\underline{x}, \underline{x}) \neq 0$ on reprend l'argument précédent (avec \underline{x} à la place de \underline{x}_0) pour montrer que $b(\underline{x}, \underline{y}) = b(\underline{y}, \underline{x})$ pour tout $\underline{y} \in V$; supposons donc que $b(\underline{x}, \underline{x}) = 0$. Il existe toujours un $\alpha \in F^\times$ tel que $b(\underline{x}_0 + \alpha\underline{x}, \underline{x}_0 + \alpha\underline{x}) = b(\underline{x}_0, \underline{x}_0) + 2\alpha b(\underline{x}_0, \underline{x}) \neq 0$. Mais alors, pour tout $\underline{y} \in V$, on a par le raisonnement précédent que $b(\underline{x}_0 + \alpha\underline{x}, \underline{y}) = b(\underline{y}, \underline{x}_0 + \alpha\underline{x})$, dont le développement entraîne en effet $b(\underline{x}, \underline{y}) = b(\underline{y}, \underline{x})$.

6. *Géométrie hermitienne.* Soit $F = \mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Une application $b: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ est une *forme sesquilinéaire* si $b(\underline{x}, -)$ est linéaire et $b(-, \underline{y})$ est semi-linéaire (par rapport à la conjugaison dans \mathbb{C}). Si $b(\underline{x}, \underline{y}) = \overline{b(\underline{y}, \underline{x})}$ alors on dit que (V, b) est un *espace hermitien*.

(a) Pour b une forme sesquilinéaire sur V , montrer que l'application $q: V \rightarrow \mathbb{C}: \underline{x} \mapsto q(\underline{x}) = b(\underline{x}, \underline{x})$ prend ses valeurs dans \mathbb{R} si et seulement si b est hermitienne. Indication : pour le sens non-trivial, calculer $b(\underline{x} + \underline{y}, \underline{y} + \underline{x})$ et $b(\underline{x} + i\underline{y}, i\underline{y} + \underline{x})$ pour trouver que $b(\underline{x}, \underline{y}) + b(\underline{y}, \underline{x})$ ainsi que $i(b(\underline{x}, \underline{y}) - b(\underline{y}, \underline{x}))$ sont des nombres réels; puis conclure.

Solution. Une direction est claire. Pour l'autre, par

$$b(\underline{x} + \underline{y}, \underline{y} + \underline{x}) = b(\underline{x}, \underline{y}) + b(\underline{x}, \underline{x}) + b(\underline{y}, \underline{y}) + b(\underline{y}, \underline{x})$$

on a que $b(\underline{x}, \underline{y}) + b(\underline{y}, \underline{x})$ est réel; et par un calcul similaire de

$$b(\underline{x} + i\underline{y}, i\underline{y} + \underline{x}) = b(\underline{x}, i\underline{y}) + b(\underline{x}, \underline{x}) + b(i\underline{y}, i\underline{y}) + b(i\underline{y}, \underline{x}) = ib(\underline{x}, \underline{y}) + b(\underline{x}, \underline{x}) + b(\underline{y}, \underline{y}) - ib(\underline{y}, \underline{x})$$

on voit que $i(b(\underline{x}, \underline{y}) - b(\underline{y}, \underline{x}))$ est réel. Ainsi le résultat suit.

(b) Montrer que $f: (V, b) \rightarrow (V', b')$ est une isométrie (avec la définition habituelle) si et seulement si $q' \circ f = q$ (pour q et q' les *formes hermitiennes* déterminées par b et b'). Le groupe des isométries sur un espace hermitien (V, b) est noté $U(V, b)$, et appelé *groupe unitaire*.

2. Régularité et orthogonalité

Dans ce chapitre nous allons d'abord rappeler et compléter quelques notions classiques de l'algèbre linéaire – notamment concernant le dual d'un espace vectoriel – pour ensuite en tirer du profit dans le cadre des espaces quadratiques.

2.1. Espace dual

Rappelons-nous d'abord de :

Proposition 2.1.1 *Si V et W sont des F -espaces, alors*

$$\text{Lin}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ est une application linéaire}\}$$

est un F -espace pour les opérations

$$\begin{cases} (f + g)(\underline{x}) = f\underline{x} + g\underline{x} \\ (\alpha f)(\underline{x}) = \alpha(f\underline{x}) \end{cases}$$

On a $\dim(\text{Lin}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$.

Démonstration. Tout est évident (exercice). Pour la formule de dimension, on observera que, si $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ est une base V , et $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$ est une base de W , alors les mn applications linéaires $(f_{ij}: V \rightarrow W)_{i,j}$ définies par

$$f_{ij}(\underline{e}_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ \underline{d}_j & \text{si } k = i \end{cases}$$

forment une base de $\text{Lin}(V, W)$. Alternativement, on peut utiliser l'isomorphisme de F -espaces $\text{Lin}(V, W) \cong F^{m \times n}$ donné par le calcul de la matrice d'une application linéaire $f \in \text{Lin}(V, W)$ par rapport aux bases $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$: les applications ci-dessus correspondent alors à la base canonique de $F^{m \times n}$ (les mn matrices nulles partout sauf en un élément qui vaut 1). \square

En particulier, nous avons :

Définition 2.1.2 *L'espace dual d'un F -espace V est le F -espace $V^* = \text{Lin}(V, F)$; les éléments de V^* sont donc les formes linéaires sur V .*

Par conséquent, V et V^* sont de même dimension, et donc isomorphe. Si $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ est une base de V , la *base duale* de V^* est donnée par les n applications linéaires notées $e_i^*: V \rightarrow F$ définies par

$$e_i^*(\underline{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

(C'est exactement la formule donnée dans la démonstration ci-dessus, pour la base (1) de F en tant que F -espace.) Pour $\underline{x} \in V$, une telle application linéaire calcule donc

$$e_i^*(\underline{x}) = e_i^*\left(\sum_j x_j \underline{e}_j\right) = \sum_j x_j e_i^*(\underline{e}_j) = x_i = i\text{-ième coordonnée de } \underline{x} \text{ dans la base } (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n).$$

Autrement dit, le n -uplet des coordonnées de $\underline{x} \in V$ pour la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ est $(e_1^*(\underline{x}), \dots, e_n^*(\underline{x}))$.

De l'autre côté, pour $f \in V^*$ et $\underline{x} \in V$ on peut calculer que

$$f(\underline{x}) = f\left(\sum_i x_i \underline{e}_i\right) = \sum_i x_i f(\underline{e}_i) = \sum_i f(\underline{e}_i) e_i^*(\underline{x}).$$

Ce $f \in V^*$ s'écrit donc (de manière unique) comme $f = \sum_i f(\underline{e}_i) e_i^*$; ainsi les coordonnées de $f \in V^*$ par rapport à la base duale (e_1^*, \dots, e_n^*) de V^* forment le n -uplet $(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n))$.

Exemple 2.1.3 Si $f: V \rightarrow W$ est une application linéaire, et on a des bases $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$ de V et W respectivement, alors la matrice de f par rapport à ces bases est $C = (d_i^*(f(\underline{e}_j)))_{i,j}$. En effet, dans la j -ième colonne de C on trouve ainsi les coordonnées dans la base $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$ de l'image par f du j -ième élément de la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$.

Exemple 2.1.4 Une matrice $C \in F^{n \times n}$ est inversible si et seulement si ses colonnes forment une base de l'espace F^n (que nous allons identifier avec $F^{n \times 1}$, les colonnes à n éléments); notons cette base par $(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n)$. Les coordonnées d'un $\underline{x} \in F^n$ sont ces éléments $x_1, \dots, x_n \in F$ pour lesquels on a $\underline{x} = \sum_i x_i \underline{c}_i$, et cela s'écrit matriciellement comme

$$\underline{x} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ ou de manière équivalente } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C^{-1} \underline{x}.$$

Si maintenant on note L_i pour la i -ième ligne de C^{-1} , alors les éléments de la base duale (c_1^*, \dots, c_n^*) sont les formes linéaires $c_i^*: F^n \rightarrow F: \underline{x} \mapsto L_i \underline{x}$.

Par analogie avec $\text{Lin}(V, W)$ on a aussi :

Proposition 2.1.5 Si V, W et Z sont des F -espaces, alors

$$\text{Bilin}(V, W; Z) = \{f: V \times W \rightarrow Z \mid f \text{ est une application bilinéaire}^1\}$$

est un F -espace pour les opérations

$$\begin{cases} (f+g)(\underline{x}, \underline{y}) = f(\underline{x}, \underline{y}) + g(\underline{x}, \underline{y}) \\ (\alpha f)(\underline{x}, \underline{y}) = \alpha(f(\underline{x}, \underline{y})) \end{cases}.$$

On a un isomorphisme $\text{Bilin}(V, W; Z) \cong \text{Lin}(V, \text{Lin}(W, Z))$ de F -espaces donné par

$$\text{Bilin}(V, W; Z) \rightarrow \text{Lin}(V, \text{Lin}(W, Z)): f \mapsto \left(\hat{f}: V \rightarrow \text{Lin}(W, Z): \underline{x} \mapsto f(\underline{x}, -)\right)$$

avec inverse

$$\text{Lin}(V, \text{Lin}(W, Z)) \rightarrow \text{Bilin}(V, W; Z): g \mapsto \left(\check{g}: V \times W \rightarrow Z: (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto g(\underline{x})(\underline{y})\right).$$

1. Ceci veut bien sûr dire que tous les $f(\underline{x}, -): V \rightarrow Z$ et $f(-, \underline{y}): W \rightarrow Z$ sont linéaires.

Démonstration. Exercice. □

Par conséquent – et c’est l’intérêt pour les espaces quadratiques! – on obtient l’isomorphisme

$$\text{Bilin}(V, V; F) \cong \text{Lin}(V, \text{Lin}(V, F)) = \text{Lin}(V, V^*).$$

Autrement dit, toute forme bilinéaire (pas nécessairement symétrique) $b: V \times V \rightarrow F$ détermine, et est déterminée par, une application linéaire $\hat{b}: V \rightarrow V^*$. Explicitement, $\hat{b}(\underline{x}) \in V^*$ est la forme linéaire $b(\underline{x}, -): V \rightarrow F: \underline{y} \mapsto b(\underline{x}, \underline{y})$. La symétrie de $b: V \times V \rightarrow F$ est équivalent au fait que $\hat{b}(\underline{x})(\underline{y}) = \hat{b}(\underline{y})(\underline{x})$ pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in V$.

Nous disposons ainsi de tous les outils de l’algèbre linéaire pour étudier les formes bilinéaires (symétriques) sur V —au détail près qu’on devra s’habituer à travailler avec l’espace dual V^* . Par exemple :

Proposition 2.1.6 *Soit une forme bilinéaire symétrique $b: V \times V \rightarrow F$. Si $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ est une base de V , et $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ la base duale de l’espace dual V^* , alors la matrice de l’application linéaire $\hat{b}: V \rightarrow V^*$ par rapport à ces deux bases est $B = (b(\underline{e}_i, \underline{e}_j))_{i,j}$.*

Démonstration. Soit $M = (m_{ij})_{i,j}$ la matrice de $\hat{b}: V \rightarrow V^*$ par rapport aux bases $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$. L’élément m_{ij} est donc la i -ième coordonnée par rapport à la base $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ de l’image par \hat{b} du j -ième vecteur de la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, soit $m_{ij} = \hat{b}(\underline{e}_j)(\underline{e}_i) = b(\underline{e}_j, \underline{e}_i)$. Par symétrie de b , le résultat suit. □

Nous retrouvons donc la même matrice symétrique B que nous avons calculée dans le chapitre précédent pour un espace quadratique (V, b) muni d’une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$.

Pour étendre la notion de dual aux applications linéaires, observons d’abord :

Proposition 2.1.7 *Si $f: V \rightarrow W$ est une application linéaire entre F -espaces, alors pour tout F -espace Z aussi*

$$\text{Lin}(W, Z) \rightarrow \text{Lin}(V, Z): g \mapsto g \circ f$$

est une application linéaire.

Démonstration. Exercice. □

Par conséquent, toute application linéaire $f: V \rightarrow W$ détermine une *application linéaire duale* $f^*: W^* \rightarrow V^*$; explicitement on a

$$f^*: \text{Lin}(W, F) \rightarrow \text{Lin}(V, F): g \mapsto g \circ f.$$

Le diagramme suivant montre bien ce qui se passe :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow f^*(g) = g \circ f & \swarrow g \\ & & F \end{array}$$

Il est alors évident que, si on note $\text{id}_V : V \rightarrow V : \underline{x} \mapsto \underline{x}$ l'application "identité" sur un F -espace, alors $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{V^*}$ (en mots : "l'application duale de l'identité sur V est l'application identité sur l'espace dual de V "); et si on a deux applications linéaires $f : V \rightarrow W$ et $g : W \rightarrow Z$, alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ (en mots : "l'application duale d'une composée est la composée renversée des applications duales"). (Dualiser est un foncteur représentable contravariant.)

Exemple 2.1.8 Soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire quelconque, et $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$ des bases de V et de W . L'élément en position (i, j) de la matrice de f par rapport à ces bases est $\underline{d}_i^*(f(\underline{e}_j))$, la i -ième coordonnée de $f(\underline{e}_j)$ par rapport à la base $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$. Pour l'application duale $f^* : W^* \rightarrow V^*$ on peut faire pareil : l'élément en position (i, j) de sa matrice par rapport aux bases duales $(\underline{d}_1^*, \dots, \underline{d}_m^*)$ et $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ est la i -ième coordonnée de $f^*(\underline{d}_j^*)$ par rapport à la base $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$. Mais si on évalue $f^*(\underline{d}_j^*) = \sum_i a_i \underline{e}_i^* \in V^*$ en $\underline{e}_i \in V$ on trouve d'un côté

$$f^*(\underline{d}_j^*)(\underline{e}_i) = (\underline{d}_j^* \circ f)(\underline{e}_i) = \underline{d}_j^*(f(\underline{e}_i))$$

et de l'autre côté

$$\left(\sum_i a_i \underline{e}_i^*\right)(\underline{e}_j) = \sum_i a_i \underline{e}_i^*(\underline{e}_j) = a_j.$$

C'est à dire, la i -ième coordonnée de $f^*(\underline{d}_j^*)$ par rapport à la base $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ est $a_i = \underline{d}_j^*(f(\underline{e}_i))$. Conclusion : la matrice de f par rapport aux bases $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$ est la *transposée* de la matrice de l'application duale f^* par rapport aux bases duales $(\underline{d}_1^*, \dots, \underline{d}_m^*)$ et $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$.

Exemple 2.1.9 Soit une application linéaire $f : V \rightarrow W$ entre deux espaces quadratiques (V, b) et (W, b') . "Par dualisation" on peut considérer les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \hat{b} \downarrow & & \downarrow \hat{b}' \\ V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \end{array}$$

On a alors que f est isométrique si et seulement si le diagramme ci-dessus commute. En effet, pour des bases $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ de V et $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$ de W , et les bases duales de V^* et W^* , on peut calculer les matrices de ces quatre applications linéaires; soient ainsi les matrices B pour \hat{b} , B' pour \hat{b}' , C pour f et (donc) C^t pour f^* . Par Proposition 1.2.3, le résultat suit. En particulier, f est une isométrie si et seulement si f est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) faisant commuter le diagramme ci-dessus.

2.2. Espace quadratique régulier

Revenons aux espaces quadratiques (V, b) ; on supposera donc que b est une forme bilinéaire *symétrique* sur V , mais on se permet de la traiter par l'application linéaire $\hat{b} : V \rightarrow V^*$.

Si $W \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel d'un F -espace V , alors l'inclusion $i : W \hookrightarrow V : \underline{x} \mapsto \underline{x}$ est une application linéaire (évidemment injective). L'application duale est

$$i^* : V^* \rightarrow W^* : f \mapsto f \circ i,$$

c'est à dire, $i^*(f) = f \circ i = f|_W$ est tout simplement la restriction de $f: V \rightarrow F$ au sous-espace W . Notons déjà pour plus tard que i^* est, en fait, surjective : d'abord, si on prend une base (e_1, \dots, e_k) de W , alors on peut l'étendre en une base $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ de tout V . Maintenant, pour tout $f \in W^*$ on peut définir $f' \in V^*$ en posant (par exemple)

$$f'(e_i) = \begin{cases} f(e_i) & \text{si } i \leq k \\ \underline{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi on aura défini une application linéaire $f': V \rightarrow F$ telle que $i^*(f') = f$:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i} & V \\ & \searrow & \swarrow \text{---} \\ & i^*(f) = f & F \end{array}$$

Cette observation permet de définir élégamment :

Définition 2.2.1 Soit (V, b) un espace quadratique. L'orthocomplément d'un sous-espace $W \subseteq V$ est

$$W^\perp = \ker(V \xrightarrow{\hat{b}} V^* \xrightarrow{i^*} W^*).$$

Le radical de (V, b) est $\text{rad}(V, b) = W^\perp$, et (V, b) est un espace régulier (aussi appelé espace non-dégénéré) si $\text{rad}(V, b) = \{0\}$ ("le radical est nul").

Par sa définition comme le noyau d'une application linéaire, W^\perp est un sous-espace de V . Explicitement, on peut calculer que

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{ \underline{x} \in V \mid i^*(\hat{b}(\underline{x})) = \underline{0} \} \\ &= \{ \underline{x} \in V \mid \hat{b}(\underline{x}) \circ i = \underline{0} \} \\ &= \{ \underline{x} \in V \mid b(\underline{x}, i-) = \underline{0} \} \\ &= \{ \underline{x} \in V \mid \forall \underline{y} \in W : b(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \}. \end{aligned}$$

En effet, par l'application linéaire $\hat{b}: V \rightarrow V^*: \underline{x} \mapsto b(\underline{x}, -)$ on a, pour tout $\underline{x} \in V$, l'application linéaire $\hat{b}(\underline{x}): V \rightarrow F: \underline{y} \mapsto b(\underline{x}, \underline{y})$, que l'on précompose avec $i: W \hookrightarrow V$ pour obtenir $(i^* \circ \hat{b})(\underline{x})$.

Naturellement, on dira que \underline{x} est orthogonal à \underline{y} dans (V, b) , noté $\underline{x} \perp \underline{y}$, si $\underline{x} \in \underline{y}^\perp$; ici, par \underline{y}^\perp on veut dire l'orthocomplément du sous-espace de V engendré par $\underline{y} \in V$. On a que

$$\underline{x} \perp \underline{y} \iff b(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{y} \perp \underline{x};$$

la relation d'orthogonalité est donc symétrique. En particulier, l'espace (V, b) est régulier si et seulement si *seul* $\underline{0}$ est orthogonal à tous les éléments de V .

Exemple 2.2.2 Pour le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 , la notion d'orthogonalité est la notion usuelle : $(x, y) \perp (x', y')$ si et seulement si $xx' + yy' = 0$. L'espace quadratique $(\mathbb{R}^2, q(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2)$ ainsi obtenu est régulier : seul $(0, 0)$ est orthogonal à tous les (x, y) . Par contre, si on met la forme bilinéaire symétrique $b((x, y), (x', y')) = xx'$ sur \mathbb{R}^2 , alors on a l'"orthogonalité" de $(0, 1)$ à lui-même—l'espace quadratique (\mathbb{R}^2, b) n'est donc pas régulier. En fait, on peut calculer facilement que $\text{rad}(\mathbb{R}^2, b) = \{(x, y) \mid \forall (u, v) : b((x, y)(u, v)) = 0\}$ est le sous-espace engendré par $(0, 1)$.

Exemple 2.2.3 Soit l'espace $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ muni de la forme quadratique $q(x, y, z) = 2xy + z^2$; la forme bilinéaire symétrique associée est $b((x, y, z), (u, v, w)) = xv + yu + zw$. Soit par exemple le sous-espace $W = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\} = \{(x, -x, z)\} = \{(x, 2x, z)\}$; son orthocomplément est

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{(u, v, w) \mid \forall (x, 2x, z) : b((u, v, w), (x, 2x, z)) = 0\} \\ &= \{(u, v, w) \mid \forall x, z : xv + 2xu + zw = 0\} \\ &= \{(u, v, w) \mid \forall x, z : x(v + 2u) + zw = 0\} \\ &= \{(u, u, 0)\} \end{aligned}$$

Il est, par ailleurs, facile de voir que cet espace est régulier.

Exemple 2.2.4 Toute application linéaire isométrique $f: (V, b) \rightarrow (V', b')$ partant d'un espace régulier est injective. En effet : si $f\underline{x} = \underline{0}$ alors, pour tout $\underline{y} \in V$ on a nécessairement $b(\underline{x}, \underline{y}) = b'(f\underline{x}, f\underline{y}) = b'(\underline{0}, f\underline{y}) = 0$ – c'est à dire que $\ker(f) \subseteq \text{rad}(V, b)$ – et donc $\ker(f) = \{\underline{0}\}$ si (V, b) est régulier. (On vérifie facilement que l'application d'Exemple 1.1.14 est définie sur un espace non-régulier !)

Exemple 2.2.5 Pour toute application linéaire isométrique $f: (V, b) \rightarrow (V', b')$ et tout sous-espace vectoriel $W \subseteq V$, on a $f(W^\perp) \subseteq (fW)^\perp$; et si f est une isométrie, on a $f(W^\perp) = (fW)^\perp$ (exercice). Pour une isométrie, il suit que $f(\text{rad}(V, b)) = \text{rad}(V', b')$ (on prend $W = V$). La restriction de b , resp. b' , au sous-espace $\text{rad}(V, b)$, resp. $\text{rad}(V', b')$, est l'application nulle, et donc la restriction de f aux radicaux est trivialement une isométrie $f: (\text{rad}(V, b), b) \rightarrow (\text{rad}(V', b'), b')$.

Remarque 2.2.6 Lorsque $W \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel d'un espace quadratique (V, q) , il définit un sous-espace quadratique (W, q) pour la restriction de $q: V \rightarrow F$ à V (voir Remarque 1.1.18). En tant qu'espace quadratique "de son propre droit", le radical de (W, q) est

$$\begin{aligned} \text{rad}(W, q) &= \{\underline{w} \in W \mid \forall \underline{w}' \in W : b(\underline{w}, \underline{w}') = 0\} \\ &= W \cap \{\underline{v} \in V \mid \forall \underline{w}' \in W : b(\underline{v}, \underline{w}') = 0\} \\ &= W \cap W^\perp \end{aligned}$$

On peut avoir un espace régulier (V, q) avec un sous-espace (W, q) non-régulier, un espace non-régulier (V, q) avec un sous-espace régulier (W, q) , etc; en exercice on trouvera de tels exemples.

Voici d'autres caractérisations de la régularité d'un espace quadratique :

Proposition 2.2.7 Pour un espace quadratique (V, b) on a l'équivalence des assertions suivantes :

1. (V, b) est régulier,
2. $\hat{b}: V \rightarrow V^*$ est un isomorphisme,
3. pour toute base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ de V , la matrice symétrique $B = (b(\underline{e}_i, \underline{e}_j))_{i,j}$ est inversible.

Démonstration. (1) \iff (2) L'espace (V, b) est régulier si et seulement si son radical est nul. Mais le radical V^\perp est le noyau de \hat{b} , donc le radical est nul si et seulement si \hat{b} est injectif. Puisque $\dim(V) = \dim(V^*)$, \hat{b} est injectif si et seulement si c'est un isomorphisme.

(2) \iff (3) L'application linéaire \hat{b} est un isomorphisme si et seulement si sa matrice par rapport à la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ de V et la base duale $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ de V^* est inversible ; et c'est exactement la matrice $B = (b(\underline{e}_i, \underline{e}_j))_{i,j}$ (par une Proposition ci-dessus). \square

Exemple 2.2.8 L'espace de Minkowski est \mathbb{R}^4 , dont on pense les éléments (x, y, z, t) comme des points dans l'espace-temps, muni de la forme quadratique $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. Cet espace est crucial pour la théorie de la relativité restreinte de Einstein ; il est régulier, comme on voit facilement par considération d'une matrice symétrique associée (exercice).

La Proposition ci-dessus implique immédiatement :

Corollaire 2.2.9 Si (V, b) et (V', b') sont des espaces isométriques, alors l'un est régulier si et seulement si l'autre l'est.

En effet, pour chaque espace on peut calculer une matrice symétrique (par rapport à une base au choix), soient B et B' respectivement. Les espaces sont isométriques si et seulement si ces matrices sont congruentes : $B = C^t B' C$ pour C inversible. Il suit que B est inversible si et seulement si B' est inversible—autrement dit, (V, b) est régulier si et seulement si (V', b') l'est.

Par ailleurs, et avec les mêmes notations, on voit facilement que $\det(B) = \det(C)^2 \det(B')$. Autrement dit, le déterminant d'une matrice symétrique associée à un espace quadratique n'est pas un invariant de la classe d'isométrie de cet espace. En particulier, deux matrices symétriques calculées avec deux bases différentes d'un même espace (V, b) peuvent avoir des déterminants différents. Cependant, $\det(B)$ est bel et bien un *invariant à carré près*. Pour formaliser cela, remarquons d'abord que $(F^\times, \cdot, 1)$, le groupe multiplicatif du corps F , contient l'ensemble des carrés non-nuls de F , soit $F^{\times 2} = \{a^2 \mid a \in F^\times\}$, qui en est un sous-groupe (exercice). Ces groupes étant commutatifs, on peut bien considérer le groupe quotient $F^\times / F^{\times 2}$; on y identifie donc deux nombres non-nuls de F si et seulement si leur quotient est un carré. D'où maintenant la définition suivante :

Définition 2.2.10 Le discriminant² d'un espace régulier (V, b) est

$$\text{dis}(V, b) = [\det(B)] \in F^\times / F^{\times 2}$$

pour une (et donc toute) matrice symétrique B déterminée par (V, b) .

La régularité de (V, b) assure que $\det(B) \neq 0$, et donc $\text{dis}(V, b)$ est bien définie ; soulignons que c'est un invariant de la classe d'isométrie de (V, b) .

2. De manière générale, le mot *discriminant* est utilisé pour toute quantité calculée à l'aide des coefficients d'un polynôme (comme le fameux $b^2 - 4ac$ pour $aX^2 + bX + c$). Ici le mot est justifié par le fait qu'un espace quadratique (V, b) détermine, et est déterminé par, un polynôme homogène de degré 2, dont les coefficients sont donnés par les éléments de la matrice symétrique B . Certains auteurs utilisent le terme *déterminant de (V, b)* pour cet invariant, mais nous avons voulu faire une distinction claire avec le déterminant au sens de l'algèbre linéaire.

Exemple 2.2.11 Soit le polynôme $f(X, Y, Z) = 3X^2 - 2XZ + Y^2 \in \mathbb{F}_5[X, Y, Z]$. Il détermine l'espace quadratique $(V, b) = (\mathbb{F}_5^3, q(x, y, z) = 3x^2 - 2xz + y^2)$. Pour la base canonique on peut calculer la matrice symétrique

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est 4 ; l'espace est donc régulier. On vérifie facilement que $\mathbb{F}_5^\times / \mathbb{F}_5^{\times 2} = \{[1], [2]\}$ (exercice!), et le discriminant de l'espace quadratique est $\text{dis}(V, b) = [1]$.

Exemple 2.2.12 Sur \mathbb{Q}^3 , les formes quadratiques régulières

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad q'(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sont de discriminants respectifs [6] et [1] dans $\mathbb{Q}^\times / \mathbb{Q}^{\times 2}$; elles sont donc non-isométriques.

Pour les espaces quadratiques réguliers, on a un comportement particulièrement agréable des orthocompléments des sous-espaces (et ce résultat sera utile pour démontrer les Théorèmes de Witt, voir les exercices d'un chapitre ultérieur) :

Proposition 2.2.13 *Si (V, b) est un espace quadratique régulier, et $S \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel quelconque, alors*

(a) $\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(V)$,

(b) $(S^\perp)^\perp = S$.

Démonstration. (a) Considérons l'application linéaire $\hat{b}: V \rightarrow V^*$, et l'application linéaire duale $i^*: V^* \rightarrow S^*$ de l'inclusion naturelle $i: S \hookrightarrow V$. On a par définition que $S^\perp = \ker(i^* \circ \hat{b})$ et donc, comme pour toute application linéaire,

$$\dim(V) = \dim(\ker(i^* \circ \hat{b})) + \dim(\text{im}(i^* \circ \hat{b})) = \dim(S^\perp) + \dim(\text{im}(i^* \circ \hat{b})).$$

Mais (V, b) est régulier par hypothèse, donc \hat{b} est un isomorphisme ; et i^* est surjectif puisque i est injectif ; et donc $\text{im}(i^* \circ \hat{b}) = S^*$. On peut conclure par $\dim(\text{im}(i^* \circ \hat{b})) = \dim(S^*) = \dim(S)$.

(b) Pour tout $\underline{x} \in S$ on a par définition de S^\perp que

$$\forall \underline{y} \in S^\perp : \underline{x} \perp \underline{y}.$$

Ainsi on a toujours $S \subseteq (S^\perp)^\perp$. Sous l'hypothèse de régularité de (V, b) , on utilise la partie (a) pour affirmer que

$$\dim(S^\perp) + \dim((S^\perp)^\perp) = \dim(V) = \dim(S) + \dim(S^\perp).$$

(On applique donc la partie (a) au sous-espace $S^\perp \subseteq V$ pour la première équation.) Il suit que $\dim(S) = \dim((S^\perp)^\perp)$, et l'inclusion $S \subseteq (S^\perp)^\perp$ est donc nécessairement une égalité. \square

Exemple 2.2.14 On a déjà vu que, pour la forme bilinéaire symétrique $b((x, y), (x', y')) = xx'$, l'espace quadratique (\mathbb{R}^2, b) n'est pas régulier. Pour $S = \{(0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ on peut calculer que $S^\perp = \{(x, y) \mid \forall (0, a) : b((0, a), (x, y)) = 0\} = \mathbb{R}^2$; on n'a donc pas $\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(\mathbb{R}^2)$.

2.3. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. Dans les exercices du chapitre précédent, repérer les espaces quadratiques réguliers.
3. Montrer que $(\mathbb{R}^2, q(x, y) = x^2)$ est un espace quadratique non-régulier et que la droite engendrée par $(1, 0)$ en est un sous-espace régulier. Montrer que $(\mathbb{R}^2, q(x, y) = xy)$ est un espace quadratique régulier et que la droite engendrée par $(1, 0)$ en est un sous-espace non-régulier. Montrer que le plan cartésien $(\mathbb{R}^2, q(x, y) = x^2 + y^2)$ est un espace quadratique régulier dont tout sous-espace est régulier. Montrer que $(\mathbb{R}^2, q(x, y) = 0)$ est un espace quadratique non-régulier dont tout sous-espace non-nul est non-régulier.
4. Réaliser le polynôme $X_1^2 + 2X_3X_4 \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_4]$ par un espace quadratique (V, q) et montrer que cet espace n'est pas régulier. Trouver un sous-espace $S \subseteq V$ tel que $\dim(S) + \dim(S^\perp) \neq \dim(V)$. Trouver un sous-espace $S \subseteq V$ tel que $(S^\perp)^\perp \neq S$.
5. Soit un espace quadratique (V, b) et $(\text{Sub}(V), \subseteq)$ l'ensemble ordonné de ses sous-espaces vectoriels. Montrer que $(-)^\perp: \text{Sub}(V) \rightarrow \text{Sub}(V): S \rightarrow S^\perp$ est une application antitone et que $(-)^{\perp\perp}: \text{Sub}(V) \rightarrow \text{Sub}(V): S \mapsto S^{\perp\perp}$ est une application monotone, croissante et idempotente sur $\text{Sub}(V)$. Calculer $\{\mathbf{0}\}^{\perp\perp}$ et $V^{\perp\perp}$. Montrer que (V, b) est un espace régulier si et seulement si $S \mapsto S^{\perp\perp}$ est l'identité.

3. Sommes orthogonales

Nous rappelons et complétons d'abord quelques notions de l'algèbre linéaire, cette fois-ci concernant la somme d'espaces vectoriels, pour ensuite les appliquer aux espaces quadratiques.

3.1. Somme interne

Si $W_1, W_2 \subseteq V$ sont des sous-espaces d'un F -espace V , alors

- l'intersection $W_1 \cap W_2 \subseteq V$ est le plus grand sous-espace contenu dans W_1 et W_2 ,
- la somme $W_1 + W_2 = \{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \mid \underline{x}_i \in W_i\} \subseteq V$ est le plus petit sous-espace contenant W_1 et W_2 ,
- si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, alors on dit que $W_1 + W_2$ est une *somme directe*, et on la note $W_1 \oplus W_2$.

Dans une somme directe, on peut écrire tout élément $\underline{x} \in W_1 \oplus W_2$ *en exactement une manière* comme une somme $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$ (avec $\underline{x}_i \in W_i$). Il suit que, si $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$ est une base de W_1 et $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_l)$ est une base de W_2 , alors $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{d}_1, \dots, \underline{d}_l)$ est une base de $W_1 \oplus W_2$. Ainsi il suit évidemment que $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$. (Exercice : démontrer ces assertions!)

Si maintenant (V, b) est un espace quadratique, il est possible que les éléments de W_1 et de W_2 soient mutuellement orthogonaux dans V ; on introduit :

Définition 3.1.1 Soit un espace quadratique (V, b) et deux sous-espaces $W_1, W_2 \subseteq V$. Si

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \text{ et pour tout } \underline{x} \in W_1 \text{ et } \underline{y} \in W_2 : b(\underline{x}, \underline{y}) = 0$$

alors on dit que la somme directe $W_1 \oplus W_2$ est une somme orthogonale ; on le note $W_1 \overset{\perp}{\oplus} W_2$.

Attention : le simple fait que les éléments de deux sous-espaces vectoriels $W_1, W_2 \subseteq V$ d'un espace quadratique (V, b) soient mutuellement orthogonaux, n'implique pas que l'intersection est nulle, et ne suffit donc pas pour considérer $W_1 \overset{\perp}{\oplus} W_2$.

Exemple 3.1.2 Soit le polynôme $X_1^2 + 2X_2^2 + X_2X_3 \in \mathbb{F}_5[X_1, X_2, X_3]$. On peut le réaliser par l'espace \mathbb{F}_5^3 muni de la forme $b((x, y, z), (u, v, w)) = xu + 2yv + 3zv + 3yw$. Les sous-espaces $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{F}_5\}$ et $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{F}_5\}$ sont orthogonaux ; $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{F}_5\}$ et $\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{F}_5\}$ ne le sont pas.

Nous avons déjà remarqué (voir Remarque 1.1.18) que tout sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ d'un espace quadratique (V, b) devient un espace quadratique "de son propre droit" pour la restriction de la forme quadratique (ou la forme bilinéaire symétrique). Et nous avons vu (en

exercice) que cet espace (W, b) peut être régulier, même si (V, b) ne l'est pas. L'énoncé suivant ressemble à, mais est différent de, la Proposition 2.2.13 :

Proposition 3.1.3 *Soit un espace quadratique (V, b) . Si $W \subseteq V$ détermine un sous-espace quadratique régulier, alors on a $V = W \oplus W^\perp$.*

Démonstration. Puisque $\text{rad}(W, b) = W \cap W^\perp$ (voir Remarque 1.1.18), et par hypothèse (W, b) est un espace quadratique régulier, on obtient que $W + W^\perp = W \oplus W^\perp$. Puisque tout élément de W est orthogonal à tout élément de W^\perp , on a $W \oplus W^\perp = W \hat{\oplus} W^\perp$. Bien sûr cette somme orthogonale $W \hat{\oplus} W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V ; pour avoir $W \hat{\oplus} W^\perp = V$ il suffit donc de montrer que $\dim(W \hat{\oplus} W^\perp) = \dim(V)$. Or, on peut considérer les applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\hat{b}} & V^* \\ i \uparrow & & \downarrow i^* \\ W & \xrightarrow{i^* \circ \hat{b} \circ i} & W^* \end{array}$$

La composée $i^* \circ \hat{b} \circ i: W \rightarrow W^*$ est exactement l'application linéaire déterminée par la restriction de la forme bilinéaire $b: W \times W \rightarrow F$ (exercice : donner les détails). Ainsi, $i^* \circ \hat{b} \circ i: W \rightarrow W^*$ est un isomorphisme (car (W, b) est régulier par hypothèse), et donc $i^* \circ \hat{b}$ est surjective¹ (même si \hat{b} n'est pas un isomorphisme, i.e. même si (V, b) n'est pas régulier!). On peut alors calculer que

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(\ker(i^* \circ \hat{b})) + \dim(\text{im}(i^* \circ \hat{b})) \\ &= \dim(W^\perp) + \dim(W^*) \\ &= \dim(W^\perp) + \dim(W) \\ &= \dim(W \hat{\oplus} W^\perp), \end{aligned}$$

la dernière égalité suivant du fait que la somme orthogonale est une somme directe. □

Exemple 3.1.4 Soit la matrice symétrique non-inversible

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{3 \times 3}$$

L'espace quadratique (\mathbb{F}_7^3, b) réalisé par

$$b((x, y, z), (u, v, w)) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 6xu + xv + yu + 6yw + 6zv + zw$$

est donc non-régulier. Le sous-plan d'équation cartésienne $z = 0$ est, par contre, régulier : la restriction de la forme b à ce sous-plan est

$$b((x, y, 0), (u, v, 0)) = 6xu + xv + yu$$

1. Si une composée $g \circ f$ de deux fonctions est bijective, alors f est injective et g est surjective ; exercice.

et, pour la base $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, sa matrice symétrique est inversible. L'orthocomplément de ce plan étant

$$\{(x, y, 0)\}^\perp = \{(u, v, w) \mid \forall (x, y, 0) : 6xu + xv + yu + 6yw = 0\} = \{(u, u, u) \mid u \in \mathbb{F}_7\},$$

on sait donc que $\mathbb{F}_7^3 = \{(x, y, 0)\} \oplus \{(z, z, z)\}$.

Exemple 3.1.5 Nous avons déjà remarqué (Exemple 2.2.4) que, lorsque (V, b) est un espace quadratique régulier, toute application linéaire isométrique $f : (V, b) \rightarrow (V', b')$ est injective. Bien évidemment, f détermine alors une isométrie entre (V, b) et $(\text{im}(f), b')$, et ce dernier est donc aussi régulier. Il suit de Proposition 3.1.3 que $(V', b') = \text{im}(f) \oplus \text{im}(f)^\perp$. Autrement dit, toute application linéaire isométrique partant d'un espace régulier est une isométrie sur un facteur direct orthogonal de l'espace but.

Voici un autre exemple important de somme de sous-espaces :

Proposition 3.1.6 Soit un espace quadratique (V, b) . Il existe un sous-espace $W \subseteq V$ tel que $V = \text{rad}(V, b) \oplus W$, et (W, b) est nécessairement régulier.

Démonstration. On sait déjà que $\text{rad}(V, b) = \{\underline{x} \in V \mid \forall \underline{y} \in V : b(\underline{x}, \underline{y}) = 0\}$ est un sous-espace de V . On peut toujours trouver un sous-espace $W \subseteq V$ tel que $\text{rad}(V, b) \oplus W = V$. (Par exemple, on peut prendre une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$ de $\text{rad}(V, b)$, la compléter en une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{e}_{k+1}, \dots, \underline{e}_n)$ de V , puis définir $W \subseteq V$ comme le sous-espace de base $(\underline{e}_{k+1}, \dots, \underline{e}_n)$.) Par définition de $\text{rad}(V, b)$ on a l'orthogonalité de tout élément de $\text{rad}(V, b)$ à tout élément de W . Autrement dit, on sait déjà que $V = \text{rad}(V, b) \oplus W$. Reste à montrer que la restriction de la forme b au sous-espace W est régulière : mais on peut calculer que

$$\begin{aligned} \text{rad}(W, b) &= \{\underline{x} \in W \mid \forall \underline{y} \in W : b(\underline{x}, \underline{y}) = 0\} \\ &\stackrel{*}{=} \{\underline{x} \in W \mid \forall \underline{y} \in W, \forall \underline{z} \in \text{rad}(V, b) : b(\underline{x}, \underline{y} + \underline{z}) = 0\} \\ &\stackrel{**}{=} \{\underline{x} \in W \mid \forall \underline{v} \in V : b(\underline{x}, \underline{v}) = 0\} \\ &= W \cap \text{rad}(V, b) \\ &\stackrel{***}{=} \{0\}. \end{aligned}$$

Pour l'égalité (*) on utilise l'orthogonalité de $\text{rad}(V, b)$ à W , qui permet en effet de calculer pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in W$ et $\underline{z} \in \text{rad}(V, b)$ que $b(\underline{x}, \underline{y} + \underline{z}) = b(\underline{x}, \underline{y}) + b(\underline{x}, \underline{z}) = b(\underline{x}, \underline{y}) + 0 = b(\underline{x}, \underline{y})$; puis pour (**) on utilise que V est la somme de $\text{rad}(V, b)$ et W ; et finalement pour (***) on utilise que cette somme est directe. \square

Exemple 3.1.7 Soit (\mathbb{R}^3, q) avec $q(x, y, z) = x^2 + xy$; le radical de cet espace non-régulier est $\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Puisque $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, 0)\} \oplus \{(0, 0, z)\}$, il suit que $(W, b) = (\{(x, y, 0)\}, b)$ est régulier et on a une somme orthogonale $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, 0)\} \oplus \{(0, 0, z)\}$. Mais on a par exemple aussi $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, y)\} \oplus \{(0, 0, z)\}$, et donc aussi $(W', b) = (\{(x, y, y)\}, b)$ est régulier, et on a aussi la somme orthogonale $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, y)\} \oplus \{(0, 0, z)\}$.

Remarque 3.1.8 Soit la décomposition d'un espace quadratique comme dans la Proposition ci-dessus, disons $(V, b) = \text{rad}(V, b) \oplus W$. La projection $p: V \rightarrow W$ est alors une application linéaire isométrique (surjective). En effet, notons $\underline{v} = \underline{r} + \underline{w}$ pour l'unique décomposition d'un $v \in V$ en une somme de $\underline{r} \in \text{rad}(V, b)$ et $\underline{w} \in W$. La projection est alors $p: V \rightarrow W: \underline{v} \mapsto \underline{w}$ et on peut calculer que

$$q(\underline{v}) = b(\underline{r} + \underline{w}, \underline{r} + \underline{w}) = b(\underline{r}, \underline{r}) + b(\underline{r}, \underline{w}) + b(\underline{w}, \underline{r}) + b(\underline{w}, \underline{w}) = 0 + 0 + 0 + b(\underline{w}, \underline{w}) = q(p\underline{v}).$$

On a utilisé que tout élément de $\text{rad}(V, b)$ est orthogonal à tout élément de V pour l'avant-dernière égalité.

Par la Proposition 3.1.6, tout espace quadratique (V, b) se décompose ainsi :

$$(V, b) \cong \text{rad}(V, b) \oplus W.$$

Notons que $\text{rad}(V, b)$ est "la partie nulle" de (V, b) (puisque la restriction de b à $\text{rad}(V, b)$ est l'application nulle), et W est "la partie régulière" (puisque l'espace (W, b) est nécessairement régulier). Cette décomposition est, en effet, unique à isométrie près; on montre un peu plus généralement que :

Proposition 3.1.9 Soit une isométrie $f: (V, b) \rightarrow (V', b')$, et considérons des décompositions $V = \text{rad}(V, b) \oplus W$ et $V' = \text{rad}(V', b') \oplus W'$. Alors

1. la restriction $f: \text{rad}(V, b) \rightarrow \text{rad}(V', b')$ détermine une isométrie

$$(\text{rad}(V, b), b) \cong (\text{rad}(V', b'), b'),$$

2. la composée $W \xrightarrow{i} V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{p} W'$ (où i est l'inclusion et p la projection) détermine une isométrie

$$(W, b) \cong (W', b').$$

Démonstration. (1) Voir l'Exemple 2.2.5.

(2) Par Remarques 1.1.18 et 3.1.8, cette composée est une application linéaire isométrique; on doit juste montrer que c'est un isomorphisme. On calcule :

$$(p \circ f \circ i)(\underline{w}) = \underline{0} \iff (f \circ i)(\underline{w}) \in \text{rad}(V', b') \stackrel{(*)}{\iff} i(\underline{w}) \in \text{rad}(V, b) \iff \underline{w} \in W \cap \text{rad}(V, b),$$

mais $W \cap \text{rad}(V, b) = \{\underline{0}\}$ donc $p \circ f \circ i$ est injectif; on a utilisé la première partie de cette démonstration pour l'équivalence (*). Puis – encore par (1) – on sait aussi que

$$\dim(W) = \dim(V) - \dim(\text{rad}(V, b)) = \dim(V') - \dim(\text{rad}(V', b')) = \dim(W')$$

et donc $p \circ f \circ i$ est nécessairement un isomorphisme. □

Si $(V, b) \cong \text{rad}(V, b) \oplus W_1 \cong \text{rad}(V, b) \oplus W_2$, alors on déduit de la Proposition ci-dessus (avec $f = \text{id}_V$) que la composée de l'inclusion $i: W_1 \rightarrow V$ avec la projection $p: V \rightarrow W_2$ fournit une isométrie $W_1 \cong W_2$. On peut donc parler de "la" partie régulière d'un espace quadratique (car elle est unique à isométrie près).

Corollaire 3.1.10 *La dimension de la partie régulière d'un espace quadratique (V, b) est un invariant de sa classe d'isométrie. On l'appelle le rang de (V, b) .*

Par ailleurs, si B est une matrice symétrique calculée avec une base aux choix de l'espace quadratique (V, b) , alors le rang de (V, b) est égal au rang de B (au sens de l'algèbre linéaire), puisque le noyau de B correspond (par la base choisie) au radical de (V, b) .

Exemple 3.1.11 Soit la forme $q(x, y, z) = xy + yz$ sur le corps \mathbb{R} . La forme bilinéaire symétrique associée est $b((x, y, z), (u, v, w)) = \frac{1}{2}(xu + yv + yw + zv)$ et le radical est la droite $\{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Le rang de (\mathbb{R}^3, q) est donc 2.

3.2. Somme externe

Ci-dessus nous avons étudié la somme directe (orthogonale) de deux *sous-espaces* W_1 et W_2 d'un espace (quadratique) V ; on l'appelle parfois la *somme directe (orthogonale) interne*. Il est aussi possible de faire ces constructions pour deux espaces (quadratiques) quelconques, même si – a priori – ils ne sont pas des sous-espaces d'un même “espace enveloppant”; on parle alors de la *somme directe (orthogonale) externe*.

En effet, si V_1 et V_2 sont deux F -espaces, alors le produit (“cartésien”) $V_1 \times V_2$ est aussi un F -espace pour les opérations

$$\begin{cases} (\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{x}', \underline{y}') = (\underline{x} + \underline{x}', \underline{y} + \underline{y}') \\ \alpha(\underline{x}, \underline{y}) = (\alpha\underline{x}, \alpha\underline{y}) \end{cases}$$

De plus, les applications linéaires

$$i_1: V_1 \rightarrow V_1 \times V_2: \underline{x} \mapsto (\underline{x}, \underline{0}) \quad \text{et} \quad i_2: V_2 \rightarrow V_1 \times V_2: \underline{y} \mapsto (\underline{0}, \underline{y})$$

sont injectives, donc la restriction aux images respectives donne des isomorphismes

$$V_1 \cong \{(\underline{x}, \underline{0}) \in V_1 \times V_2\} \quad \text{et} \quad V_2 \cong \{(\underline{0}, \underline{y}) \in V_1 \times V_2\}.$$

A cette identification près, on peut considérer que V_1 et V_2 sont des sous-espaces disjoints de $V_1 \times V_2$; et plus en est, $V_1 \times V_2$ est exactement la somme directe de ses “sous-espaces” V_1 et V_2 :

$$V_1 \times V_2 = \{(\underline{x}, \underline{0}) \in V_1 \times V_2\} \oplus \{(\underline{0}, \underline{y}) \in V_1 \times V_2\} \cong V_1 \oplus V_2.$$

Pour faciliter l'écriture, on a l'habitude de “oublier” les isomorphismes

$$i_1: V_1 \xrightarrow{\sim} \{(\underline{x}, \underline{0}) \in V_1 \times V_2\} \quad \text{et} \quad i_2: V_2 \xrightarrow{\sim} \{(\underline{0}, \underline{y}) \in V_1 \times V_2\}$$

et d'identifier ainsi formellement

$$V_1 \oplus V_2 = \{\underline{x} + \underline{y} \mid \underline{x} \in V_1, \underline{y} \in V_2\},$$

en se souvenant que tout élément de $V_1 \oplus V_2$ s'écrit *de manière unique* comme une somme $\underline{x} + \underline{y}$, et que les opérations sont alors données par

$$\begin{cases} (\underline{x} + \underline{y}) + (\underline{x}' + \underline{y}') = (\underline{x} + \underline{x}') + (\underline{y} + \underline{y}') \\ \alpha(\underline{x} + \underline{y}) = (\alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}) \end{cases}$$

Ainsi il est particulièrement clair que V_1 et V_2 sont des sous-espaces de $V_1 \oplus V_2$: les inclusions s'écrivent tout simplement

$$i_{V_1} : V_1 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2 : \underline{x} \mapsto \underline{x} \quad \text{et} \quad i_{V_2} : V_2 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2 : \underline{y} \mapsto \underline{y}.$$

Par ailleurs, pour deux applications linéaires $f_1 : V_1 \rightarrow W_1$ et $f_2 : V_2 \rightarrow W_2$, on vérifie facilement qu'aussi

$$f_1 \oplus f_2 : V_1 \oplus V_2 \rightarrow W_1 \oplus W_2 : \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \mapsto f_1 \underline{x}_1 + f_2 \underline{x}_2$$

est une application linéaire (exercice). Nous adopterons ces notations dans la suite du cours.

Supposons maintenant que (V_1, b_1) et (V_2, b_2) sont deux espaces quadratiques. On vérifie facilement que

$$b : (V_1 \oplus V_2) \times (V_1 \oplus V_2) \rightarrow F : (\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{y}_1 + \underline{y}_2) \mapsto b_1(\underline{x}_1, \underline{y}_1) + b_2(\underline{x}_2, \underline{y}_2)$$

est une forme bilinéaire symétrique (exercice) ; et clairement la restriction de cette forme aux sous-espaces V_1 , resp. V_2 , donne la forme b_1 , resp. b_2 . Autrement dit, (V_1, b_1) et (V_2, b_2) sont des sous-espaces quadratiques de $(V_1 \oplus V_2, b)$. Mieux encore, pour $\underline{x}_1 \in V_1$ et $\underline{x}_2 \in V_2$ on a

$$b(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = b(\underline{x}_1 + \underline{0}_{V_2}, \underline{0}_{V_1} + \underline{x}_2) = b_1(\underline{x}_1, \underline{0}_{V_1}) + b_2(\underline{0}_{V_2}, \underline{x}_2) = 0 + 0 = 0$$

dans $V_1 \oplus V_2$. C'est à dire, V_1 et V_2 sont mutuellement orthogonaux dans $(V_1 \oplus V_2, b)$. Pour résumer tout cela, on définit :

Définition 3.2.1 *La somme orthogonale de deux F -espaces quadratiques (V_1, b_1) et (V_2, b_2) est la somme directe $V_1 \oplus V_2$ muni de la forme $b(\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{y}_1 + \underline{y}_2) = b_1(\underline{x}_1, \underline{y}_1) + b_2(\underline{x}_2, \underline{y}_2)$; on le note $(V_1, b_1) \overset{\perp}{\oplus} (V_2, b_2)$.*

Par ailleurs, si $f_1 : (V_1, b_1) \rightarrow (V'_1, b'_1)$ et $f_2 : (V_2, b_2) \rightarrow (V'_2, b'_2)$ sont deux applications linéaires isométriques, il suit facilement qu'aussi l'application linéaire $f_1 \oplus f_2 : V_1 \oplus V_2 \rightarrow V'_1 \oplus V'_2$ est isométrique pour les formes bilinéaires de la Définition ci-dessus (exercice). On l'écrit alors $f_1 \overset{\perp}{\oplus} f_2 : (V_1, b_1) \overset{\perp}{\oplus} (V_2, b_2) \rightarrow (V'_1, b'_1) \overset{\perp}{\oplus} (V'_2, b'_2)$.

Remarquons tout de suite que les définitions de somme orthogonale *interne* et de somme orthogonale *externe* ne sont pas contradictoires :

Proposition 3.2.2 *Soit un espace quadratique (V, b) et deux sous-espaces vectoriels $W, W' \subseteq V$. Si on considère les sous-espaces quadratiques (W, b) et (W', b) (pour la restriction de la forme b sur V , donc), alors $V = W \overset{\perp}{\oplus} W'$ (au sens de la Définition 3.1.1) si et seulement si $(V, b) = (W, b) \overset{\perp}{\oplus} (W', b)$ (au sens de la Définition 3.2.1).*

Démonstration. Il suffit d'écrire les détails des définitions. □

On peut reformuler les Propositions 3.1.6 et 3.1.9 ainsi : pour tout espace quadratique (V, q) il existe un espace quadratique nul² (V_1, q_1) et un espace quadratique régulier (V_2, q_2) , tous les deux uniques à isométrie près, tels que $(V, q) \cong (V_1, q_1) \overset{\perp}{\oplus} (V_2, q_2)$.

2. Ceci ne veut pas dire que V_1 est l'espace vectoriel nul $\{0\}$, mais uniquement que V_1 est un espace vectoriel muni de la forme nulle $q_1 : V_1 \rightarrow F : \underline{x} \mapsto 0$.

Pour poursuivre, donnons les différentes “incarnations” (forme bilinéaire symétrique, forme quadratique, matrice symétrique, polynôme homogène de degré 2) de la somme orthogonale de deux espaces quadratiques :

Proposition 3.2.3 Soient deux espaces quadratiques (V_1, b_1) et (V_2, b_2) .

1. La forme quadratique q déterminé par $(V_1, b_1) \oplus (V_2, b_2)$ est

$$q(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = q_1(\underline{x}_1) + q_2(\underline{x}_2),$$

où q_k est la forme définie par (V_k, b_k) .

2. La matrice symétrique B déterminée par $(V_1, b_1) \oplus (V_2, b_2)$ est (à congruence près)

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

où B_k est la matrice symétrique définie par (V_k, b_k) .

3. Le polynôme (homogène de degré 2) f déterminé par $(V_1, b_1) \oplus (V_2, b_2)$ est (à équivalence près)

$$f(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = f_1(X_1, \dots, X_n) + f_2(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$$

où f_k est le polynôme déterminé par (V_k, b_k) .

Démonstration. (1) Un simple calcul montre que

$$q(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = b(\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{x}_1 + \underline{x}_2) = b_1(\underline{x}_1, \underline{x}_1) + b_2(\underline{x}_2, \underline{x}_2) = q_1(\underline{x}_1) + q_2(\underline{x}_2).$$

(2) Si l'on choisit une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ de V_1 et une base $(\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$ de V_2 , alors on peut calculer les matrices respectives

$$B_1 = (b_1(\underline{e}_i, \underline{e}_j))_{i,j} \quad \text{et} \quad B_2 = (b_2(\underline{d}_k, \underline{d}_l))_{k,l}.$$

De l'autre côté, pour la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n, \underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m)$ de la somme directe $V_1 \oplus V_2$ on peut calculer (pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $1 \leq k, l \leq m$) que

$$b(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = b_1(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \quad , \quad b(\underline{e}_i, \underline{d}_k) = 0 = b(\underline{d}_k, \underline{e}_i) \quad , \quad b(\underline{d}_k, \underline{d}_l) = b_2(\underline{d}_k, \underline{d}_l).$$

Ainsi on obtient la matrice

$$B = \begin{pmatrix} b(\underline{e}_1, \underline{e}_1) & \cdots & b(\underline{e}_1, \underline{e}_n) & b(\underline{e}_1, \underline{d}_1) & \cdots & b(\underline{e}_1, \underline{d}_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b(\underline{e}_n, \underline{e}_1) & \cdots & b(\underline{e}_n, \underline{e}_n) & b(\underline{e}_n, \underline{d}_1) & \cdots & b(\underline{e}_n, \underline{d}_m) \\ b(\underline{d}_1, \underline{e}_1) & \cdots & b(\underline{d}_1, \underline{e}_n) & b(\underline{d}_1, \underline{d}_1) & \cdots & b(\underline{d}_1, \underline{d}_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b(\underline{d}_m, \underline{e}_1) & \cdots & b(\underline{d}_m, \underline{e}_n) & b(\underline{d}_m, \underline{d}_1) & \cdots & b(\underline{d}_m, \underline{d}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

(3) Même genre de raisonnement (exercice). □

Exemple 3.2.4 La somme orthogonale de $(\mathbb{R}^2, q_1(x, y) = x^2 + xy)$ avec $(\mathbb{R}^3, q_2(x, y, z) = xy + y^2 + xz)$ est l'espace $(\mathbb{R}^5, q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4 + x_4^2 + x_3x_5)$.

Exemple 3.2.5 Lorsqu'on calcule la somme orthogonale $(V_1, q_1) \perp (V_2, q_2)$, on équipe l'espace $V_1 \oplus V_2$ de la "somme" $q(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = q_1(\underline{x}_1) + q_2(\underline{x}_2)$; mais réciproquement on peut donc aussi "décomposer" une forme quadratique donnée par "séparation des variables". Par exemple, la forme quadratique $q: F^6 \rightarrow F: (x_1, \dots, x_6) \mapsto x_1^2 + 3x_1x_5 - x_3^6 + x_4x_6 + x_6^2$ peut être considérée comme la somme des formes $q_1: F^2 \rightarrow F: (x_1, x_5) \mapsto x_1^2 + 3x_1x_5$, $q_2: F^2 \rightarrow F: (x_2, x_3) \mapsto -x_3^2$ et $q_3: F^3 \rightarrow F: (x_4, x_6) \mapsto x_4x_6 + x_6^2$.

Maintenant on peut donner un argument matriciel pour les assertions suivantes :

Proposition 3.2.6 1. Une somme orthogonale $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2)$ est un espace quadratique régulier si et seulement si les termes (V_1, b_1) et (V_2, b_2) sont des espaces quadratiques réguliers.

2. Si on a des isométries $(V_1, b_1) \cong (V'_1, b'_1)$ et $(V_2, b_2) \cong (V'_2, b'_2)$ alors on a aussi une isométrie $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2) \cong (V'_1, b'_1) \perp (V'_2, b'_2)$.

3. On a une isométrie $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2) \cong (V_2, b_2) \perp (V_1, b_1)$.

4. On a une isométrie $((V_1, b_1) \perp (V_2, b_2)) \perp (V_3, b_3) \cong (V_1, b_1) \perp ((V_2, b_2) \perp (V_3, b_3))$.

5. Si on note $(\{\underline{0}\}, 0)$ l'(unique) espace quadratique de dimension 0, alors on a une isométrie $(V_1, b_1) \perp (\{\underline{0}\}, 0) \cong (V_1, b_1)$.

Démonstration. (1) La matrice symétrique

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

de $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2)$ est inversible si et seulement si les matrices B_1 et B_2 de (V_1, b_1) et (V_2, b_2) le sont.

(2) L'isométrie $(V_1, b_1) \cong (V'_1, b'_1)$ implique qu'au niveau matriciel les matrices symétriques respectives B_1 et B'_1 sont congruentes; de même, l'isométrie $(V_2, b_2) \cong (V'_2, b'_2)$ implique une congruence de matrices symétriques B_2 et B'_2 . Il suit (par "assemblage" de matrices) qu'aussi

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} B'_1 & O \\ O & B'_2 \end{pmatrix}$$

sont congruentes; et cela atteste de l'isométrie $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2) \cong (V'_1, b'_1) \perp (V'_2, b'_2)$.

(3, 4, 5) Même genre de raisonnement (exercice). □

Exemple 3.2.7 Pour (V, b) et (V', b') des espaces réguliers, aussi $(V, b) \perp (V', b')$ est régulier; et (par exemple par un argument matriciel; exercice!) on peut calculer le discriminant (voir Définition 2.2.10) de la somme par $\text{dis}((V, b) \perp (V', b')) = \text{dis}(V, b) \cdot \text{dis}(V', b') \in F^\times / F^{\times 2}$.

La Proposition ci-dessus indique en particulier que, pour trois espaces quadratiques (V_1, b_1) , (V_2, b_2) et (V_3, b_3) , les deux façons de calculer leur somme orthogonale donnent des résultats isométriques ; par abus de langage, on parle donc de “la” somme orthogonale $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2) \perp (V_3, b_3)$ (sans expliciter les parenthèses). De manière évidente, on généralise tout cela à la somme orthogonale de k espaces, $(V_1, b_1) \perp \dots \perp (V_k, b_k)$.

Encore dans la Proposition ci-dessus, on parle – pour la première fois explicitement – de l’(unique) espace vectoriel nul $\{0\}$, qui est effectivement de dimension 0 (donc finie). L’unique forme quadratique sur cet espace est la forme nulle, $q(0) = 0$. L’unique base de cet espace est la base vide, et donc la matrice symétrique de cet espace est la “matrice vide”. Bien sûr, cet espace nul semble sans aucun intérêt—si ce n’est qu’il est le “neutre” pour la somme orthogonale d’espaces quadratiques. En effet, les assertions (3, 4, 5) de la Proposition ci-dessus disent que “la somme orthogonale d’espaces quadratiques est commutative, associative et admet un neutre” (à isométrie près). Ce point de vue sera important vers la fin du cours...

3.3. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. Soit un espace quadratique (V, q) et $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in V$. Montrer : $(\bigoplus_i F\underline{x}_i)^\perp = \bigcap_i (F\underline{x}_i)^\perp$.
3. Quotient par le radical. Soit (V, b) un espace quadratique. Le quotient $V/\text{rad}(V, b)$ est défini par la relation d’équivalence $\underline{v} \sim \underline{w} \iff \underline{v} - \underline{w} \in \text{rad}(V, b)$. Montrer qu’il s’agit d’un espace vectoriel bien défini tel que $f: V \rightarrow V/\text{rad}(V, b): \underline{v} \mapsto [\underline{v}]$ est une application linéaire. Sur ce quotient, on définit $\bar{b}([\underline{v}], [\underline{w}]) = b(\underline{v}, \underline{w})$. Montrer qu’il s’agit d’une forme bilinéaire symétrique régulière bien définie, et que $(V, b) \cong (\text{rad}(V, b), b) \perp (V/\text{rad}(V, b), \bar{b})$.

4. Diagonalisation

Soit V un F -espace ; nous allons noter $F\underline{x} = \{\alpha\underline{x} \mid \alpha \in F\}$ pour le sous-espace engendré par un vecteur $\underline{x} \in V$. Ainsi, une suite $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ de vecteurs de V est une base si et seulement si $V \cong F\underline{e}_1 \oplus \dots \oplus F\underline{e}_n$. Autrement dit, pour trouver une base de V , on *décompose* cet espace en une somme directe de sous-espaces de dimension 1. On veut faire “la même chose” avec les espaces quadratiques : on veut *décomposer* un espace quadratique (V, q) en une somme orthogonale de sous-espaces quadratiques de dimension 1.

4.1. Représentation

Introduisons d’abord la notation :

Définition 4.1.1 Pour $d \in F$ on note $\langle d \rangle$ l’espace quadratique $(F, q: F \rightarrow F: x \mapsto dx^2)$.

La forme bilinéaire symétrique de $\langle d \rangle$ est donc

$$b: F \times F \rightarrow F: (x, y) \mapsto dxy,$$

la matrice symétrique est (à congruence près)

$$B = (d) \in F^{1 \times 1},$$

et le polynôme f est (à équivalence près)

$$f(X) = dX^2 \in F[X].$$

Clairement, $\langle d \rangle$ est régulier si et seulement si d est un élément inversible de F .

Plus généralement, pour $d_1, \dots, d_n \in F$ nous allons noter

$$\langle d_1, \dots, d_n \rangle = \langle d_1 \rangle \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \langle d_n \rangle.$$

Explicitement, c’est l’espace $F \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} F = F^n$ muni de la forme quadratique

$$q: F^n \rightarrow F: (x_1, \dots, x_n) \mapsto d_1x_1^2 + \dots + d_nx_n^2;$$

sa matrice symétrique est (à congruence près) la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

et son polynôme est (à équivalence près) la somme pondérée de carrés,

$$f(X_1, \dots, X_n) = d_1 X_1^2 + \dots + d_n X_n^2.$$

Ainsi, étant donné un espace quadratique quelconque (V, b) , nous voulons établir une isométrie

$$(V, b) \cong \langle d_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle d_n \rangle = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$$

pour des nombres $d_1, \dots, d_n \in F$ qui sont donc à déterminer. De manière équivalente, au niveau matriciel, cela veut dire que nous voulons trouver, pour toute matrice symétrique B , une congruence avec une matrice diagonale :

$$B = C^t \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} C \quad \text{pour } C \text{ inversible.}$$

Ou encore de manière équivalente, au niveau des polynômes, nous voulons transformer tout polynôme f homogène de degré 2 en une somme pondérée de carrés par un changement linéaire et inversible de variables :

$$f(X_1, \dots, X_n) = d_1 Y_1^2 + \dots + d_n Y_n^2 \quad \text{pour } \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } C \text{ inversible.}$$

Ce problème s'appelle la *diagonalisation* de l'espace quadratique (V, b) .

Pour mener à bien cette tâche, nous introduisons d'abord :

Définition 4.1.2 On appelle $D(V, q) = \{d \in F^\times \mid \exists \underline{x} \in V : q(\underline{x}) = d\}$ l'ensemble des valeurs représentées par un espace quadratique (V, q) . Si $D(V, q) = F^\times$ alors on dit que l'espace (V, q) est universel.

L'universalité de (V, q) atteste donc que la forme quadratique $q: V \rightarrow F$ est surjective.

Exemple 4.1.3 Soit $X_2^2 + 3X_2X_3 \in \mathbb{F}_5[X_1, \dots, X_4]$, alors on peut réaliser l'espace quadratique (\mathbb{F}_5^4, q) par la forme quadratique $q(x, y, z, t) = y^2 + 3yt$. L'espace \mathbb{F}_5^4 compte 625 éléments ; en calculant la valeur de q en chacun de ces 625 points, on trouve les valeurs (non-nulles !) représentées par q , d'où l'ensemble $D(\mathbb{F}_5^4, q)$ (exercice).

Proposition 4.1.4 1. Si $(V, q) \cong (V', q')$ alors $D(V, q) = D(V', q')$.

2. $D((V, q) \oplus (V', q')) = \{d \in F^\times \mid \exists \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \in V \oplus V' : d = q(\underline{x}_1) + q'(\underline{x}_2)\}$.

3. Pour tout espace (V, q) il existe un sous-espace régulier (W, q) tel que $D(V, q) = D(W, q)$.

Démonstration. (1, 2) Exercice. (3) Suivant Proposition 3.1.6 on peut décomposer l'espace donné par $(V, q) \cong (\text{rad}(V, q), q) \oplus (W, q)$ avec (W, q) régulier. La forme q est nulle sur $\text{rad}(V, q)$, donc $D(V, q) = D((\text{rad}(V, q), q) \oplus (W, q)) = D(W, q)$ suit par (2). \square

Théorème 4.1.5 (Critère de représentation) Soit un espace quadratique (V, q) et $d \in F^\times$. On a $d \in D(V, q)$ si et seulement s'il existe une décomposition $(V, q) \cong \langle d \rangle \dot{\oplus} (V', q')$.

Démonstration. (\Leftarrow) Supposons que $(V, q) \cong \langle d \rangle \dot{\oplus} (V', q')$. On a $D(V, q) = D(\langle d \rangle \dot{\oplus} (V', q'))$, et $d \in D(\langle d \rangle)$ étant évident, on a aussi $d \in D(V, q)$ (par exemple comme valeur en $(1, \underline{0}) \in F \oplus V'$). (\Rightarrow) S'il existe $\underline{v} \in V$ tel que $d = q(\underline{v}) \in F^\times$, alors le sous-espace vectoriel $F\underline{v}$ de V est un sous-espace quadratique régulier pour la restriction de la forme q ; en effet, on a une isométrie $(F\underline{v}, q) \cong \langle d \rangle$. On a donc la somme orthogonale $V = F\underline{v} \dot{\oplus} (F\underline{v})^\perp$ par Proposition 3.1.3, et par Proposition 3.2.2 également $(V, q) = (F\underline{v}, q) \dot{\oplus} ((F\underline{v})^\perp, q) \cong \langle d \rangle \dot{\oplus} (V', q')$ comme souhaité. \square

Remarquons que cette démonstration propose un algorithme pour calculer concrètement la décomposition $(V, q) \cong \langle d \rangle \dot{\oplus} (V', q')$: on peut poser $V' = (F\underline{v})^\perp$ pour $d = q(\underline{v})$, et $q' : V' \rightarrow F$ est tout simplement la restriction de $q : V \rightarrow F$ à $V' \subseteq V$.

Exemple 4.1.6 Soit le polynôme $2X_1X_2 + X_2^2 + X_2X_3$ sur \mathbb{F}_3 . On peut le penser comme espace quadratique en posant $V = \mathbb{F}_3^3$ et $q(x, y, z) = 2xy + y^2 + yz$, la forme bilinéaire symétrique étant donc

$$b((x, y, z), (u, v, w)) = xv + yu + yv + 2yw + 2zv.$$

On “voit” ici que $q(1, 2, 0) = 2 \in \mathbb{F}_3^\times$ —avec les notations du Théorème, $q(\underline{v}) = d$ pour $\underline{v} = (1, 2, 0)$ et $d = 2$. Pour décomposer l'espace en $(\mathbb{F}_3^3, q) \cong \langle 2 \rangle \dot{\oplus} (V', q')$ on calcule l'orthocomplément de $\mathbb{F}_3 \cdot (1, 2, 0)$ dans (\mathbb{F}_3^3, q) :

$$\begin{aligned} V' &= \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_3^3 \mid b((x, y, z), (1, 2, 0)) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_3^3 \mid 2x + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_3^3 \mid x = z\} \end{aligned}$$

C'est à dire, V' est le sous-plan d'équation $x = z$ de \mathbb{F}_3^3 . Muni de la (restriction de la) forme quadratique q , on obtient un sous-espace quadratique (V', q) de (V, q) pour lequel on a la décomposition $(\mathbb{F}_3^3, q) \cong \langle 2 \rangle \dot{\oplus} (V', q)$.

4.2. Diagonalisation

Le corollaire principal du Théorème 4.1.5 est enfin :

Théorème 4.2.1 (Diagonalisation) Pour tout espace quadratique (V, q) il existe des scalaires $d_1, \dots, d_n \in F$ tels que $(V, q) \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle$.

Démonstration. Si $D(V, q) = \emptyset$, alors nécessairement $b(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in V$, et donc $(V, b) \cong \langle 0, \dots, 0 \rangle$. (En effet, pour toute base de V on trouvera la matrice symétrique nulle pour la forme bilinéaire b .) Si $D(V, q) \neq \emptyset$ alors il existe $d \in D(V, q)$ et par le Critère de Représentation on trouve une décomposition $(V, q) \cong \langle d \rangle \dot{\oplus} (V', q')$; et dans ce cas on a $\dim(V') = \dim(V) - 1$. On répète la procédure sur (V', q') ; et (par induction sur la dimension de V) on arrive au résultat. \square

Cette démonstration donne une méthode pour calculer une décomposition $(V, q) \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle$. Concrètement, on construit une suite $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ dans V telle que

$$b(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

de façon que $V \cong F\underline{v}_1 \oplus \dots \oplus F\underline{v}_n$, et donc $(V, q) \cong \langle d_1 \rangle \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \langle d_n \rangle$. Autrement dit, $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ est une *base orthogonale* de V .

Exemple 4.2.2 Reprenons l'exemple ci-dessus : l'espace quadratique

$$(\mathbb{F}_3^3, q(x, y, z) = 2xy + y^2 + yz)$$

se décompose en $(\mathbb{F}_3^3, q) = \langle 2 \rangle \dot{\oplus} (V', q)$ pour $V' = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_3^3 \mid x = z\}$ muni de la restriction de q à V' . On refait l'argument du Théorème 4.1.5 avec l'espace (V', q) : on "voit" que $q(1, 1, 1) = 1$ pour $(1, 1, 1) \in V'$, donc on calcule l'orthocomplément de $\mathbb{F}_3 \cdot (1, 1, 1)$ dans (V', q) :

$$\begin{aligned} V'' &= \{(x, y, z) \in V' \mid b((x, y, z), (1, 1, 1)) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_3^3 \mid x = z \text{ et } b((x, y, z), (1, 1, 1)) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_3^3 \mid x = z \text{ et } x + y + 2z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_3^3 \mid x = z \text{ et } y = 0\} \end{aligned}$$

La (restriction de la) forme quadratique $q: V' \rightarrow F$ au sous-espace vectoriel $V'' \subseteq V'$ en fait un sous-espace quadratique (V'', q) tel que $(V', q) \cong \langle 1 \rangle \dot{\oplus} (V'', q)$. Mais notons que la forme quadratique q est nulle sur V'' ; et notons que le vecteur $(1, 0, 1) \in \mathbb{F}_3^3$ est une base de V'' : ainsi on a vérifié que $(V'', q'') \cong \langle 0 \rangle$. Au final, nous avons que

$$(\mathbb{F}_3^3, q) \cong \langle 2 \rangle \dot{\oplus} (V', q') \cong \langle 2 \rangle \dot{\oplus} \langle 1 \rangle \dot{\oplus} (V'', q'') \cong \langle 2 \rangle \dot{\oplus} \langle 1 \rangle \dot{\oplus} \langle 0 \rangle = \langle 2, 1, 0 \rangle.$$

Cette décomposition est réalisée par la base orthogonale $((1, 2, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 1))$ de \mathbb{F}_3^3 pour la forme quadratique q .

Par ailleurs, ce résultat peut aussi être compris au niveau matriciel. En effet, si on équipe l'espace \mathbb{F}_3^3 de sa base canonique, alors la matrice symétrique de la forme quadratique $q(x, y, z) = 2xy + y^2 + yz$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3 \times 3}.$$

L'isométrie $(\mathbb{F}_3^3, q) \cong \langle 2, 1, 0 \rangle$ dit exactement que B est congruente à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

4. Diagonalisation

la matrice inversible C telle que $D = C^t B C$ est précisément la matrice de changement de base de la base orthogonale $((1, 2, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 1))$ à la base canonique $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, nos calculs attestent du fait que le polynôme $2X_1X_2 + X_2^2 + X_2X_3 \in \mathbb{F}_3[X_1, \dots, X_3]$ est équivalent au polynôme $2X_1^2 + X_2^2 \in \mathbb{F}_3[X_1, X_2, X_3]$. En effet, si on note cette dernière somme pondérée de carrés pour un instant par $2Y_1^2 + Y_2^2$ (pour ne pas confondre les variables), alors le changement (linéaire et inversible!) de variables donné par la matrice C ci-dessus, soit

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3 \\ X_2 = 2Y_1 + Y_2 \\ X_3 = Y_2 + Y_3 \end{cases}$$

montre bien que

$$2X_1X_2 + X_2^2 + X_2X_3 = 2(Y_1 + Y_2 + Y_3)(2Y_1 + Y_2) + (2Y_1 + Y_2)^2 + (2Y_1 + Y_2)(Y_2 + Y_3) = 2Y_1^2 + Y_2^2.$$

Exemple 4.2.3 Bien souvent, lorsqu'on diagonalise un espace quadratique (V, q) , on souhaite connaître une forme quadratique diagonale isométrique $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$, mais pas nécessairement une base orthogonale pour (V, q) réalisant cette diagonalisation ; autrement dit, on n'a pas besoin de connaître explicitement l'isométrie $f : (V, q) \rightarrow \langle d_1, \dots, d_n \rangle$. On peut alors simplifier les calculs "en cours de route". Par exemple, soit \mathbb{R}^3 muni de la forme $q(x, y, z) = x^2 + xy - yz + z^2$; on voit que $q(1, 1, 0) = 2$ et donc $(\mathbb{R}^3, q) \cong \langle 2 \rangle \oplus (\mathbb{R} \cdot (1, 1, 0))^\perp$. On calcule que

$$(\mathbb{R} \cdot (1, 1, 0))^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 0\}.$$

Ceci est un sous-plan de \mathbb{R}^3 . Lorsqu'on choisit une base pour ce plan, p.e. $((1, 0, 3), (0, 1, 1))$, on peut établir un isomorphisme avec \mathbb{R}^2 :

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R} \cdot (1, 1, 0))^\perp : (r, s) \mapsto r \cdot (1, 0, 3) + s \cdot (0, 1, 1)$$

Cet isomorphisme devient une isométrie si on munit \mathbb{R}^2 de la forme quadratique

$$q'(r, s) = q(r \cdot (1, 0, 3) + s \cdot (0, 1, 1)) = q(r, s, 3r + s) = 10r^2 + 3rs.$$

Autrement dit, ceci établit que $(\mathbb{R}^3, q) \cong \langle 2 \rangle \oplus ((\mathbb{R} \cdot (1, 1, 0))^\perp, q) \cong \langle 2 \rangle \oplus (\mathbb{R}^2, q')$, et on peut continuer la diagonalisation avec (\mathbb{R}^2, q') au lieu de $((\mathbb{R} \cdot (1, 1, 0))^\perp, q)$, si on estime que cela simplifie les calculs.

Remarque 4.2.4 Lorsqu'on diagonalise une somme orthogonale d'espaces quadratiques, on peut diagonaliser "à part" les composantes ; par exemple :

$$(V, b) \cong (V_1, b_1) \oplus (V_2, b_2) \cong \langle d_1, \dots, d_k \rangle \oplus \langle e_1, \dots, e_l \rangle = \langle d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_l \rangle.$$

En particulier, tout espace est (de manière essentiellement unique) la somme de son radical et d'une partie régulière (voir Propositions 3.1.6 et 3.1.9), soit $(V, b) \cong (\text{rad}(V, b), b) \oplus (W, b)$. La diagonalisation de $(\text{rad}(V, b), b)$ est nécessairement $(\text{rad}(V), b) \cong \langle 0, \dots, 0 \rangle$, et la diagonalisation de l'espace régulier (W, b) se fait nécessairement par des valeurs non-nulles : $(W, b) \cong \langle d_1, \dots, d_k \rangle$ pour $d_i \in F^\times$.

Remarque 4.2.5 Pour apporter une simplification à une diagonalisation $(V, b) \cong \langle d_1, \dots, d_k \rangle$ (avec $d_i \in F$), remarquons que, pour tout $a \in F^\times$ et $d \in F$, on a une isométrie $\langle d \rangle \cong \langle a^2 d \rangle$:

$$(F, q(x) = dx^2) \rightarrow (F, q'(x) = a^2 dx^2): x \mapsto ax$$

Par somme orthogonale de tels isométries, on peut “simplifier les carrés” dans la diagonalisation :

$$(V, b) \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle \cong \langle a_1^2 d_1, \dots, a_n^2 d_n \rangle \text{ pour tout } a_1, \dots, a_n \in F^\times.$$

Ainsi, la disponibilité de carrés (ou, inversement, de racines carrées) dans le corps F permet une simplification considérable des formes diagonales.

Exemple 4.2.6 Sur \mathbb{R} , l'espace quadratique $\langle 3, 2, 1 \rangle$ est isométrique à $\langle 1, 1, 1 \rangle$, parce que 3 et 2 sont des carrés dans \mathbb{R} .

Exemple 4.2.7 L'espace $\langle d \rangle$ est régulier si et seulement si $d \in F^\times$, et dans ce cas son discriminant est $[d] \in F^\times / F^{\times 2}$. Plus généralement, $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$ est régulier si et seulement si tous les d_i 's sont non-nuls, et dans ce cas son discriminant est $[d_1 \cdot \dots \cdot d_n]$. Cela permet de voir – quasi sans calcul – que les espaces $\langle 3, 2, 1 \rangle$ et $\langle 1, 1, 1 \rangle$ sont non-isométriques sur \mathbb{Q} .

Exemple 4.2.8 Sur \mathbb{F}_7 , les carrés non-nuls sont $1^2 = 6^2 = 1$, $3^2 = 4^2 = 2$ et $2^2 = 5^2 = 4$. On peut remplacer dans la diagonalisation $\langle 0, 0, 2, 4, 6, 1, 5 \rangle$ toute occurrence d'un carré par 1, pour obtenir son isométrie avec $\langle 0, 0, 1, 1, 6, 1, 5 \rangle$. Mais on peut aussi remarquer que $6 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$, et donc on a encore l'isométrie avec $\langle 0, 0, 1, 1, 5, 1, 5 \rangle$. On obtient ainsi une forme diagonale avec des 0's, des 1's et des occurrences d'un seul non-carré. Nous allons exploiter cette idée dans le chapitre suivant.

Remarque 4.2.9 Si on “oublie” pour un instant les espaces quadratiques et les matrices symétriques, on peut dire que le Théorème de Diagonalisation atteste tout simplement du fait que tout polynôme $f \in F[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré 2 peut être écrit comme une somme pondérée de carrés à un changement linéaire inversible de variables près. Autrement dit, pour un tel f il existe une matrice inversible $C \in F^{n \times n}$ telle que, si on pose

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

alors on a $f(X_1, \dots, X_n) = \sum_i d_i Y_i^2$. La *méthode de réduction de Gauss* est un algorithme pour calculer la somme pondérée $\sum_i d_i Y_i^2$ directement—sans passer par l'espace quadratique déterminé par f .

4. Diagonalisation

D'abord, supposons que $f(X_1, \dots, X_n)$ a un terme $a_i X_i^2$ non-nul; on peut supposer (à permutation des variables près) que c'est aX_1^2 . On peut alors réécrire (puisque $2 \neq 0$ dans F !)

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_n) &= aX_1^2 + X_1g(X_2, \dots, X_n) + h(X_2, \dots, X_n) \\ &= a\left(X_1 + \frac{1}{2a}g(X_2, \dots, X_n)\right)^2 - a\left(\frac{1}{2a}g(X_2, \dots, X_n)\right)^2 + h(X_2, \dots, X_n) \end{aligned}$$

et par le changement linéaire et inversible de variables

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + \frac{1}{2a}g(X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 = X_2 \\ \vdots \\ Y_n = X_n \end{cases}$$

on voit que

$$f(X_1, \dots, X_n) = aY_1^2 + k(Y_2, \dots, Y_n)$$

où $k(Y_2, \dots, Y_n)$ est homogène de degré 2, et ne contient pas de Y_1 .

Supposons, par contre, que $f(X_1, \dots, X_n)$ n'a aucun terme en X_i^2 ; si f n'est pas nul (au quel cas sa diagonalisation est triviale!), il y a donc un terme $a_{ij}X_iX_j$ de coefficient non-nul et (à permutation des variables près) on peut supposer que c'est aX_1X_2 . On peut réécrire f comme

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_n) &= aX_1X_2 + X_1g(X_3, \dots, X_n) + X_2h(X_3, \dots, X_n) + k(X_3, \dots, X_n) \\ &= a\left(X_1 + \frac{1}{a}h(X_3, \dots, X_n)\right)\left(X_2 + \frac{1}{a}g(X_3, \dots, X_n)\right) + l(X_3, \dots, X_n) \\ &= \frac{a}{4}\left(X_1 + X_2 + \frac{g(X_3, \dots, X_n) + h(X_3, \dots, X_n)}{a}\right)^2 \\ &\quad - \frac{a}{4}\left(X_1 - X_2 + \frac{-g(X_3, \dots, X_n) + h(X_3, \dots, X_n)}{a}\right)^2 + l(X_3, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Par le changement linéaire et inversible de variables

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 + \frac{g(X_3, \dots, X_n) + h(X_3, \dots, X_n)}{a} \\ Y_2 = X_1 - X_2 + \frac{-g(X_3, \dots, X_n) + h(X_3, \dots, X_n)}{a} \\ Y_3 = X_3 \\ \vdots \\ Y_n = X_n \end{cases}$$

le polynôme devient

$$f(X_1, \dots, X_n) = \frac{a}{4}Y_1^2 - \frac{a}{4}Y_2^2 + l(Y_3, \dots, Y_n)$$

où $l(Y_3, \dots, Y_n)$ est homogène de degré 2, et ne contient pas de Y_1 ou de Y_2 .

Ainsi, par itération de la procédure – par induction sur le nombre de variables – on peut écrire le polynôme $f(X_1, \dots, X_n)$ comme une somme pondérée de carées des Y_i 's, et ce en ne faisant que des changements linéaires et inversibles des variables.

Voici une application concrète : soit $f(X_1, X_2, X_3) = 3X_1^2 + 4X_1X_2 - 5X_2^2 - X_1X_3$ sur \mathbb{F}_{11} . Alors on peut calculer (dans \mathbb{F}_{11} bien sûr !) à changement linéaire et inversible de variables près :

$$\begin{aligned}
 3X_1^2 + 4X_1X_2 - 5X_2^2 - X_1X_3 &= 3X_1^2 + X_1(4X_2 - X_3) - 5X_2^2 \\
 &= 3\left(X_1^2 + 4X_1(4X_2 - X_3)\right) - 5X_2^2 \\
 &= 3\left[\left(X_1 + 2(4X_2 - X_3)\right)^2 - \left(2(4X_2 - X_3)\right)^2\right] - 5X_2^2 \\
 &= 3\left(X_1 + 2(4X_2 - X_3)\right)^2 - 3\left(2(4X_2 - X_3)\right)^2 - 5X_2^2 \\
 &= 3\left(X_1 + 2(4X_2 - X_3)\right)^2 - (4X_2 - X_3)^2 + 6X_2^2 \\
 &= 3\left(X_1 + 2(4X_2 - X_3)\right)^2 - (16X_2^2 - 8X_2X_3 + X_3^2) + 6X_2^2 \\
 &= 3\left(X_1 + 8X_2 + 9X_3\right)^2 + X_2^2 + 8X_2X_3 - X_3^2 \\
 &\cong 3Y_1^2 + Y_2^2 + 8Y_2Y_3 - Y_3^2 \\
 &= 3Y_1^2 + \left((Y_2 + 4Y_3)^2 - (4Y_3)^2\right) - Y_3^2 \\
 &= 3Y_1^2 + (Y_2 + 4Y_3)^2 - 16Y_3^2 - Y_3^2 \\
 &= 3Y_1^2 + (Y_2 + 4Y_3)^2 + 5Y_3^2 \\
 &\cong 3Z_1^2 + Z_2^2 + 5Z_3^2
 \end{aligned}$$

Les changements de variables à faire sont donc

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

Si on les compose on a

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

et on peut inverser cette matrice pour obtenir C :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. On considère la forme quadratique $q(x, y) = x^2 + 2xy$ sur $V = \mathbb{F}_5^2$. Vérifier que $d = 1 \in \mathbb{F}_5$ est représenté par cette forme quadratique, et (suivant la démonstration du Critère de Représentation) écrire (V, q) comme une somme orthogonale $\langle 1 \rangle \perp (V', q')$.

4. Diagonalisation

3. Supposons que $d_1, d_2, d_1 + d_2 \in F^\times$. Montrer que $\langle d_1, d_2 \rangle \cong \langle d_1 + d_2, d_1 d_2 (d_1 + d_2) \rangle$. Indication : Montrer que $d_1 + d_2 \in D(\langle d_1, d_2 \rangle)$ puis suivre la démonstration du Critère de Représentation.

4. Montrer : pour tout $c \in F^\times$, $c \in D(\langle a, b \rangle)$ si et seulement si $\langle a, b \rangle \cong \langle c, abc \rangle$. Indication : Une implication est quasi triviale. Pour l'autre : si $c \in D(\langle a, b \rangle)$ alors $c \in F^\times$ et $(a, b) \neq (0, 0)$; suivre ensuite la démonstration du Critère de Représentation.

5. Appliquer le Théorème de Diagonalisation à :

(a) $q(x, y, z) = y^2 + 4xy - z^2 + xz$ sur \mathbb{R}

(b) $q(x, y, z) = y^2 + 4xy - z^2 + xz$ sur \mathbb{F}_7

6. Pour les formes ci-dessous, donner une diagonalisation par la méthode de réduction de Gauss :

(a) $f(X_1, X_2, X_3) = 3X_1^2 + 4X_1X_2 - 5X_2^2 - X_1X_3$ sur \mathbb{R} ,

(b) $f(X_1, X_2, X_3) = 3X_1^2 + 4X_1X_2 - 5X_2^2 - X_1X_3$ sur \mathbb{F}_7 ,

(c) $f(X, Y, Z) = XY + XZ + YZ$ sur \mathbb{R} ,

(d) $f(X, Y, Z) = XY + XZ + YZ$ sur \mathbb{F}_3 .

7. Donner le rang et le discriminant de tous les espaces quadratiques rencontrés jusqu'à présent.

8. Donner une démonstration "matricielle" pour la Remarque 4.2.5.

9. Soient (V, b) et (V', b') deux espaces quadratiques réguliers de dimension 2 sur un corps F quelconque. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(a) $(V, b) \cong (V', b')$,

(b) $\text{dis}(V, b) = \text{dis}(V', b')$ et $D(V, b) = D(V', b')$,

(c) $\text{dis}(V, b) = \text{dis}(V', b')$ et $D(V, b) \cap D(V', b') \neq \emptyset$.

Qu'en est-il pour des espaces réguliers de dimension plus grand que 2 (p.e. sur le corps $F = \mathbb{R}$) ?

5. Classification des espaces quadratiques complexes, réels et finis

Pour résumer les chapitres précédents, lorsqu'on calcule une diagonalisation $(V, b) \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ d'un espace quadratique donné, on sait que :

- le nombre de zéros parmi les d_i 's est toujours le même—la partie nulle correspond au radical de l'espace,
- le nombre de non-zéros parmi les d_i 's est aussi toujours le même—la partie non-nulle correspond à la partie régulière de l'espace,
- on peut toujours remplacer un d_i par $a^2 d_i$ (ou $a^{-2} d_i$) pour $a \neq 0$,
- le produit des d_i 's non-nuls est toujours le même à carré près.

Cela nous permettra de décrire *tous les espaces quadratiques complexes, réels et finis*—comme suit.

5.1. Espaces quadratiques complexes

Soit un espace quadratique complexe (V, b) et une diagonalisation

$$(V, b) \cong \langle 0, \dots, 0, d_1, \dots, d_k \rangle \quad \text{avec } d_i \in \mathbb{C}^\times.$$

Puisqu'on a $d_i = (\sqrt{d_i})^2 \cdot 1$, on peut *simplifier* cette expression (à isométrie près, bien évidemment) :

$$\begin{aligned}(V, b) &\cong \langle 0, \dots, 0, d_1, \dots, d_k \rangle \\ &\cong \langle 0, \dots, 0, (\sqrt{d_1})^2 \cdot 1, \dots, (\sqrt{d_k})^2 \cdot 1 \rangle \\ &\cong \langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1 \rangle\end{aligned}$$

On peut résumer ainsi :

Théorème 5.1.1 *Tout espace quadratique sur \mathbb{C} s'écrit – à isométrie près – comme*

$$\langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1 \rangle$$

et est ainsi entièrement déterminé par sa dimension et son rang.

En dimension n , il y a donc $n + 1$ classes d'isométrie distinctes d'espaces quadratiques. Par ailleurs, il y a un unique (à isométrie près) espace régulier de dimension n , à savoir $\langle 1, \dots, 1 \rangle$.

Remarque 5.1.2 Un corps F est *quadratiquement clos* si tout élément de F est un carré ; c'est bien le cas pour $F = \mathbb{C}$ (mais pas, par exemple, pour \mathbb{R} : aucun nombre strictement négatif est un carré!). Le Théorème 5.1.1 est clairement valable pour tout corps quadratiquement clos. Mieux encore, cet énoncé *caractérise* les corps quadratiquement clos ; pour cela, il suffit de noter que $\langle d \rangle \cong \langle 1 \rangle$ si et seulement s'il existe $a \in F$ tel que $d = a^2$.

Exemple 5.1.3 Soit la matrice symétrique

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 2i & 0 \\ 1+i & 0 & 1-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

et (V, b) un espace quadratique complexe correspondant. On peut considérer l'application linéaire $\hat{b}: V \rightarrow V^*$ dont la matrice (pour des bases bien choisies, voir Proposition 2.2.7) est B ; son noyau est le radical de (V, b) . Mais cette matrice est de rang 3, son noyau est de dimension 0, et on en déduit que $(V, b) \cong \langle 1, 1, 1 \rangle$.

5.2. Espaces quadratiques réelles

Soit un espace quadratique réel (V, b) et une diagonalisation

$$(V, b) \cong \langle 0, \dots, 0, d_1, \dots, d_k \rangle \quad \text{avec } d_i \in \mathbb{R}^\times.$$

Puisque \mathbb{R} n'est pas quadratiquement clos, on ne peut pas faire le même raisonnement que ci-dessus ; mais il est tout de même vrai que

$$d_i = \begin{cases} (\sqrt{d_i})^2 \cdot 1 & \text{si } d_i \geq 0 \\ (\sqrt{-d_i})^2 \cdot (-1) & \text{si } d_i \leq 0 \end{cases}$$

et donc on peut *simplifier* cette expression (à isométrie près, bien évidemment) :

$$\begin{aligned} (V, b) &\cong \langle 0, \dots, 0, d_1, \dots, d_k \rangle \\ &\cong \langle 0, \dots, 0, (\sqrt{d_1})^2 \cdot (\pm 1), \dots, (\sqrt{d_k})^2 \cdot (\pm 1) \rangle \\ &\cong \langle 0, \dots, 0, \pm 1, \dots, \pm 1 \rangle \\ &\cong \langle 0, \dots, 0, +1, \dots, +1, -1, \dots, -1 \rangle \end{aligned}$$

Pour passer à la dernière ligne, on a permuté les éléments pour placer d'abord les +1's puis les -1's ; cela est permis puisqu'une telle permutation est isométrique (exercice). Dans cette expression, le nombre de nuls et de non-nuls est invariant—mais qu'en est-il pour le nombre de +1's et le nombre de -1's ?

1. James Joseph Sylvester (1814–1897) a démontré ce résultat en 1852 dans le cadre des polynômes. Il a par ailleurs aussi introduit le mot *matrix* (matrice) en algèbre linéaire.

Proposition 5.2.1 (Loi d’inertie de Sylvester¹) Sur le corps \mathbb{R} on a une isométrie de deux espaces

$$\underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_r, \underbrace{\langle -1, \dots, -1 \rangle}_s \cong \underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_{r'}, \underbrace{\langle -1, \dots, -1 \rangle}_{s'}$$

si et seulement si $r = r'$ et $s = s'$.

Démonstration. Une implication est évidente. Pour l’autre, on suppose avoir un espace (régulier) (V, b) , et deux bases orthogonales $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$, correspondant aux diagonalisations données; on a donc

$$\begin{aligned} b(\underline{e}_i, \underline{e}_i) &= \begin{cases} +1 & \text{si } i \leq r \\ -1 & \text{si } i > r \end{cases} & \text{et} & b(\underline{e}'_i, \underline{e}'_i) = \begin{cases} +1 & \text{si } i \leq r' \\ -1 & \text{si } i > r' \end{cases} \\ b(\underline{e}_i, \underline{e}_j) &= 0 & \text{si } i \neq j & b'(\underline{e}'_i, \underline{e}'_j) = 0 & \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

Observons d’abord que la suite $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r, \underline{e}'_{r'+1}, \dots, \underline{e}'_n$ est libre. Pour cela, supposons qu’on ait une combinaison linéaire nulle,

$$\sum_{i=1}^r x_i \underline{e}_i + \sum_{j=r'+1}^n y_j \underline{e}'_j = \underline{0},$$

alors on doit montrer que tous les x_i ’s et tous les y_j ’s sont nuls. On peut réécrire cette combinaison linéaire comme

$$\sum_{i=1}^r x_i \underline{e}_i = - \sum_{j=r'+1}^n y_j \underline{e}'_j$$

puis calculer avec la forme bilinéaire b comme suit :

$$b\left(\sum_{i=1}^r x_i \underline{e}_i, \sum_{i=1}^r x_i \underline{e}_i\right) = \sum_{i,k=1}^r x_i x_k b(\underline{e}_i, \underline{e}_k) = \sum_{i=1}^r x_i^2 (+1) = \sum_{i=1}^r x_i^2$$

$$b\left(- \sum_{j=r'+1}^n y_j \underline{e}'_j, - \sum_{j=r'+1}^n y_j \underline{e}'_j\right) = (-1)(-1) \sum_{j,l=r'+1}^n y_j y_l b(\underline{e}'_j, \underline{e}'_l) = \sum_{j=r'+1}^n y_j^2 (-1) = - \sum_{j=r'+1}^n y_j^2$$

Dans le corps \mathbb{R} , tout carré est positif, donc toute somme de carrés est positive, donc l’égalité

$$\sum_{i=1}^r x_i^2 = - \sum_{j=r'+1}^n y_j^2$$

implique bel et bien $x_1 = \dots = x_r = y_{r'+1} = \dots = y_n = 0$, comme voulu. Il suit maintenant que $r + (n - r') \leq n$, donc $r \leq r'$; par un même argument on trouve aussi $r \geq r'$; et finalement on a bien sûr aussi $s = n - r = n - r' = s'$. \square

Remarque 5.2.2 Le point crucial dans cette démonstration est l’assertion que, dans $F = \mathbb{R}$, “toute somme de carrés est positive”. Ceci n’est pas possible dans un corps quelconque—par exemple, il n’y a pas de “nombres positifs” et de “nombres négatifs” dans le corps \mathbb{C} , ou dans un corps fini \mathbb{F}_q . Cela étant dit, d’ici peu nous allons démontrer un résultat “d’inertie” bien plus général—voir la Décomposition de Witt du Théorème 7.1.2.

Bref, on peut conclure :

Théorème 5.2.3 *Tout espace quadratique sur \mathbb{R} s'écrit – à isométrie près – comme*

$$\langle 0, \dots, 0, +1, \dots, +1, -1, \dots, -1 \rangle$$

et est ainsi entièrement déterminé par sa dimension et sa signature (= le nombre de +1's et le nombre de -1's).

En dimension n , il existe donc $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes d'équivalence d'espaces quadratiques réels ; si on se limite aux espaces réguliers, alors il y en a $n + 1$ (exercice).

Exemple 5.2.4 Une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^n est un produit scalaire si et seulement si l'espace quadratique (V, b) ainsi obtenu est isométrique à $\langle 1, \dots, 1 \rangle$. Dans ce cas, le groupe orthogonal $O(V, b)$ est isomorphe au groupe orthogonal $O\langle 1, \dots, 1 \rangle$, qui n'est autre que le groupe des matrices réelles orthogonales $n \times n$.

5.3. Espaces quadratiques finis

Notons \mathbb{F}_p le corps à p éléments, pour p un nombre premier ; habituellement on réalise ce corps comme le quotient de l'anneau \mathbb{Z} par l'idéal premier (p) . Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ on peut trouver² un polynôme irréductible $f \in \mathbb{F}_p[X]$ de degré m , et il suit (par des arguments classiques de l'arithmétique) que

$$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[X]/(f)$$

est un corps à $q = p^m$ éléments. Concrètement, les éléments de \mathbb{F}_q sont “les restes après division euclidienne par f dans $\mathbb{F}_p[X]$ ” : ce sont donc exactement les polynômes de degré strictement inférieur à m , avec la somme habituelle mais avec le produit modulo f . Rappelons enfin que, pour la théorie des formes quadratiques, puisqu'on veut des corps de caractéristique différent de 2, on prendra pour p un nombre premier impair.

Exemple 5.3.1 Le corps \mathbb{F}_9 à $9 = 3^2$ éléments peut être réalisé par le quotient de $\mathbb{F}_3[X]$ par un polynôme irréductible $f \in \mathbb{F}_3[X]$ de degré 2. On vérifie que, par exemple, $f(X) = X^2 + 1$ n'a aucune racine sur \mathbb{F}_3 , et est donc irréductible. On peut ensuite identifier les éléments de \mathbb{F}_9 avec les polynômes

$$\begin{aligned} a_0 &= 0X + 0, & a_1 &= 0X + 1, & a_2 &= 0X + 2, \\ a_3 &= 1X + 0, & a_4 &= 1X + 1, & a_5 &= 1X + 2, \\ a_6 &= 2X + 0, & a_7 &= 2X + 1, & a_8 &= 2X + 2. \end{aligned}$$

La somme des éléments dans \mathbb{F}_9 correspond alors à la somme des polynômes (mais pour les coefficients on travaille dans \mathbb{F}_3 bien sûr) ; donc par exemple $a_3 + a_5 = a_8$, ou encore $a_2 + a_7 = a_6$, etc. Le produit des éléments dans \mathbb{F}_9 correspond au produit des polynômes modulo $f = X^2 + 1$; par exemple, $a_4 \cdot a_7 \equiv (X + 1)(2X + 1) \equiv 2X^2 + 3X + 1 \equiv 2X^2 + 1 \equiv 2 \equiv a_2$.

2. Malheureusement, il n'y a pas de “formule magique” pour produire un tel polynôme—c'est souvent une question de *trial and error* à l'aide d'un ordinateur.

Soit maintenant un espace quadratique fini³ (V, b) et une diagonalisation

$$(V, b) \cong \langle 0, \dots, 0, d_1, \dots, d_k \rangle \quad \text{avec } d_i \in \mathbb{F}_q^\times.$$

Pour simplifier la partie régulière de cet espace, on va devoir s'intéresser aux carrés dans \mathbb{F}_q —ou mieux dit, à l'égalité des éléments de \mathbb{F}_q^\times à carré près. Pour le corps \mathbb{C} , tout élément est un carré ; pour le corps \mathbb{R} , tout élément est un carré "à signe près" ; pour les corps finis, on a le résultat suivant :

Proposition 5.3.2 *On peut écrire tout $x \in \mathbb{F}_q^\times$ comme*

$$\begin{cases} \text{soit } x = y^2 \cdot 1 \\ \text{soit } x = y^2 \cdot \varepsilon \end{cases}$$

où $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times$ n'est pas un carré.

Démonstration. Pour un corps quelconque F , considérons le groupe multiplicatif $(F^\times, \cdot, 1)$. L'ensemble $F^{\times 2} = \{a^2 \mid a \in F^\times\}$ des carrés non-nuls en est un sous-groupe, et $\gamma: F^\times \rightarrow F^{\times 2}: x \mapsto x^2$ est un homomorphisme surjectif de groupes : ainsi $F^{\times 2}$ est le quotient de F^\times par $\ker(\gamma)$. Lorsque $\text{car}(F) \neq 2$ on a ainsi (voir exercices) :

$$|F^{\times 2}| = |F^\times / \{+1, -1\}| = \frac{|F^\times|}{2}.$$

Pour $F = \mathbb{F}_q$ (et q impair) cela devient $|\mathbb{F}_q^{\times 2}| = \frac{q-1}{2}$. Autrement dit, parmi les $q-1$ éléments de \mathbb{F}_q^\times , il y a $\frac{q-1}{2}$ carrés et autant de non-carrés. Mais $\mathbb{F}_q^{\times 2} \subseteq \mathbb{F}_q^\times$ étant aussi un sous-groupe normal (ces groupes sont commutatifs !), on a aussi

$$\left| \frac{\mathbb{F}_q^\times}{\mathbb{F}_q^{\times 2}} \right| = \frac{|\mathbb{F}_q^\times|}{|\mathbb{F}_q^{\times 2}|} = \frac{q-1}{\frac{q-1}{2}} = 2.$$

Autrement dit, dans ce quotient on identifie deux éléments $x, y \in \mathbb{F}_q^\times$ si et seulement s'il existe un $a \in \mathbb{F}_q^\times$ tel que $x = a^2 y$; et il y a exactement deux telles classes d'équivalence. Sûrement $1 \in \mathbb{F}_q^\times$ est un carré, mais on pourra toujours trouver (au moins) un non-carré $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times$, et les deux classes d'équivalence dans le quotient seront alors

$$[1] = \{x \in \mathbb{F}_q^\times \mid \exists a \in \mathbb{F}_q^\times : x = a^2\} \quad \text{et} \quad [\varepsilon] = \{x \in \mathbb{F}_q^\times \mid \exists a \in \mathbb{F}_q^\times : x = a^2 \varepsilon\}.$$

Tout $x \in \mathbb{F}_q^\times$ est soit dans la classe $[1] \in \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$, soit dans la classe $[\varepsilon] \in \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$, et c'est le résultat annoncé. \square

Maintenant on peut *simplifier* (à isométrie près, bien évidemment) la diagonalisation d'un espace quadratique sur \mathbb{F}_q :

$$(V, b) \cong \langle 0, \dots, 0, d_1, \dots, d_k \rangle$$

3. Soulignons qu'un espace vectoriel V est fini si et seulement si V est un espace de dimension finie sur un corps fini.

$$\begin{aligned} &\cong \langle 0, \dots, 0, (1 \text{ ou } \varepsilon), \dots, (1 \text{ ou } \varepsilon) \rangle \\ &\cong \langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon \rangle \end{aligned}$$

où on a d'abord remplacé chaque d_i par 1 (si d_i est un carré) ou ε (si d_i n'est pas un carré), puis on a permuté pour écrire les 1's avant les ε 's. Notons que, par la Proposition ci-dessus, tout non-carré $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times$ est, à carré près, égal à tout autre non-carré $\delta \in \mathbb{F}_q^\times$; la forme ci-dessus est donc aussi isométrique à $\langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \delta, \dots, \delta \rangle$, le choix du non-carré est ainsi sans importance. Dans cette expression, le nombre de nuls est invariant; mais qu'en est-il pour le nombre de 1's et de ε 's? On s'est déjà posé la question pour les espaces quadratiques réels, et dans la démonstration on a utilisé un argument basé sur "une somme de carrés". Aussi dans le cas fini on doit s'y intéresser :

Proposition 5.3.3 *Tout élément de \mathbb{F}_q est une somme de deux carrés.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{F}_q$, et notons

$$(\mathbb{F}_q)^2 = \{a^2 \mid a \in \mathbb{F}_q\} = \mathbb{F}_q^{\times 2} \cup \{0\} \quad \text{et} \quad x - (\mathbb{F}_q)^2 = \{x - a^2 \mid a \in \mathbb{F}_q\}.$$

Il suit par la Proposition 5.3.2 que $|\mathbb{F}_q| = q$ et $|(\mathbb{F}_q)^2| = |\mathbb{F}_q^{\times 2}| + 1 = \frac{q-1}{2} + 1 = \frac{q+1}{2}$, et par la bijection évidente

$$\begin{array}{ccc} x - (\mathbb{F}_q)^2 & \xrightarrow{\quad} & (\mathbb{F}_q)^2 \\ & \longleftarrow & \\ s & \xrightarrow{\quad} & -(s - x) \\ x - t & \longleftarrow & t \end{array}$$

on a également que $|x - (\mathbb{F}_q)^2| = |(\mathbb{F}_q)^2| = \frac{q+1}{2}$. Par conséquent, l'intersection des sous-ensembles $x - (\mathbb{F}_q)^2$ et $(\mathbb{F}_q)^2$ de \mathbb{F}_q est non-vidée. Soit donc $y \in (x - (\mathbb{F}_q)^2) \cap ((\mathbb{F}_q)^2)$, alors $y = x - a^2$ et $y = b^2$ pour certains $a, b \in \mathbb{F}_q$, d'où le résultat : $x = a^2 + b^2$. \square

Voici une conséquence de cette Proposition :

Proposition 5.3.4 *Pour tout non-carré $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ on a $\langle 1, 1 \rangle \cong \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle$.*

Démonstration. Par la Proposition 5.3.3, le non-carré $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ est une somme de carrés, et donc ε est une valeur représentée par (l'espace quadratique réalisant) la forme quadratique régulière $q(x, y) = x^2 + y^2$ (sur le corps \mathbb{F}_q) : $\varepsilon \in D\langle 1, 1 \rangle$. Par la Proposition 4.1.5 on sait qu'il existe une diagonalisation $\langle \varepsilon, d \rangle \cong \langle 1, 1 \rangle$, pour un certain $d \in \mathbb{F}_q^\times$. Pour ce nombre non-nul on a soit $[d] = [1] \in \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$ (si d est un carré), soit $[d] = [\varepsilon] \in \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$ (si d n'est pas un carré); la forme $\langle \varepsilon, d \rangle$ est donc (à isométrie près) soit $\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle$, soit $\langle \varepsilon, 1 \rangle$. Mais l'isométrie $\langle \varepsilon, 1 \rangle \cong \langle 1, 1 \rangle$ est impossible : ces deux espaces n'ont pas le même discriminant (à carré près!). On a donc $\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = \langle 1, 1 \rangle$, comme annoncé. \square

Ainsi, dans la diagonalisation

$$(V, b) \cong \langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon \rangle$$

on peut remplacer chaque occurrence *paire* de ε 's par des 1's; et donc la diagonalisation se simplifie de la manière suivante :

$$(V, b) \cong \begin{cases} \langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1 \rangle & \text{si il y avait un nombre paire de } \varepsilon\text{'s} \\ \langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \varepsilon \rangle & \text{si il y avait un nombre impaire de } \varepsilon\text{'s} \end{cases}$$

Remarquons finalement que les espaces réguliers $\langle 1, \dots, 1 \rangle$ et $\langle 1, \dots, 1, \varepsilon \rangle$ (de même dimension) ne sont pas isométriques : leurs discriminants respectifs ne sont bien évidemment pas égaux ! Résumons donc ainsi :

Théorème 5.3.5 *Tout espace quadratique sur \mathbb{F}_q s'écrit – à isométrie près – comme*

$$\text{soit } \langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1 \rangle, \quad \text{soit } \langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \varepsilon \rangle$$

(où $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times$ est un non-carré au choix), et est donc entièrement déterminé par sa dimension, son rang et le discriminant de sa partie régulière.

En dimension n il y a ainsi $2n + 1$ classes d'isométrie d'espaces quadratiques sur \mathbb{F}_q , dont il y a seulement 2 classes d'espaces quadratiques réguliers (exercice). Il est remarquable que la caractéristique p du corps $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^m}$ est sans importance pour cette classification !

Exemple 5.3.6 On reprend le corps \mathbb{F}_9 avec les notations de l'Exemple 5.3.1. Les quatre carrés non-nuls dans ce corps sont $\mathbb{F}_9^{\times 2} = \{a_1 = a_1^2 = a_2^2, a_2 = a_3^2 = a_6^2, a_3 = a_5^2 = a_7^2, a_6 = a_4^2 = a_8^2\}$; ainsi on peut prendre $\varepsilon = a_4$ comme non-carré non-nul (ce choix étant totalement arbitraire). Les espaces quadratiques réguliers de dimension 5 sur \mathbb{F}_9 sont $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$ et $\langle 1, 1, 1, 1, a_4 \rangle$ (à isométrie près, évidemment).

Exemple 5.3.7 L'espace quadratique $\langle 1, 2 \rangle$ sur \mathbb{F}_3 est du type $\langle 1, \varepsilon \rangle$, puisque 2 est un non-carré dans \mathbb{F}_3 . Mais également sur \mathbb{F}_5 , l'espace $\langle 1, 2 \rangle$ est du type $\langle 1, \varepsilon \rangle$, car 2 est aussi un non-carré dans \mathbb{F}_5 . Pourtant, ces deux espaces ont des propriétés très différentes : on peut remarquer notamment que pour $\langle 1, 2 \rangle_{\mathbb{F}_3} \cong (\mathbb{F}_3^2, q(x, y) = x^2 + 2y^2)$ on a $q(1, 1) = 0$; alors que dans $\langle 1, 2 \rangle_{\mathbb{F}_5} \cong (\mathbb{F}_5^2, q'(x, y) = x^2 + 2y^2)$ aucun vecteur non-nul est de valeur quadratique 0. Dans le chapitre suivant, nous allons exploiter cette idée pour mieux comprendre – et mieux classifier – les espaces quadratiques (sur un corps quelconque).

5.4. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. Soit un groupe $G = (G, \cdot, 1)$ et un sous-groupe normal $N \trianglelefteq G$. Montrer que $|G| = |G/N| \cdot |N|$.
Solution. Les éléments de G/N sont les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $g_1 \sim g_2 \iff g_1 g_2^{-1} \in N$; on les note souvent gN (et on les appelle les “classes latérales de N dans G ”). Comme pour toute relation d'équivalence, ces classes forment une partition de G . Par la bijection $N \rightarrow gN : n \mapsto gn$ on voit que toute classe latérale gN (donc tout élément de G/N) a la même cardinalité que N . Ainsi il suit que $|G| = |\bigsqcup_{x \in G/N} \mathcal{X}| = |G/N| \cdot |N|$. (Bien sûr, si G est fini, aussi N et G/N sont finis, et ceci est une égalité de nombres naturels.)

3. Pour F un corps quelconque,
 - (a) montrer que $q: F^{n \times n} \rightarrow F: M \rightarrow \text{tr}(M^2)$ est une forme quadratique,
 - (b) calculer la forme bilinéaire symétrique associée, soit $b: F^{n \times n} \times F^{n \times n} \rightarrow F$,
 - (c) montrer que l'espace quadratique $(F^{n \times n}, b)$ est la somme orthogonale du sous-espace des matrices symétriques avec le sous-espace des matrices anti-symétriques,
 - (d) montrer que, sur le sous-espace $W \subseteq F^{3 \times 3}$ des matrices de trace nulle, l'espace quadratique (W, b) est isométrique à $\langle -1, -1, -1, 1, 1, 1, 2, 6 \rangle$,
 - (e) donner la "forme diagonale simplifiée" de (W, b) si $F = \mathbb{C}$, si $F = \mathbb{R}$ et si $F = \mathbb{F}_{13}$.
4. Montrer que $x \in \mathbb{F}_p^\times$ et $p - x \in \mathbb{F}_p^\times$ ont les mêmes carrés. (Ainsi, lorsqu'on souhaite calculer tous les x^2 pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$, il suffit de le faire pour $x \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$.)
5. Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont isométriques :
 - (a) $q(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + 3xy - yz$ et $\langle 1, 2, 3 \rangle$ sur \mathbb{Q} .
 - (b) $\langle 1, 2, 3 \rangle$ et $\langle 8, 13, 5 \rangle$ sur \mathbb{R} ,
 - (c) $\langle 1, 2, 3 \rangle$ et $\langle 8, 13, 5 \rangle$ sur \mathbb{Q} ,
 - (d) $\langle 1, 2, 3 \rangle$ et $\langle -1, 2, 3 \rangle$ sur \mathbb{R} ,
 - (e) $\langle 1, 2, 3 \rangle$ et $\langle -1, -2, 3 \rangle$ sur \mathbb{R} ,
 - (f) $\langle 1, 1 \rangle$ et $\langle 1, -1 \rangle$ sur \mathbb{F}_{11} ,
 - (g) $\langle 1, 1 \rangle$ et $\langle 1, -1 \rangle$ sur \mathbb{F}_{13} .
6. Donner la "forme diagonale simplifiée" pour les espaces quadratiques complexes, réels ou finis rencontrés lors des exercices précédents.

6. Isotropie et plans hyperboliques

6.1. Espaces hyperboliques

Le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n (ou tout autre produit scalaire—cela donnera le “même” espace quadratique, cf. Exemple 5.2.4) se distingue d’une forme bilinéaire symétrique générale par sa *stricte positivité* :

- (a) le produit scalaire d’un vecteur avec lui-même est toujours positif¹,
- (b) le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul.

Pour un F -espace quadratique (V, q) quelconque, l’assertion (a) n’a aucun sens, puisqu’elle dépend de l’existence d’un ordre sur F , ce qui n’est pas le cas en général. C’est bien différent pour l’assertion (b) : il est parfaitement légitime d’étudier les $\underline{x} \in V \setminus \{0\}$ pour lesquels $q(\underline{x}) = 0$. On pose les définitions suivantes :

Définition 6.1.1 Soit (V, q) un espace quadratique. On dit que :

1. un vecteur $\underline{x} \in V \setminus \{0\}$ est *isotrope* si $q(\underline{x}) = 0$ (et sinon \underline{x} est *anisotrope*),
2. l’espace (V, q) est *isotrope* s’il contient un vecteur isotrope (et sinon (V, q) est *anisotrope*),
3. un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est *totallement isotrope* si tout $\underline{x} \in W \setminus \{0\}$ est isotrope.

Clairement, un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est totallement isotrope si et seulement si la restriction de la forme quadratique $q: V \rightarrow F$ à W est la forme nulle. Autrement dit, en tant que sous-espace quadratique, $(W, q|_W)$ est équipé de la forme nulle.

Un vecteur non-nul \underline{x} est isotrope dans (V, b) si et seulement si le sous-espace $F\underline{x} \subseteq V$ est totallement isotrope (exercice). Mais il est *faux* qu’un sous-espace $W \subseteq V$ ayant une base de vecteurs isotropes est nécessairement totallement isotrope !

Exemple 6.1.2 Soit la matrice symétrique

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

alors on peut réaliser, par le choix d’une base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 , un espace quadratique (\mathbb{R}^3, b) ayant B pour matrice associée. Chaque vecteur de cette base est alors isotrope, mais l’espace (\mathbb{R}^3, b) n’est pas totallement isotrope (car la forme n’est pas nulle).

1. On utilise ce terme pour “plus grand ou égal à zéro”.

La restriction de la forme quadratique $q: V \rightarrow F$ au radical de l'espace (V, q) est toujours la forme nulle ; si le radical est non-nul, il contient donc des vecteurs isotropes. Ainsi, un espace non-régulier est toujours isotrope, et un espace anisotrope est toujours régulier. *Le sujet intéressant est donc celui des espaces réguliers isotropes !* Par ailleurs, tout espace quadratique (V, q) peut être décomposé en une partie nulle et une partie régulière :

$$(V, q) \cong (\text{rad}(V, q), q) \oplus (W, q).$$

Le radical est totalement isotrope ; et le but est maintenant d'étudier l'isotropie de la partie régulière (W, q) . Pour cela, certains espaces de dimension 2 vont jouer un rôle crucial.

Théorème 6.1.3 *Pour un espace quadratique (V, b) de dimension 2, on a l'équivalence des assertions suivantes :*

1. (V, b) est régulier et isotrope,
2. (V, b) est (régulier et) de discriminant $[-1] \in F^\times / F^{\times 2}$,
3. $(V, b) \cong \langle d, -d \rangle$ pour tout $d \in F^\times$,
4. $(V, b) \cong \langle 1, -1 \rangle$,
5. $(V, b) \cong (F^2, q(x, y) = xy)$.

Démonstration. (1 \Rightarrow 2) Soit une diagonalisation $(V, b) \cong \langle d_1, d_2 \rangle$ par une base orthogonale $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ de V , alors $d_1, d_2 \in F^\times$ par régularité de (V, b) . Soit un vecteur isotrope \underline{x} dans V ; on peut l'écrire comme $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$ et calculer alors que

$$0 = q(\underline{x}) = b(x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2, x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) = \sum_{i,j} x_i x_j b(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2.$$

Puisque (comme tout vecteur isotrope) $\underline{x} \neq \underline{0}$ on a $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$; supposons que $x_1 \neq 0$ (sinon on échange les vecteurs de la base). Il suit alors que

$$d_1 = -\frac{x_2^2}{x_1^2} d_2$$

et donc $(V, b) \cong \langle d_1, d_2 \rangle \cong \langle -d_2, d_2 \rangle$ dont le discriminant est $[-d_2 d_2] = [-d_2^2] = [-1] \in F^\times / F^{\times 2}$.

(2 \Rightarrow 3) Soit une diagonalisation $(V, b) \cong \langle d_1, d_2 \rangle$, alors $d_1, d_2 \in F^\times$ par régularité de (V, b) . On peut raisonner comme suit :

$$\begin{aligned} \text{dis}(V, b) = [-1] &\iff [d_1 d_2] = [-1] \\ &\iff d_1 d_2 = -a^2 \text{ (pour } a \in F^\times) \\ &\iff d_2 = -\frac{a^2}{d_1^2} d_1 \\ &\implies [d_2] = [-d_1] \end{aligned}$$

et donc $\langle d_1, d_2 \rangle = \langle d_1, -d_1 \rangle$. On veut encore montrer que l'on peut prendre $d_1 = d$ pour n'importe quel $d \in F^\times$; pour cela il suffit de montrer que tout $d \in F^\times$ est une valeur représentée par $(V, b) \cong \langle d_1, -d_1 \rangle$: car si $d \in D(V, b)$ alors il vient par le Critère de Représentation que $(V, b) \cong$

$\langle d, d' \rangle$ (pour un certain $d' \in F^\times$) et l'argument ci-dessus implique alors $(V, b) \cong \langle d, -d \rangle$. Mais remarquons que le polynôme $f(X_1, X_2) = d_1 X_1^2 - d_1 X_2^2$ associé à l'espace $\langle d_1, -d_1 \rangle$ est équivalent, par le changement linéaire inversible de variables

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \end{cases}$$

au polynôme $g(Y_1, Y_2) = d_1 Y_1 Y_2$. Ce polynôme g peut, à son tour, être réalisé par l'espace quadratique $(F^2, q'(y_1, y_2) = d_1 y_1 y_2)$, nécessairement isométrique à $\langle d_1, -d_1 \rangle$. Se souvenant que $d_1 \in F^\times$, on a

$$D\langle d_1, -d_1 \rangle = D(F^2, q') = \{a \in F^\times \mid \exists (y_1, y_2) \in F^2 : d_1 y_1 y_2 = a\} = F^\times$$

et donc tout $d \in F^\times$ est une valeur représentée par $\langle d_1, -d_1 \rangle$.

(3) \Rightarrow (4) Trivial.

(4) \Rightarrow (1) La régularité de $\langle 1, -1 \rangle = (F^2, q(x, y) = x^2 - y^2)$ est évident par considération de la matrice diagonale associée; et clairement le vecteur $(1, 1) \in F^2$ est isotrope.

(4) \Leftrightarrow (5) L'isométrie $\langle 1, -1 \rangle = (F^2, q(x, y) = x^2 - y^2) \cong (F^2, q'(x, y) = xy)$ suit par l'équivalence des polynômes $f(X, Y) = X^2 - Y^2$ et $g(X, Y) = XY$ (comme ci-dessus). \square

Ces propriétés équivalentes remarquables méritent d'être soulignées par :

Définition 6.1.4 *Un espace quadratique (V, b) est un plan hyperbolique² si $(V, b) \cong \langle 1, -1 \rangle$, et plus généralement un espace hyperbolique si (V, b) est une somme orthogonale de plans hyperboliques.*

Exemple 6.1.5 Reprenons les notations de l'Exercice 5.3.1. Le déterminant de la matrice symétrique

$$B = \begin{pmatrix} a_4 & a_5 \\ a_5 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{2 \times 2}.$$

est $a_4 a_3 - a_5 a_5 \equiv (X + 1)X - (X + 2)^2 \equiv 2$ dans \mathbb{F}_9 ; tout espace quadratique (V, b) réalisant cette matrice est donc régulier. Mais alors $\text{dis}(V, b) = [2] = [-1]$ dans $\mathbb{F}_9^\times / \mathbb{F}_9^{\times 2}$, donc cet espace (de dimension 2, évidemment) est un plan hyperbolique.

Exemple 6.1.6 Soit (V, b) un espace hyperbolique de dimension $2k$. On peut alors trouver une base $(\underline{e}_1, \underline{e}'_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{e}'_k)$ telle que $(V, b) \cong k\langle 1, -1 \rangle = \langle 1, -1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 1, -1 \rangle$. Le sous-espace engendré par $(\underline{e}_1 + \underline{e}'_1, \dots, \underline{e}_k + \underline{e}'_k)$ est alors totalement isotrope et de dimension k . (Un exercice du chapitre suivant montrera une réciproque à cette observation.)

Exemple 6.1.7 Par le Théorème 6.1.3 on sait que, si (V, b) est un plan hyperbolique, alors $D(V, b) = D\langle 1, -1 \rangle = F^\times$. Plus généralement, pour tout espace hyperbolique (V, b) on a

$$D(V, b) = D(\langle 1, -1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 1, -1 \rangle) \supseteq D\langle 1, -1 \rangle = F^\times,$$

ce qui dit donc que tout espace hyperbolique est universel (voir Définition 4.1.2). La réciproque n'est pas vraie : l'espace $\langle 1 \rangle$ sur \mathbb{C} est (régulier et) universel mais pas hyperbolique.

2. Terminologie inspirée par le polynôme $f(X, Y) = X^2 - Y^2$ dont les courbes de niveau sont des hyperboles.

6.2. Décomposition de Witt

Le Théorème 6.1.3 dit en particulier que tout plan hyperbolique est isotrope ; a fortiori, tout espace hyperbolique est isotrope (exercice). En fait, le lien entre isotropie et plans hyperboliques est extrêmement fort :

Proposition 6.2.1 *Un espace quadratique régulier (V, b) est isotrope si et seulement s'il existe une décomposition $(V, b) \cong \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V', b')$.*

Démonstration. Supposons d'abord que (V, b) est régulier et $(V, b) \cong \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V', b')$. Ainsi, $V \cong F^2 \dot{\oplus} V'$ et le vecteur $\underline{x} \in V$ qui correspond avec $(1, 1) + \underline{0} \in F^2 \dot{\oplus} V'$ est isotrope. Réciproquement, supposons que (V, b) est régulier et que \underline{x} en est un vecteur isotrope ; on sait donc que $\underline{x} \neq \underline{0}$ et $q(\underline{x}) = b(\underline{x}, \underline{x}) = 0$. L'espace V contient certainement un $\underline{y} \neq \underline{0}$ tel que $b(\underline{x}, \underline{y}) \neq 0$; car sinon la forme b serait nulle partout sur V est donc (V, b) ne serait pas régulier. Les vecteurs \underline{x} et \underline{y} sont linéairement indépendants : si $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} = \underline{0}$ dans V alors on a d'un côté

$$b(\underline{x}, \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = \alpha b(\underline{x}, \underline{x}) + \beta b(\underline{x}, \underline{y}) = \beta b(\underline{x}, \underline{y})$$

mais de l'autre côté aussi

$$b(\underline{x}, \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = b(\underline{x}, \underline{0}) = 0,$$

et puisque $b(\underline{x}, \underline{y}) \neq 0$ on a nécessairement $\beta = 0$; et donc aussi $\alpha\underline{x} = \underline{0}$ ce qui implique $\alpha = 0$. Ainsi, on peut engendrer le sous-espace $W = F\underline{x} \dot{\oplus} F\underline{y}$ de dimension 2 de V . Ce sous-espace $W \subseteq V$ est, en fait, régulier : en effet, pour la matrice symétrique de la restriction de b à W pour la base $(\underline{x}, \underline{y})$ on a

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b(\underline{x}, \underline{y}) \\ b(\underline{y}, \underline{x}) & b(\underline{y}, \underline{y}) \end{pmatrix} = -b(\underline{x}, \underline{y})^2 \neq 0$$

Ainsi $W = F\underline{x} \dot{\oplus} F\underline{y}$ est un espace régulier de dimension 2 contenant un vecteur isotrope— et par le Théorème 6.1.3 on sait que $W \cong \langle 1, -1 \rangle$. Finalement, le sous-espace (W, b) étant régulier, on peut utiliser la Proposition 3.1.3 pour conclure que $V = W \dot{\oplus} W^\perp$, ou encore $(V, b) \cong \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V', b')$ si on pose $(V', b') = (W^\perp, b)$. \square

Exemple 6.2.2 Sur le corps \mathbb{R} , les espaces quadratiques réguliers sont – à isométrie près – donnés par $\langle 1, \dots, 1, -1, \dots, -1 \rangle$; les seuls espaces réguliers isotropes sont donc ceux qui ont au moins un $+1$ et un -1 . Autrement dit, les seuls espaces régulières anisotropes sont isométriques à $\langle 1, \dots, 1 \rangle$ ou à $\langle -1, \dots, -1 \rangle$ (les produits scalaires et leurs opposés).

Exemple 6.2.3 Si on pose

$$b((x_1, \dots, x_4), (y_1, \dots, y_4)) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$$

alors (\mathbb{R}^4, b) est un espace quadratique réel dont la matrice par rapport à la base canonique est B . On peut vérifier que $\underline{x} = (1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, 0, 1)$ est un vecteur isotrope, et que $\underline{y} = (1, 1, 1, 1)$ est

un vecteur tel que $b(\underline{x}, \underline{y}) = 7 - 3\sqrt{3} \neq 0$ (et, par ailleurs, $b(\underline{y}, \underline{y}) = 12$). On voit clairement que \underline{x} et \underline{y} sont linéairement indépendants ; ils engendrent donc un plan $W = \{\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ dans \mathbb{R}^4 , et la restriction de b à ce plan W est

$$b(\alpha_1\underline{x} + \beta_1\underline{y}, \alpha_2\underline{x} + \beta_2\underline{y}) = (7 - 3\sqrt{3})(\alpha_1\beta_2 + \beta_2\alpha_1) + 12\beta_1\beta_2.$$

Prenons $(\underline{x}, \underline{y})$ comme base pour W ; la matrice symétrique de la restriction de b à W est alors

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{7-3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{7-3\sqrt{3}}{2} & 12 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est strictement négatif dans \mathbb{R} , donc dans la classe $[-1]$ dans $\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times 2}$. L'espace (W, b) est donc bel et bien un plan hyperbolique, donc isométrique à $\langle 1, -1 \rangle$; et on peut décomposer $(\mathbb{R}^4, b) \cong \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} W^\perp$. (Il faut du courage pour calculer explicitement cet orthocomplément—mais en théorie c'est parfaitement possible !)

Dans la démonstration ci-dessus, nous nous sommes servi d'un vecteur isotrope \underline{x} de (V, b) pour construire une base $(\underline{x}, \underline{y})$ d'un sous-plan hyperbolique de (V, b) ; ainsi ce sous-plan hyperbolique contient évidemment le vecteur \underline{x} . Autrement dit, la décomposition obtenue, soit $(V, b) \cong \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V', b')$, est faite pour que $\langle 1, -1 \rangle$ contienne le vecteur isotrope \underline{x} de départ. Si (V', b') est toujours isotrope, alors on peut y trouver un vecteur isotrope $\underline{x}' \neq \underline{x}$, et s'en servir pour décomposer : $(V', b') \cong \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V'', b'')$; sinon, (V', b') est anisotrope. Par induction sur la dimension de (V, b) on obtient ainsi :

Proposition 6.2.4 *Pour tout espace quadratique régulier (V, b) on a une décomposition*

$$(V, b) \cong \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V', b')$$

en $k \geq 0$ plans hyperboliques et un espace anisotrope (V', b') .

Mais nous savons déjà que tout espace (V, b) admet une décomposition

$$(V, b) \cong (\text{rad}(V, b), b) \dot{\oplus} (V', b')$$

en une partie nulle et une partie régulière ; avec la proposition précédente on peut conclure :

Théorème 6.2.5 (Décomposition de Witt) *Pour tout espace quadratique (V, b) on a une décomposition³*

$$(V, b) \cong \langle 0, \dots, 0 \rangle \dot{\oplus} \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V', b')$$

avec (V', b') anisotrope : c'est la décomposition de Witt de l'espace (V, b) .

Par la Proposition 3.1.9, nous savons que le radical, qui est une partie totalement isotrope de V , est invariant sous isométrie—mais qu'en est-il pour la partie hyperbolique et pour la partie anisotrope ? On consacrerá l'entier chapitre suivant à cette question.

3. Bien entendu, chacune de ces parties peut être nul !

6.3. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. Montrer que $W \subseteq V$ est un sous-espace totalement isotrope d'un espace quadratique (V, b) si et seulement si $W \subseteq W^\perp$. Montrer que $\text{rad}(V, b)$ est un sous-espace totalement isotrope. Donner un exemple d'un sous-espace totalement isotrope non-trivial d'un espace régulier.
3. *Paire hyperbolique.* Pour un espace régulier (V, b) , montrer l'équivalence de :

- (a) (V, b) est isotrope,
- (b) il existe des vecteurs isotropes (nécessairement indépendants) $\underline{x}, \underline{y} \in V$ tel que $b(\underline{x}, \underline{y}) = 1$; c'est une *paire hyperbolique* dans V ,

Montrer que, dans ce cas, le sous-espace $F\underline{x} \oplus F\underline{y}$ est un plan hyperbolique. Quelle est la matrice symétrique de la restriction de b à ce sous-espace pour la base $(\underline{x}, \underline{y})$? Quelle est le polynôme homogène de degré 2 (toujours pour cette base) ?

Indication : Une implication est triviale. Pour l'autre, soit \underline{x} un vecteur isotrope ; par régularité de (V, b) il existe un $\underline{y}_0 \neq \underline{0}$ tel que $b(\underline{x}, \underline{y}_0) \neq 0$, et il suit que \underline{x} et \underline{y}_0 sont indépendants. Soit alors $\underline{y} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}_0$; on déterminera α et β par les conditions que $b(\underline{x}, \underline{y}) = 1$ et $b(\underline{y}, \underline{y}) = 0$.

4. Soit (V, b) un espace quadratique régulier isotrope de dimension 2 (et donc un plan hyperbolique). Montrer que les seuls vecteurs isotropes de (V, b) sont les multiples non-nuls de \underline{x} et de \underline{y} , une paire hyperbolique.

5. *Base de vecteurs isotropes.* Pour un espace régulier (V, b) , montrer l'équivalence de :

- (a) (V, b) est isotrope,
- (b) il existe une base de vecteurs isotropes.

Indication : si (V, b) est régulier et isotrope, alors $(V, b) = \langle 1, -1 \rangle \perp (V', b')$. Soit $\underline{x}, \underline{y}$ une paire hyperbolique pour $\langle 1, -1 \rangle$ (cf. un exercice précédent), et $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ une base (quelconque) de (V', b') . Par l'universalité de $\langle 1, -1 \rangle$ on peut “adjuster” les vecteurs \underline{e}_i pour en faire des vecteurs isotropes \underline{e}'_i tout en s'assurant que la suite $\underline{x}, \underline{y}, \underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ soit toujours libre.

6. Utiliser la décomposition de Witt pour montrer que tout espace régulier isotrope est universel. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

7. Soit $r, s \in F^\times$ et $q: V \rightarrow F$ une forme quadratique régulière. Montrer que :

- (a) $r \in D(V, q)$ si et seulement si $(V, q) \perp \langle -r \rangle$ est isotrope.
- (b) $r \in D((V, q) \perp \langle -s \rangle)$ si et seulement si $s \in D((V, q) \perp \langle -r \rangle)$.

Indication pour (a) : Une implication est facile. Pour l'autre, supposons que $(V, q) \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ avec $d_i \in F^\times$; on peut alors supposer qu'il existe $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in F^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $d_1x_1^2 + \dots + d_nx_n^2 - rx_{n+1}^2 = 0$. Si $x_{n+1} \neq 0$ alors $r = d_1(\frac{x_1}{x_{n+1}})^2 + \dots + d_n(\frac{x_n}{x_{n+1}})^2 \in D(\langle d_1, \dots, d_n \rangle) = D(V, q)$; si $x_{n+1} = 0$ alors (x_1, \dots, x_n) est un vecteur isotrope de $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$, donc cet espace est universel, d'où $r \in D(\langle d_1, \dots, d_n \rangle) = D(V, q)$.

8. Sur le corps \mathbb{F}_5 , soit V l'espace des matrices 2×2 muni de la forme bilinéaire symétrique $b(M, N) = \text{tr}(MN)$.

- (a) Pour $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, construire une paire hyperbolique X, Y dans (V, b) .
- (b) Calculer l'orthocomplément dans (V, b) du sous-espace engendré par X et Y .
- (c) Calculer la forme diagonale simplifiée de (V, b) .
- (d) En déduire la décomposition de Witt de (V, b) .
9. Soit la forme quadratique $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 3x_3^2 + x_3x_4 + 2x_4^2$ sur $V = \mathbb{F}_5^4$.
- (a) Donner la matrice symétrique B de la forme q pour la base canonique de V .
- (b) Appliquer le Théorème de Diagonalisation pour diagonaliser (V, q) .
- (c) Donner la base orthogonale de (V, q) pour la diagonalisation effectuée.
- (d) En déduire la "forme diagonale simplifiée" de (V, q) .
- (e) En déduire la décomposition de Witt de (V, q) .
10. Soit V un espace vectoriel sur un corps F , et $f, g \in V^*$ deux formes linéaires.
- (a) Montrer que $q(\underline{x}) = f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})$ est une forme quadratique sur V .
- (b) Montrer que les éléments non-nuls de $\ker(f) \cup \ker(g)$ sont exactement les vecteurs isotropes de (V, q) .
- (c) Donner la décomposition de Witt de (V, q) lorsque f et/ou g est nul.
- Supposons maintenant que f et g sont non-nuls et linéairement indépendants; on suppose donc aussi que $\dim(V^*) = \dim(V) \geq 2$. Soit alors une base (f, g, h_3, \dots, h_n) de V^* , duale d'une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ de V .
- (d) Donner la matrice symétrique de (V, q) par rapport à la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$.
- (e) En déduire la décomposition de Witt de (V, q) .
- (f) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la régularité de (V, q) .
- Supposons ensuite que $g = \lambda f$ pour f et g non-nuls (et donc aussi $\lambda \neq 0$). Soit alors une base (f, h_2, \dots, h_n) de V^* , duale d'une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ de V .
- (g) Donner la matrice symétrique de (V, q) par rapport à la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$.
- (h) En déduire la décomposition de Witt de (V, q) .
- (i) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la régularité de (V, q) .
11. On travaille sur un corps fini \mathbb{F}_q quelconque. Soit (V, b) un espace quadratique régulier sur \mathbb{F}_q , et ε un non-carré dans \mathbb{F}_q . Montrer que :
- (a) $\{1, \varepsilon\} \subseteq D(V, b)$ si et seulement si $D(V, b) = \mathbb{F}_q^\times$,
- (b) si $\dim(V) \leq 1$ alors (V, b) n'est pas universel,
- (c) si $\dim(V) \leq 1$ alors (V, b) est anisotrope,
- (d) si $\dim(V) \geq 2$ alors (V, b) est universel,
- (e) si $\dim(V) \geq 3$ alors (V, b) est isotrope.

Pour illustrer le cas $\dim(V) = 2$, donner un exemple (et justifier-le) de :

- (f) un plan quadratique régulier isotrope sur \mathbb{F}_3 ,
- (g) un plan quadratique anisotrope sur \mathbb{F}_3 .

12. Soit V l'espace vectoriel réel des polynômes $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 2 . On définit la forme bilinéaire (non-symétrique!)

$$b(f, g) = \int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

sur cet espace.

- (a) Donner la forme quadratique q déterminée par b .
- (b) Donner la matrice symétrique B de la forme q pour la base $(X^2, X, 1)$ de V .
- (c) Décomposer l'espace en partie radicale et partie régulière.
- (d) Calculer le discriminant de la partie régulière.
- (e) En déduire la "forme diagonale simplifiée" de (V, q) .
- (f) Donner la décomposition de Witt de (V, q) .

13. Montrer que toute matrice symétrique de déterminant non-nul ayant au moins un 0 sur sa diagonale est congruente à une matrice symétrique ayant toute sa diagonale nulle.

Indication : Tout espace quadratique régulier isotrope admet une base de vecteurs isotropes (voir un exercice précédent).

7. Simplification et décomposition de Witt

7.1. Les théorèmes de Witt

Pour répondre à la question posée en fin du chapitre précédent, nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 7.1.1 (Simplification de Witt) *Pour des espaces quadratiques (V, b) , (V_1, b_1) et (V_2, b_2) quelconques, si $(V, b) \perp (V_1, b_1) \cong (V, b) \perp (V_2, b_2)$ alors $(V_1, b_1) \cong (V_2, b_2)$.*

Dans la Proposition 3.2.6 nous avons vu que la somme orthogonale d'espaces quadratiques est une opération associative, commutative et admet un neutre "à isométrie près"; le Théorème ci-dessus (démontré par E. Witt¹ en 1937) affirme que la somme orthogonale est aussi simplifiable. On note tout de suite la conséquence suivante (également démontré par Witt en 1937) :

Théorème 7.1.2 (Décomposition de Witt) *Tout espace quadratique (V, b) se décompose en une partie totalement isotrope, une partie hyperbolique, et une partie anisotrope,*

$$(V, b) \cong (V_t, b_t) \perp (V_h, b_h) \perp (V_a, b_a),$$

et les termes de cette somme orthogonale sont uniques à isométrie près.

Démonstration. Par la Proposition 3.1.9 on sait que $V = \text{rad}(V, b) \perp W$ avec (W, b) un sous-espace régulier. On pose $(V_t, b_t) \cong (\text{rad}(V, b), b)$; c'est une partie totalement isotrope de (V, b) , et elle est unique à isométrie près. Reste la partie régulière (W, b) , que l'on peut toujours écrire comme

$$(W, b) \cong k\langle 1, -1 \rangle \perp (W_1, b_1)$$

avec la notation $k\langle 1, -1 \rangle$ pour la somme de k copies du plan hyperbolique, et (W_1, b_1) un espace anisotrope (Proposition 6.2.4). Supposons qu'aussi

$$(W, b) \cong l\langle 1, -1 \rangle \perp (W_2, b_2)$$

est une telle décomposition. Par le Théorème 7.1.1 on peut simplifier, un par un, les plans hyperboliques dans l'isométrie

$$k\langle 1, -1 \rangle \perp (W_1, b_1) \cong l\langle 1, -1 \rangle \perp (W_2, b_2).$$

1. Ernst Witt, 1911–1991, étudiant de Emmy Noether à Göttingen.

Si $k > l$ alors on trouve après l simplifications que

$$(k - l)\langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (W_1, b_1) \cong (W_2, b_2),$$

mais il est impossible qu'un espace isotrope soit isométrique à un espace anisotrope ! Si $k < l$ on a un argument similaire ; et donc nécessairement $k = l$. Ainsi on a effectivement un espace hyperbolique $(V_h, b_h) \cong k\langle 1, -1 \rangle$ et un espace anisotrope $(V_a, b_a) \cong (W_1, b_1)$, uniques à isométrie près. \square

Remarque 7.1.3 Le Théorème de la Décomposition de Witt implique la Loi d'inertie de Sylvester (Théorème 5.2.1) et donc aussi la classification des espaces quadratiques sur \mathbb{R} du Théorème 5.2.3 (exercice).

Dans la décomposition de Witt d'un espace quadratique, soit

$$(V, b) \cong (V_t, b_t) \dot{\oplus} (V_h, b_h) \dot{\oplus} (V_a, b_a) \cong \text{rad}((V, b), b) \dot{\oplus} k\langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V_a, b_a),$$

le nombre k de plans hyperboliques est unique ; cela mérite d'être souligné par :

Définition 7.1.4 Pour un espace quadratique (V, b) , son indice de Witt est le nombre de plans hyperboliques figurant dans sa décomposition de Witt ; autrement dit, l'indice vaut $\frac{1}{2} \dim(V_h, b_h)$.

On peut montrer que, pour un espace régulier (V, b) , cet indice est encore égal à la dimension de tout sous-espace totalement isotrope maximal de V ; on le détaillera en exercice.

Exemple 7.1.5 Puisque $[1] = [-1] \in \mathbb{C}^\times / \mathbb{C}^{\times 2}$, la décomposition de Witt de l'espace quadratique complexe $\langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1 \rangle = \langle 0 \rangle \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \langle 0 \rangle \dot{\oplus} \langle 1 \rangle \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \langle 1 \rangle = r\langle 0 \rangle \dot{\oplus} s\langle 1 \rangle$ est

$$r\langle 0 \rangle + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \langle 1, -1 \rangle + \left(\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \right) \langle 1 \rangle,$$

son indice de Witt est donc $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$. Par un même raisonnement on trouve que l'indice de Witt d'un espace quadratique réel de signature (r, s) est $\min\{r, s\}$. On laisse le cas d'un espace quadratique fini comme exercice.

Reste à faire : la démonstration du Théorème de Simplification de Witt !

7.2. La démonstration de la simplification

Par diagonalisation de (V, b) on peut supposer que cet espace est la somme orthogonale d'espaces de dimension 1 ; ainsi pour démontrer le Théorème 7.1.1 il suffit de montrer que

$$\text{pour tout } d \in F : \text{ si } \langle d \rangle \dot{\oplus} (V_1, b_1) \cong \langle d \rangle \dot{\oplus} (V_2, b_2) \text{ alors } (V_1, b_1) \cong (V_2, b_2). \quad (7.1)$$

Supposons d'abord que $d = 0$. Si on décompose en "partie nulle" et "partie régulière",

$$\begin{cases} (V_1, b_1) \cong (\text{rad}(V_1, b_1), b_1) \dot{\oplus} (W_1, b_1) \cong r\langle 0 \rangle \dot{\oplus} (W_1, b_1) \\ (V_2, b_2) \cong (\text{rad}(V_2, b_2), b_2) \dot{\oplus} (W_2, b_2) \cong s\langle 0 \rangle \dot{\oplus} (W_2, b_2) \end{cases}$$

alors

$$\langle d \rangle \dot{\oplus} (V_1, b_1) \cong \langle d \rangle \dot{\oplus} (V_2, b_2) \iff (r+1)\langle 0 \rangle \dot{\oplus} (W_1, b_1) \cong (s+1)\langle 0 \rangle \dot{\oplus} (W_2, b_2)$$

et donc, par la Proposition 3.1.9 exprimant l'unicité du radical, on obtient $r+1 = s+1$ (et donc $r = s$) et $(W_1, b_1) \cong (W_2, b_2)$. Ainsi $(V_1, b_1) \cong (V_2, b_2)$, comme voulu.

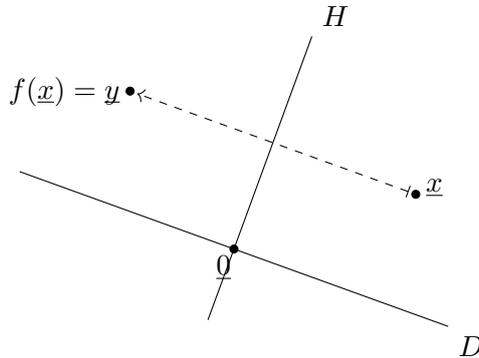
Supposons maintenant que $d \neq 0$. Dans l'espace $\langle d \rangle \dot{\oplus} (V_1, b_1)$ on peut choisir une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ telle que (\underline{e}_1) est une base de $\langle d \rangle$ et $(\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ est une base de V_1 ; de même, dans l'espace $\langle d \rangle \dot{\oplus} (V_2, b_2)$ on peut choisir une base $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ telle que (\underline{e}'_1) est une base de $\langle d \rangle$ et $(\underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n)$ est une base de V_2 . (Les deux bases ont le même nombre d'éléments, car les deux espaces isométriques sont nécessairement de même dimension.) Soit maintenant une isométrie $f: \langle d \rangle \dot{\oplus} (V_1, b_1) \rightarrow \langle d \rangle \dot{\oplus} (V_2, b_2)$. On distingue deux cas : Si $f(\underline{e}_1) = \underline{e}'_1$ alors par l'Exemple 2.2.5 il suit que

$$f(V_1) = f((F\underline{e}_1)^\perp) = ((Ff(\underline{e}_1))^\perp) = (F\underline{e}'_1)^\perp = V_2.$$

C'est à dire, la restriction de l'isométrie f à V_1 se corestreint à V_2 , et définit ainsi une isométrie $f|_{V_1}: (V_1, b_1) \rightarrow (V_2, b_2)$, comme voulu. Si, par contre, $f(\underline{e}_1) \neq \underline{e}'_1$, alors il suffit de trouver une isométrie $g: \langle d \rangle \dot{\oplus} (V_2, b_2) \rightarrow \langle d \rangle \dot{\oplus} (V_2, b_2)$ telle que $g(f(\underline{e}_1)) = \underline{e}'_1$, parce qu'alors la composée $g \circ f$ est une isométrie envoyant \underline{e}_1 sur \underline{e}'_1 , et on peut conclure par l'argument précédent. Autrement dit, pour les deux vecteurs $f(\underline{e}_1)$ et \underline{e}'_1 dans un même espace quadratique et de même valeur quadratique (à savoir d), on veut une isométrie g envoyant l'un sur l'autre. *Mais une telle isométrie g , existe-t-elle ?* La Proposition suivante répond par l'affirmative et conclut donc la démonstration.

Proposition 7.2.1 *Soit un espace quadratique (V, b) et $\underline{x}, \underline{y} \in V$ tels que $b(\underline{x}, \underline{x}) = b(\underline{y}, \underline{y}) \neq 0$. Il existe une isométrie $f: (V, b) \rightarrow (V, b)$ telle que $f(\underline{x}) = \underline{y}$.*

Démonstration. Nous cherchons un élément f du groupe orthogonal $O(V, b)$ envoyant \underline{x} sur \underline{y} ; l'idée géométrique est d'utiliser une réflexion : on veut déterminer une décomposition $V = H \dot{\oplus} D$ en un hyperplan H et une droite D , telle que $f: V \rightarrow V: \underline{v}_H + \underline{v}_D \mapsto \underline{v}_H - \underline{v}_D$ soit une isométrie envoyant \underline{x} sur \underline{y} .



En toute généralité, si $\underline{w} \in V$ est anisotrope, alors $D = F\underline{w}$ est une droite régulière dans V , et par Proposition 3.1.3, l'hyperplan $H = D^\perp$ permet la décomposition $V = H \dot{\oplus} D$. L'application linéaire

$$f_{\underline{w}}: V \rightarrow V: \underline{v} = \underline{v}_H + \underline{v}_D \mapsto \underline{v}_H - \underline{v}_D$$

est alors une isométrie ; en effet, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels (évident) et

$$q(f_{\underline{w}}(v)) = q(\underline{v}_H - \underline{v}_D) = q(\underline{v}_H + \underline{v}_D) = q(\underline{v})$$

car $b(\underline{v}_H, \underline{v}_D) = 0$. Par ailleurs, si on note $\underline{v}_D = \alpha \underline{w}$ alors on a

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = b(\underline{v}_H + \underline{v}_D, \underline{w}) = b(\underline{v}_H, \underline{w}) + b(\alpha \underline{w}, \underline{w}) = \alpha \cdot b(\underline{w}, \underline{w})$$

et on trouve explicitement que

$$f_{\underline{w}}(\underline{v}) = \underline{v}_H - \underline{v}_D = \underline{v} - 2\underline{v}_D = \underline{v} - 2\alpha \underline{w} = \underline{v} - 2 \frac{b(\underline{v}, \underline{w})}{b(\underline{w}, \underline{w})} \underline{w}.$$

Maintenant, pour $b(\underline{x}, \underline{x}) = b(\underline{y}, \underline{y}) \neq 0$ dans V on vérifie d'abord que

$$b(\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) + b(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y}) = 2b(\underline{x}, \underline{x}) + 2b(\underline{y}, \underline{y}) = 4b(\underline{x}, \underline{x}) \neq 0$$

et donc au moins un des deux vecteurs $\underline{x} + \underline{y}$ et $\underline{x} - \underline{y}$ est anisotrope. Si $\underline{x} - \underline{y}$ est anisotrope, alors on applique ce qui précède pour $\underline{w} = \underline{x} - \underline{y}$ et on trouve par

$$2b(\underline{x}, \underline{x} - \underline{y}) = 2(q(\underline{x}) - b(\underline{x}, \underline{y})) = q(\underline{x}) - 2b(\underline{x}, \underline{y}) + q(\underline{y}) = q(\underline{x} - \underline{y})$$

qu'en effet

$$f_{\underline{x}-\underline{y}}(\underline{x}) = \underline{x} - 2 \frac{b(\underline{x}, \underline{x} - \underline{y})}{q(\underline{x} - \underline{y})} (\underline{x} - \underline{y}) = \underline{x} - \frac{q(\underline{x} - \underline{y})}{q(\underline{x} - \underline{y})} (\underline{x} - \underline{y}) = \underline{y}$$

et donc $f_{\underline{x}-\underline{y}}$ est l'isométrie recherchée. Si $\underline{x} - \underline{y}$ est isotrope, alors $\underline{x} + \underline{y}$ est anisotrope, et on peut calculer que $f_{\underline{x}+\underline{y}}(\underline{x}) = -\underline{y}$. Ainsi l'isométrie $-f_{\underline{x}+\underline{y}}$ fera l'affaire. \square

Un vecteur \underline{x} étant anisotrope dans (V, b) si et seulement si la droite $F\underline{x} \subseteq V$ est un sous-espace régulier, la Proposition précédente est la version “en dimension 1” du résultat suivant, disant que “toute isométrie entre sous-espaces réguliers s'étend à une isométrie de l'espace entier” :

Corollaire 7.2.2 *Soit un espace quadratique (V, b) et $f: (W_1, b) \rightarrow (W_2, b)$ une isométrie entre deux sous-espaces réguliers de V . Il existe une isométrie $\bar{f}: (V, b) \rightarrow (V, b)$ dont la restriction à W_1 est f .*

Démonstration. Par régularité de W_1 on sait que $V = W_1 \dot{\oplus} W_1^\perp$, et l'isométrie $(W_1, b) \cong (W_2, b)$ implique que $V \cong W_2 \dot{\oplus} W_1^\perp$. Par régularité de W_2 on a aussi $V = W_2 \dot{\oplus} W_2^\perp$, et le Théorème 7.1.1 permet de dire qu'il existe une isométrie $g: (W_1^\perp, b) \rightarrow (W_2^\perp, b)$. L'assemblage des isométries f et g (comme on a fait dans la Proposition 3.2.6) est une isométrie $\bar{f}: (V, b) \rightarrow (V, b)$, dont la restriction à W_1 est bien évidemment f . \square

Dans les exercices nous montrerons le résultat précédent pour des sous-espaces *quelconques* d'un espace régulier—ce résultat est connu comme le *Théorème de Witt*.

7.3. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. Donner un élément de $O(\mathbb{R}^4, q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2)$ envoyant $(-1, 0, 0, 2)$ sur $(1, 2, 1, 3)$.
3. *Classification des plans quadratiques selon leurs droites isotropes.* Montrer que, si (V, b) est un plan quadratique, alors il y a soit aucune droite isotrope, soit une droite isotrope, soit deux droites isotropes, soit toutes les droites sont isotropes. Indication : décomposer (V, b) .
4. Montrer que, si \underline{x} et \underline{y} sont deux vecteurs isotropes dans un espace régulier (V, b) , alors il existe une isométrie $f \in O(V, b)$ telle que $f(\underline{x}) = \underline{y}$. Pourquoi n'est-ce pas le cas dans un espace non-régulier ? Indication : construire une paire hyperbolique $\underline{x}, \underline{x}'$ ainsi qu'une paire hyperbolique $\underline{y}, \underline{y}'$, puis étendre l'isométrie $F\underline{x} \oplus F\underline{x}' \cong F\underline{y} \oplus F\underline{y}'$ à tout (V, b) .
5. Soit (V, b) un espace hyperbolique de dimension $2k$. Montrer qu'il existe un sous-espace totalement isotrope de dimension k . Indication : écrire (V, b) comme somme orthogonale de k plans hyperboliques, puis choisir un vecteur isotrope dans chacun des plans hyperboliques et engendrer un sous-espace.
6. *Tout sous-espace totalement isotrope est “la moitié” d'un sous-espace hyperbolique.* Montrer que, si $W = F\underline{w}_1 \oplus \dots \oplus F\underline{w}_k$ est un sous-espace totalement isotrope d'un espace régulier (V, b) , alors il existe un deuxième sous-espace totalement isotrope $W' = F\underline{w}'_1 \oplus \dots \oplus F\underline{w}'_k$ tel que les sous-espaces $F\underline{w}_i \oplus F\underline{w}'_i$ sont des plans hyperboliques orthogonaux deux-à-deux (et W est ainsi un sous-espace d'un espace hyperbolique de deux fois la dimension de W). Indication : pour $W_1 = F\underline{w}_2 \oplus \dots \oplus F\underline{w}_k$, montrer que l'on peut prendre \underline{w}'_1 dans $W_1^\perp \setminus F\underline{w}_1^\perp$; on obtient ainsi un plan hyperbolique $F\underline{w}_1 \oplus F\underline{w}'_1$ qui est orthogonal à W_1 , puis considérer $F\underline{w}_1 \oplus F\underline{w}'_1 \overset{\perp}{\oplus} W_1$ et faire une récurrence sur la dimension de W_1 .
7. *Indice de Witt.* Montrer que, si W est un *sous-espace totalement isotrope maximal* d'un espace régulier (V, b) (c'est à dire, W n'est pas strictement inclu dans un sous-espace totalement isotrope), alors sa dimension est égale à l'indice de Witt de (V, b) (que nous avons défini comme le nombre de plans hyperboliques dans la décomposition de Witt).
8. Donner l'indice de Witt des espaces quadratiques finis rencontrés auparavant.
Solution. Un espace quadratique sur \mathbb{F}_q s'écrit comme soit $\langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1 \rangle$, soit $\langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \varepsilon \rangle$, avec ε un non-carré au choix dans \mathbb{F}_q . On fait une analyse de la situation selon la quadraticité de -1 . Si -1 est un carré dans \mathbb{F}_q alors on utilise $\langle 1, 1 \rangle \cong \langle 1, -1 \rangle$ pour trouver le nombre de sous-plans hyperboliques de l'espace donné. Si -1 n'est pas un carré dans \mathbb{F}_q alors on combine $\langle 1, 1 \rangle = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle$ avec $\langle \varepsilon \rangle = \langle -1 \rangle$ pour voir que $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle \cong \langle 1, -1, 1, -1 \rangle$, et cela aide à trouver le nombre de sous-plans hyperboliques de l'espace donné. (Voir aussi la Proposition 10.3.1.)
9. *Généralisation d'un exercice précédent.* Soit (V, b) un espace régulier et W un sous-espace quelconque avec décomposition $(W, b) = \text{rad}(W, b) \overset{\perp}{\oplus} (W', b)$. Soit $\text{rad}(W, b) = F\underline{w}_1 \oplus \dots \oplus F\underline{w}_k$, alors il existe un sous-espace $F\underline{w}'_1 \oplus \dots \oplus F\underline{w}'_k$ tel que les sous-espaces $F\underline{w}_i \oplus F\underline{w}'_i$ sont des plans hyperboliques orthogonaux deux-à-deux et aussi orthogonaux à W' .
Solution. Si $k = 1$, on a $W \cong F\underline{w} \overset{\perp}{\oplus} W'$ avec \underline{w} isotrope et W' régulier. On a toujours que $W^\perp \subseteq (W')^\perp$, et cette inclusion est stricte car sinon on aurait (par régularité de (V, b) , cf. un

exercice précédent) que $W' = (W')^{\perp\perp} = W^{\perp\perp} = W$, ce qui est absurde. Il existe donc un $\underline{w}' \in (W')^\perp \setminus W^\perp$, c'est à dire que \underline{w}' est orthogonal à W' mais pas à \underline{w} , et donc $F\underline{w} \oplus F\underline{w}'$ est un plan hyperbolique orthogonal à W' . Pour $k \geq 2$, on a $W \cong (F\underline{w}_1 \oplus \dots \oplus F\underline{w}_k) \dot{\oplus} W'$ et on peut poser $U = (F\underline{w}_2 \oplus \dots \oplus F\underline{w}_k)$. On raisonne comme avant pour trouver $\underline{w}'_1 \in (U \dot{\oplus} W')^\perp \setminus W^\perp$, et on montre que $F\underline{w}_1 \oplus F\underline{w}'_1$ est un plan hyperbolique orthogonal à $U \perp W'$. Ainsi on construit $(F\underline{w}_1 \oplus F\underline{w}'_1) \dot{\oplus} U \dot{\oplus} W'$, et on peut faire une récurrence sur U (puisque $(F\underline{w}_1 \oplus F\underline{w}'_1) \dot{\oplus} W'$ est régulier).

10. *Encore un Théorème de E. Witt.* Montrer que, pour tout espace régulier (V, b) et toute isométrie $f: (W_1, b) \rightarrow (W_2, b)$ de sous-espaces (quelconques), il existe une isométrie $\bar{f} \in O(V, b)$ dont la restriction à W_1 est f .

Solution. Ayant démontré ce résultat pour des sous-espaces réguliers, on va s'y ramener comme suit. On peut décomposer $W_i = \text{rad}(W_i) \dot{\oplus} W'_i$, et l'isométrie $f: W_1 \rightarrow W_2$ se décompose en une isométrie $\text{rad}(W_1) \rightarrow \text{rad}(W_2)$ et une isométrie $W'_1 \rightarrow W'_2$. Si $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ est une base de $\text{rad}(W_1)$, par isométrie on aura une base $f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_k)$ de $\text{rad}(W_2)$; avec ces bases, on inclut les $\text{rad}(W_i)$ dans des espaces hyperboliques H_i (comme dans un exercice précédent), et on étend de manière évidente l'isométrie des radicaux à leurs extensions hyperboliques. Maintenant l'isométrie $H_1 \dot{\oplus} W'_1 \rightarrow H_2 \dot{\oplus} W'_2$ (entre sous-espaces réguliers!) s'étend à tout (V, b) .

8. Etude du groupe orthogonal

8.1. Réflexions

De manière générale, nous avons défini le *groupe orthogonal* d'un espace quadratique (V, b) par

$$\mathcal{O}(V, b) = \{f: (V, b) \rightarrow (V, b) \mid f \text{ est une isométrie}\}.$$

Rappelons une notion importante déjà utilisée dans la démonstration de la Proposition 7.2.1 :

Définition 8.1.1 Soit \underline{w} un vecteur anisotrope dans un espace quelconque (V, b) , alors

$$f_{\underline{w}}: (V, b) \rightarrow (V, b): \underline{v} \mapsto \underline{v} - 2 \frac{b(\underline{v}, \underline{w})}{b(\underline{w}, \underline{w})} \underline{w}$$

est une isométrie : c'est la réflexion (orthogonale) par rapport à l'hyperplan $H = (F\underline{w})^\perp$, laissant fixe les éléments de H et envoyant les éléments de $F\underline{w}$ sur leurs opposés.

Rappelons également que, si $q(\underline{x}) = q(\underline{y}) \neq 0$ dans un espace quelconque (V, b) , alors on a toujours (au moins) un parmi $\underline{x} + \underline{y}$ et $\underline{x} - \underline{y}$ qui est anisotrope ; et

- si $q(\underline{x} - \underline{y}) \neq 0$ alors $f_{\underline{x}-\underline{y}}(\underline{x}) = \underline{y}$,
- si $q(\underline{x} + \underline{y}) \neq 0$ alors $-f_{\underline{x}+\underline{y}}(\underline{x}) = \underline{y}$.

Par ailleurs, on vérifie facilement que

$$f_{\underline{w}}(\underline{w}) = -\underline{w}$$

et donc, en particulier,

$$-f_{\underline{x}+\underline{y}}(\underline{x}) = f_{\underline{x}+\underline{y}}(-\underline{x}) = f_{\underline{x}+\underline{y}}(f_{\underline{x}}(\underline{x})) = (f_{\underline{x}+\underline{y}} \circ f_{\underline{x}})(\underline{x}).$$

Ainsi, à moindres frais, nous pouvons quelque peu peaufiner la Proposition 7.2.1 :

Proposition 8.1.2 Soit un espace quadratique (V, b) et deux vecteurs anisotropes $\underline{x}, \underline{y} \in V$ tels que $q(\underline{x}) = q(\underline{y})$. Il existe une composée de au plus deux réflexions $f: (V, b) \rightarrow (V, b)$ telle que $f(\underline{x}) = \underline{y}$.

La conséquence suivante est à comparer avec les résultats connus de la géométrie affine :

Corollaire 8.1.3 Soit (V, b) un espace quadratique régulier de dimension n . Tout $f \in \mathcal{O}(V, b)$ est la composée de au plus $2n$ réflexions.

Démonstration. On fait une démonstration par induction sur la dimension de V .

Pour $\dim(V) = 0$ tout est trivial.

Si $\dim(V) = 1$ alors on sait que $(V, b) \cong \langle d \rangle = (F, q(x) = dx^2)$ pour un $d \in F^\times$. Les isomorphismes $f: V \rightarrow V$ sont donnés par $f(x) = ax$ pour $a \in F^\times$; et un tel isomorphisme est une isométrie si et seulement si $a \in \{1, -1\}$. Ainsi $\mathcal{O}(V, b) \cong \{1, -1\}$, où -1 correspond à l'unique réflexion, et bien sûr $1 = (-1)(-1)$ exprime l'identité du groupe comme la composée de la réflexion avec elle-même. Ainsi l'énoncé est vraie.

Soit maintenant $\dim(V) = n \geq 2$, et $f \in \mathcal{O}(V, b)$ quelconque. Par régularité de (V, b) il existe un vecteur anisotrope $\underline{x} \in V$. On a bien sûr $q(f(\underline{x})) = q(\underline{x}) \neq 0$, et par la Proposition précédente on peut trouver (au plus) deux réflexions, disons $\sigma, \tau \in \mathcal{O}(V, b)$, telle que $(\sigma \circ \tau)(f(\underline{x})) = \underline{x}$. C'est à dire, quitte à composer avec (au plus) deux réflexions, on peut remplacer f par $f' = \sigma \circ \tau \circ f \in \mathcal{O}(V, b)$ et supposer que f' fixe un vecteur anisotrope \underline{x} . Par régularité du sous-espace $F\underline{x} \subseteq V$ on a alors la décomposition

$$(V, b) \cong (F\underline{x}, b) \dot{\oplus} (F\underline{x}, b)^\perp$$

en un espace de dimension 1 et un espace de dimension $n - 1$. Puisque

- pour $\underline{v} \in F\underline{x}$ on a $f'(\underline{v}) = f'(\alpha\underline{x}) = \alpha f'(\underline{x}) = \alpha\underline{x} = \underline{v}$,
- pour $\underline{v} \in (F\underline{x})^\perp$ on a $b(f'(\underline{v}), \underline{x}) = b(f'(\underline{v}), f'(\underline{x})) = b(\underline{v}, \underline{x}) = 0$ et donc $f'(\underline{v}) \in (F\underline{x}, b)^\perp$,

nous trouvons que la restriction de f' à $F\underline{x}$ est l'identité, et la restriction de f' à $(F\underline{x})^\perp$ est une isométrie; notons-les par

$$f'_{F\underline{x}} = \text{id}_{F\underline{x}}: F\underline{x} \rightarrow F\underline{x} \quad \text{et} \quad f'_{(F\underline{x})^\perp}: (F\underline{x})^\perp \rightarrow (F\underline{x})^\perp.$$

Par hypothèse d'induction on peut maintenant supposer que cette deuxième isométrie est une composée de (au plus) $2(n - 1)$ réflexions de $(F\underline{x})^\perp$, soit

$$f'_{(F\underline{x})^\perp} = \sigma_r \circ \dots \circ \sigma_1 \quad \text{avec } r \leq 2(n - 1),$$

chaque réflexion σ_i étant déterminée par un hyperplan $H_i \subseteq (F\underline{x})^\perp$. Mais alors, par somme orthogonale

$$\text{id}_{F\underline{x}} \dot{\oplus} \sigma_i: F\underline{x} \dot{\oplus} (F\underline{x})^\perp \rightarrow F\underline{x} \dot{\oplus} (F\underline{x})^\perp: \underline{v} + \underline{w} \mapsto \underline{v} + \sigma_i(\underline{w}),$$

on obtient autant de réflexions de (V, b) (par rapport aux hyperplans $\overline{H}_i = F\underline{x} \dot{\oplus} H_i$); et la composée est bien

$$(\text{id}_{F\underline{x}} \dot{\oplus} \sigma_r) \circ \dots \circ (\text{id}_{F\underline{x}} \dot{\oplus} \sigma_1) = \text{id}_{F\underline{x}} \dot{\oplus} (\sigma_r \circ \dots \circ \sigma_1) = f'_{F\underline{x}} \dot{\oplus} f'_{(F\underline{x})^\perp} = f'.$$

Par la construction de f' par composée de (au plus) deux réflexions avec f , on obtient le résultat annoncé. \square

La borne donnée dans le Corollaire ci-dessus n'est pas optimale. Par exemple, pour l'espace $(\mathbb{R}^2, q(x, y) = x^2 + y^2)$ nous avons déjà montré que tout élément de son groupe orthogonal est une composée de au plus 2 (et non pas 4) réflexions. De manière générale on a en effet :

Théorème 8.1.4 (Théorème de Cartan-Dieudonné) *Si (V, b) est un espace quadratique régulier de dimension n , alors tout élément de $O(V, b)$ est la composée de au plus n réflexions.*

La démonstration de ce résultat n'est pas très difficile mais un peu trop longue pour l'inclure ici ; pour les détails, consulter les références. La borne donnée dans le Théorème de Cartan-Dieudonné est, par contre, optimale :

Proposition 8.1.5 *Soit (V, b) un espace quadratique régulier et $f = \sigma_r \circ \dots \circ \sigma_1$ une composée de r réflexions, alors les points fixes de f forment un sous-espace de dimension au moins $n - r$.*

Démonstration. Notons H_i l'hyperplan (de dimension $n - 1$ donc) des points fixes de la réflexion σ_i . Alors l'intersection $\cap_i H_i \subseteq V$ contient des points fixes de $f = \sigma_r \circ \dots \circ \sigma_1$; sa dimension est au moins $n - r$. \square

Corollaire 8.1.6 *Pour tout espace quadratique régulier (V, b) , le seul point fixe de l'isométrie $f: (V, b) \rightarrow (V, b): \underline{x} \mapsto -\underline{x}$ est $\underline{0}$, et donc ce f n'est pas la composée de strictement moins que n réflexions.*

Rappelons que toute isométrie $f \in O(V, b)$ a son déterminant $\det(f) \in F^\times$ (au sens de l'algèbre linéaire). On a ainsi un homomorphisme de groupes $\det: O(V, b) \rightarrow F^\times: f \mapsto \det(f)$ (exercice : donner les détails), dont le noyau mérite notre attention :

Définition 8.1.7 *Le groupe orthogonal spécial de l'espace quadratique (V, b) est le noyau de $\det: O(V, b) \rightarrow F^\times$, soit :*

$$SO(V, b) = \{f \in O(V, b) \mid \det(f) = 1\}.$$

Si l'espace quadratique (V, b) est régulier, alors pour tout $f \in O(V, b)$ on a $\det(f) = \pm 1$ (exercice). Si en plus V est non-nul, alors on a une suite exacte courte scindée de groupes :

$$SO(V, q) \hookrightarrow O(V, q) \xrightarrow[\det]{\leftarrow} \{1, -1\}$$

En effet, si $\dim(V) = n \neq 0$, considérons une réflexion $\sigma \in O(V, b)$ avec son hyperplan H de points fixes et une droite D orthogonale à H ; on peut alors écrire

$$\sigma: H \oplus D \rightarrow H \oplus D: \underline{v} + \underline{w} \mapsto \underline{v} - \underline{w}$$

et, pour un "bon choix de base" de $V = H \oplus D$ (à savoir, une base de H complété par une base de D), la matrice de σ sera la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une réflexion est donc -1 , et le scindage de "det" envoie -1 exactement sur σ (et 1 sur id_V bien sûr). Autrement dit, le groupe orthogonal d'un espace régulier est le

produit semidirect du groupe orthogonal spécial avec le groupe cyclique d'ordre 2 : $\mathbf{O}(V, b) \cong \mathbf{SO}(V, b) \rtimes \mathbf{C}_2$.

Mais par le Théorème 8.1.4 on a aussi, par composition de réflexions, pour tout $f \in \mathbf{O}(V, b)$,

$$\text{si } f = \sigma_r \circ \dots \circ \sigma_1 \text{ alors } \det(f) = (-1)^r.$$

Il suit ainsi que :

Corollaire 8.1.8 *Soit (V, b) un espace quadratique régulier. Le groupe $\mathbf{SO}(V, b)$ contient exactement les composées d'un nombre paire de réflexions.*

Terminons ici avec un résumé de quelques résultats que nous avons démontrés auparavant. D'abord, dans le Corollaire 7.2.2 nous avons expliqué que toute isométrie de sous-espaces réguliers d'un espace quadratique quelconque (V, b) s'étend à une isométrie de tout l'espace (V, b) . Autrement dit :

Corollaire 8.1.9 *Pour tout espace quadratique (V, b) , le groupe $\mathbf{O}(V, b)$ est transitif sur tout ensemble de sous-espaces réguliers isométriques.*

Par exemple, le groupe $\mathbf{O}(V, b)$ est transitif sur l'ensemble des sous-plans hyperboliques de (V, b) .

Ensuite, en exercice nous avons démontré le Théorème de Witt disant que, pour tout espace régulier (V, b) , toute isométrie de sous-espaces quelconques s'étend à une isométrie de tout l'espace (V, b) . Ainsi :

Corollaire 8.1.10 *Pour tout espace quadratique régulier (V, b) , le groupe $\mathbf{O}(V, b)$ est transitif sur tout ensemble de sous-espaces isométriques.*

Par exemple, le groupe $\mathbf{O}(V, b)$ est transitif sur l'ensemble des sous-droites isotropes d'un espace régulier (V, b) .

8.2. Exemples

On peut démontrer bien d'autres résultats intéressants à propos de $\mathbf{O}(V, b)$ et son sous-groupe normal $\mathbf{SO}(V, b)$. Pour en donner une idée, citons ici deux résultats classiques à propos du centre¹ de ces groupes :

Proposition 8.2.1 *Soit (V, b) un espace régulier, alors $\mathcal{Z}(\mathbf{O}(V, b)) \cong \mathbf{C}_2$ si (V, b) n'est pas un plan hyperbolique sur \mathbb{F}_3 , et $\mathcal{Z}(\mathbf{O}(\langle 1, -1 \rangle_{\mathbb{F}_3})) = \mathbf{O}(\langle 1, -1 \rangle_{\mathbb{F}_3}) \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$.*

Proposition 8.2.2 *Soit (V, b) un espace régulier de dimension $n = 2$, alors $\mathcal{Z}(\mathbf{SO}(V, b)) = \mathbf{SO}(V, b)$. Soit (V, b) un espace régulier de dimension $n \geq 3$, alors $\mathcal{Z}(\mathbf{SO}(V, b)) \cong \{1\}$ si n est impair et $\mathcal{Z}(\mathbf{SO}(V, b)) \cong \mathbf{C}_2$ si n est pair.*

1. Le centre d'un groupe $G = (G, \cdot, 1)$ est le sous-groupe (normal et commutatif) $\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$; le groupe G est commutatif si et seulement si $G = \mathcal{Z}(G)$.

Nous ne donnons pas les démonstrations ici—mais regardons tout de même quelques exemples de plus près. La notation suivante est justifiée par la Proposition 5.2.1 et le Théorème 5.2.3 :

Définition 8.2.3 Pour $r, s \in \mathbb{N}$ on note $O(r, s)$ le groupe orthogonal de l'espace quadratique réel régulier de signature (r, s) ; et on pose $O(n) = O(n, 0)$. On fait de même pour les sous-groupes normaux $SO(r, s)$ et $SO(n)$.

Exemple 8.2.4 Le groupe $O(2)$ est le groupe orthogonal du plan \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel. Nous avons déjà vu que

$$O(2) \cong \{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid M^t M = I\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \pm \sin(t) & \pm \cos(t) \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$SO(2) \cong \{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid M^t M = I \text{ et } \det(M) = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Le groupe $SO(2)$ (des rotations) est commutatif, et donc

$$\mathcal{Z}(SO(2)) = SO(2).$$

On sait que tout élément du groupe orthogonal $O(2)$ est soit une rotation, soit la composée d'une rotation avec une réflexion fixe ; au niveau matricielle, si on note

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors les éléments de $O(2)$ sont les R_θ 's et les $R_\theta J$'s. Mais il est facile de voir que $JR_\theta = R_\theta J$ si et seulement si $R_\theta = \pm I$, et ceci implique immédiatement que le centre de ce groupe ne peut contenir que $\pm I$; de l'autre côté, il est aussi facile de voir que I et $-I$ commutent effectivement avec tous les éléments du groupe. On conclut que

$$\mathcal{Z}(O(2)) = \{\pm I\} \cong C_2.$$

Exemple 8.2.5 Pour décrire matriciellement le groupe orthogonal d'un plan hyperbolique réel, soit $O(1, 1)$, notons la matrice de cette forme quadratique diagonale par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

alors on a l'isomorphisme de groupes $O(1, 1) \cong \{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid M^t B M = B\}$; nous souhaitons expliciter ces matrices M . Si on pose

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors l'équation $M^t B M = B$ dit que

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1 \\ ab = cd \end{cases}$$

Clairement, $a = 0$ est impossible, et aussi $d = 0$ est impossible. On sait ainsi que $c = abd^{-1}$ et donc $a^2 - (abd^{-1})^2 = 1$; mais puisque $b^2 - d^2 = -1$ ceci implique $a^2 = d^2$, ce qui à son tour implique $b^2 = c^2$. Mais l'équation $ab = cd$ implique tout de même que $ad^{-1} = b^{-1}c$ et donc si a et d sont de signes identiques (resp. opposés), alors aussi b et c sont de signes identiques (resp. opposés). Bref, on a exactement les matrices de la forme

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 - b^2 = 1,$$

et on peut déjà écrire que

$$\mathrm{O}(1,1) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \pm b & \pm a \end{pmatrix} \mid a^2 - b^2 = 1 \right\}.$$

La solution générale à l'équation de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ dans \mathbb{R}^2 est donnée par (exercice)

$$\begin{cases} x = \pm \cosh(t) = \pm \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \pm \sinh(t) = \pm \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

Les fonctions $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont le *cosinus hyperbolique* et le *sinus hyperbolique*. Ainsi tout élément de $\mathrm{O}(1,1)$ appartient à une des "quatre familles"

$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ -\sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh(t) & -\sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh(t) & -\sinh(t) \\ -\sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Si on note

$$R_t = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors on peut écrire cela comme

$$\mathrm{O}(1,1) \cong \left\{ \pm J^i R_t \mid t \in \mathbb{R}, i \in \{0,1\} \right\}.$$

En sélectionnant les matrices de déterminant 1, on trouve également que

$$\mathrm{SO}(1,1) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 - b^2 = 1 \right\} = \{ \pm R_t \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Le groupe $\mathrm{SO}(1,1)$ est commutatif, et donc il est égal à son centre :

$$\mathcal{Z}(\mathrm{SO}(1,1)) = \mathrm{SO}(1,1).$$

Pour le calcul du centre de $\mathrm{O}(1,1)$, on peut procéder par analogie avec l'Exemple précédent pour voir que

$$\mathcal{Z}\mathrm{O}(1,1) \cong \{I, -I\} \cong \mathbb{C}_2.$$

Exemple 8.2.6 (Groupe de Lorentz) On appelle le groupe $O(3, 1)$ des isométries de l'espace de Minkowski (voir Exemple 2.2.8) le *groupe de Lorentz*², et ses éléments les *transformations de Lorentz*. Pour avoir une description matricielle de ce groupe, notons

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice de la forme quadratique (pour la base canonique), alors

$$O(3, 1) \cong \{L \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid L^t B L = B\}.$$

Si on écrit une telle matrice L “par blocs” séparant les 3 premières lignes et colonnes, comme

$$L = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline M & N \\ \hline P & c \end{array} \right)$$

alors il suit de $L^t B L = B$ que $N^t N - c^2 = -1$, et donc $c^2 \geq 1$; autrement dit, pour $L = (l_{ij})_{i,j} \in O(3, 1)$ on a soit $l_{44} \geq 1$, et on dit que L est *orthochrone* (“préserve la direction du temps”), soit $l_{44} \leq -1$, et L est *antichrone*. Montrons que l'application

$$\gamma: O(3, 1) \rightarrow \{+1, -1\}: L \mapsto \operatorname{sgn}(l_{44})$$

est un homomorphisme surjectif de groupes. Pour cela, on remarque d'abord que $B = L^t B L$ (et $B B = I$) implique $L^{-1} = B L^t B$; ainsi, avec les notations “en blocs” de ci-dessus,

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline M & N \\ \hline P & c \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} M^t & -P^t \\ \hline -N^t & c \end{array} \right)$$

Il suit qu'aussi $(-P^t)^t (-P^t) - c^2 = -1$, c'est à dire, $P P^t = N^t N = c^2 - 1$ pour tout tel élément de $O(3, 1)$. Maintenant, soit une autre matrice

$$L' = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline M' & N' \\ \hline P' & c' \end{array} \right) \text{ telle que } B = L'^t B L',$$

et notons également

$$L'' = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline M'' & N'' \\ \hline P'' & c'' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline M & N \\ \hline P & c \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline M' & N' \\ \hline P' & c' \end{array} \right) = L L'.$$

2. D'après Hendrik A. Lorentz (1853–1928), prix Nobel de physique en 1902.

On a alors que³

$$c'' = PN' + cc' \geq -|PN'| + cc' \geq -\|P\|\|N'\| + cc' = -\sqrt{c^2 - 1}\sqrt{c'^2 - 1} + cc'.$$

Si c et c' ont le même signe, alors ceci implique que $c'' \geq 0$, et donc (puisque LL' est une transformation de Lorentz) $c'' \geq 1$; si c et c' sont de signes opposés, alors $c'' \leq 0$ et donc $c'' \leq -1$. Bref, nous avons montré que $\gamma(L)\gamma(L') = \gamma(LL')$. Clairement, $\gamma(I) = 1$, et il est facile de trouver une matrice L dans $O(3, 1)$ telle que $\gamma(L) = -1$. Ainsi on peut conclure que les transformations orthochrones forment un sous-groupe normal $O^+(3, 1) \trianglelefteq O(3, 1)$. De l'autre côté, nous savons déjà que $\det(L) = \pm 1$ pour tout $L \in O(3, 1)$; une transformation de Lorentz est *propre* si son déterminant vaut 1 (elle “préserve l'orientation de l'espace”), et *impropre* sinon. Le sous-groupe normal $SO(3, 1) \trianglelefteq O(3, 1)$ contient donc exactement les transformations *propres* de Lorentz. L'intersection de ces deux sous-groupes normaux est le sous-groupe normal noté $SO^+(3, 1) \trianglelefteq O(3, 1)$. Ce groupe est important en physique—car “physiquement” on peut ni changer l'orientation, ni changer la direction du temps, de l'espace de Minkowski. Quel est le quotient $O(3, 1)/SO^+(3, 1)$? On peut raisonner que — puisque tout $L \in O(3, 1)$ est soit propre, soit impropre; et tout L est soit orthochrone, soit antichrone — on a une réunion disjointe

$$\begin{aligned} O(3, 1) = & \{\text{propre, orthochrone}\} \cup \{\text{propre, antichrone}\} \\ & \cup \{\text{impropre, orthochrone}\} \cup \{\text{impropre, antichrone}\}. \end{aligned}$$

Si on note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

alors $\{I, J, K, -I\} \subseteq O(3, 1)$ est (à isomorphisme près) le groupe de Klein $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Mais la réunion disjointe ci-dessus correspond avec

$$O(3, 1) = (SO^+(3, 1) \cdot I) \cup (SO^+(3, 1) \cdot J) \cup (SO^+(3, 1) \cdot K) \cup (SO^+(3, 1) \cdot (-I)).$$

Ainsi le quotient $O(3, 1)/SO^+(3, 1)$ est effectivement isomorphe au groupe de Klein.

8.3. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. Calculer $O(V, b)$ et $SO(V, b)$ si V est de dimension 1 (distinguer le cas où (V, b) est régulier du cas où (V, b) n'est pas régulier).

3. Ici on écrit $\|\cdot\|$ pour la norme usuelle dans \mathbb{R}^3 , définie par le produit scalaire usuel, et donc on sait que $|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\|\|\underline{y}\|$ pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$. On identifie \underline{x} avec la ligne P , et \underline{y} avec la colonne N' ; le produit matriciel PN' est donc exactement le produit scalaire usuel $\underline{x} \cdot \underline{y}$.

3. Soit (V, b) un espace quadratique quelconque, et $V = \text{rad}(V, b) \oplus V'$ sa décomposition en partie nulle et partie régulière (voir Proposition 3.1.6). Montrer à l'aide de la Proposition 3.1.9 que $\text{O}(V, b) \cong \text{O}(\text{rad}(V, b), b) \times \text{O}(V', b)$, et expliciter le premier facteur de ce produit de groupes. La plupart des résultats donnés dans ce chapitre à propos du groupe $\text{O}(V, b)$ suppose que (V, b) soit un espace quadratique régulier ; pourquoi est-ce une hypothèse raisonnable dans ce contexte ?

4. Avec les notations de la Définition 8.2.3, montrer que $\text{O}(r, s) \cong \text{O}(s, r)$. Conclure qu'il peut y avoir deux espaces quadratiques non-isométriques ayant le même groupe orthogonal.

5. Plus généralement, sur un corps quelconque F , on dit que deux formes quadratiques q et q' sur un espace V sont *similaires* s'il existe un $a \in F^\times$ tel que $q'(x) = a \cdot q(x)$. Montrer que, dans ce cas, $\text{O}(V, q) \cong \text{O}(V, q')$, mais que (V, q) et (V, q') ne sont pas nécessairement isométriques.

6. Sur le corps \mathbb{C} on note $\text{O}(n, \mathbb{C})$ pour le groupe orthogonal de l'unique (à isométrie près) espace régulier de dimension n , et $\text{SO}(n, \mathbb{C})$ pour son sous-groupe d'isométries de déterminant 1. Donner leurs descriptions matricielles.

7. Décrire matriciellement le groupe orthogonal et le groupe orthogonal spécial de $\langle 1, 1 \rangle$ et de $\langle 1, -1 \rangle$, et leurs centres, sur \mathbb{F}_3 .

8. Soit un espace quadratique (V, q) quelconque et supposons que $V = W \oplus W'$ pour des sous-espaces $W, W' \subseteq V$. Pour $\underline{v} \in V$, notons $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$ l'unique somme ayant $\underline{w} \in W$ et $\underline{w}' \in W'$.

- (a) Montrer que l'application linéaire $f_W : V \rightarrow V : \underline{w} + \underline{w}' \mapsto \underline{w} - \underline{w}'$ est une isométrie.
- (b) Si $W = F\underline{x}$ avec \underline{x} un vecteur anisotrope de (V, b) , quelle notion du cours retrouve-t-on ?
- (c) Soit une base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$ de W et une base $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_l)$ de W' . Quelle est la matrice de f_W par rapport à la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_l)$ de V ?
- (d) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les dimensions de V et/ou W et/ou W' pour que $f_W \in \text{SO}(V, q)$.

Soit maintenant l'espace $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ des matrices réelles 3×3 , muni de la forme quadratique $q(M) = \text{tr}(M^2)$. Notons $W = \{M \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid M^t = M\}$ et $W' = \{M \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid M^t = -M\}$.

- (e) Montrer que $V = W \oplus W'$.
- (f) Donner une description explicite de $f_W : V \rightarrow V$.
- (g) A-t-on $f_W \in \text{SO}(V, q)$?

9. Anneau de Witt : définition

9.1. Un double monoïde

Rappelons la Définition 3.2.1 : si (V_1, b_1) et (V_2, b_2) sont des espaces quadratiques sur un corps F , alors aussi leur somme orthogonale $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2)$ est un tel espace quadratique : c'est la somme directe $V_1 \oplus V_2$ muni de la forme bilinéaire

$$b(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}'_1 + \underline{v}'_2) = b_1(\underline{v}_1, \underline{v}'_1) + b_2(\underline{v}_2, \underline{v}'_2).$$

L'égalité évidente

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

souligne le caractère *additif* de cette opération.

Lorsqu'on travaille "à isométrie près", nous avons par ailleurs déjà montré que

0. $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2)$ est régulier si et seulement si (V_1, b_1) et (V_2, b_2) sont réguliers,
1. $(V_1, b_1) \perp (V_2, b_2) \cong (V_2, b_2) \perp (V_1, b_1)$,
2. $((V_1, b_1) \perp (V_2, b_2)) \perp (V_3, b_3) \cong (V_1, b_1) \perp ((V_2, b_2) \perp (V_3, b_3))$,
3. $(V_1, b_1) \perp (\{0\}, 0) \cong (V_1, b_1)$

dans la Proposition 3.2.6 ; et le Théorème 7.1.1 y ajoute que

4. si $(V, b) \perp (V_1, b_1) \cong (V, b) \perp (V_2, b_2)$ alors $(V_1, b_1) \cong (V_2, b_2)$.

Dans la suite nous allons noter $[(V, b)]$ pour la classe d'isométrie de l'espace quadratique (V, b) .

On peut alors résumer ces résultats comme :

Proposition 9.1.1 *L'ensemble des classes d'isométrie des espaces quadratiques réguliers sur un corps F est un monoïde commutatif simplifiable pour la somme orthogonale, noté $\mathcal{M}(F)$.*

Démonstration. Tout est évident—sauf peut-être le fait que $\mathcal{M}(F)$ est un *ensemble*. En effet, la collection de tous les espaces quadratiques sur F est une classe propre. Mais nous savons que, pour toute dimension n , toute classe $[(V, b)]$ contient (au moins) une forme diagonale $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$: ainsi le "nombre" de classes d'isométrie en dimension n est

$$\#\{[(V, b)] \mid \dim(V) = n\} \leq \#\{\langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid d_i \in F\} \leq \#F^n.$$

Si on fait la réunion sur toutes les dimensions, on a donc

$$\#\mathcal{M}(F) \leq \#\cup_{n \in \mathbb{N}} F^n$$

ce qui est bien un ensemble (et non pas une classe propre). □

La régularité demandée des éléments de $\mathcal{M}(F)$ n'est pas vraiment essentiel pour ce résultat. Mais tout espace (V, b) se décompose en une partie nulle et une partie régulière,

$$(V, b) \cong (\text{rad}(V, b), b) \oplus (W, b) \cong \langle 0, \dots, 0 \rangle \oplus (W, b),$$

et clairement l'espace $\langle 0, \dots, 0 \rangle$ est sans aucun intérêt pour l'étude du corps F ; c'est pourquoi on écarte les espaces non-réguliers dans la définition ci-dessus.

On peut non-seulement "additionner" deux espaces quadratiques—mais aussi les "multiplier". L'outil de l'algèbre linéaire dont on aura besoin pour cela, est :

Définition 9.1.2 *Le produit tensoriel de deux F -espaces vectoriels V_1 et V_2 est un F -espace $V_1 \otimes V_2$ muni d'une application bilinéaire universelle $\tau: V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$.*

Cela veut dire que, pour tout F -espace V et toute application bilinéaire $t: V_1 \times V_2 \rightarrow V$, il existe une unique application linéaire $\hat{t}: V_1 \otimes V_2 \rightarrow V$ telle que $\hat{t} \circ \tau = t$; autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 & \xrightarrow{\tau} & V_1 \otimes V_2 \\ & \searrow \forall t & \swarrow \exists! \hat{t} \\ & & V \end{array}$$

Comme toute définition mathématique donnée par universalité, le produit tensoriel de V_1 et V_2 est défini "à unique isomorphisme près"; c'est à dire, si on a deux applications bilinéaires universelles,

$$\tau: V_1 \times V_2 \rightarrow V \quad \text{et} \quad \tau': V_1 \times V_2 \rightarrow V',$$

alors on peut montrer qu'il existe un unique isomorphisme $f: V \rightarrow V'$ tel que $f \circ \tau = \tau'$ (exercice). Rappelons une construction explicite du produit tensoriel d'espaces vectoriels :

Proposition 9.1.3 *Pour des espaces vectoriels V_1 et V_2 , on peut construire une application bilinéaire universelle $\tau: V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$ comme suit :*

– d'abord on note

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i(\underline{v}_1^i, \underline{v}_2^i) \mid r \in \mathbb{N}, a_i \in F, (\underline{v}_1^i, \underline{v}_2^i) \in V_1 \times V_2 \right\}$$

pour l'espace de toutes les combinaisons linéaires formelles de tous les éléments de $V_1 \times V_2$,

– puis on note le sous-espace $S \subseteq W$ engendré par les éléments

$$\left\{ \begin{array}{l} (\underline{v}_1 + \underline{v}'_1, \underline{v}_2) - (\underline{v}_1, \underline{v}_2) - (\underline{v}'_1, \underline{v}_2) \\ (a\underline{v}_1, \underline{v}_2) - a(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \\ (\underline{v}_1, \underline{v}_2 + \underline{v}'_2) - (\underline{v}_1, \underline{v}_2) - (\underline{v}_1, \underline{v}'_2) \\ (\underline{v}_1, a\underline{v}_2) - a(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \end{array} \right.$$

pour tout $\underline{v}_1, \underline{v}'_1 \in V_1$ et $\underline{v}_2, \underline{v}'_2 \in V_2$,

– et finalement on pose $V_1 \otimes V_2 = W/S$ et $\tau: V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2: (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \mapsto \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2$, où $\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2$ est la classe d'équivalence de $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ dans le quotient.

Dans la pratique, cela veut dire que l'on a

$$V_1 \otimes V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^r v_1^i \otimes v_2^i \mid (v_1^i, v_2^i) \in V_1 \times V_2 \right\}$$

avec les opérations données par (extension par linéarité de)

$$\begin{cases} (v_1 \otimes v_2) + (v_1' \otimes v_2') = (v_1 + v_1') \otimes (v_2 + v_2') \\ a(v_1 \otimes v_2) = av_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes av_2 \end{cases}$$

On appelle un élément $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$ un *tenseur pur* ; un élément quelconque de $V_1 \otimes V_2$ est donc une combinaison linéaire de tenseurs purs.

Si on a des bases (e_1, \dots, e_n) de V_1 et (e_1', \dots, e_m') de V_2 , alors

$$(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) \otimes (b_1 e_1' + \dots + b_m e_m') = \sum_{i,j} a_i b_j (e_i \otimes e_j')$$

et donc plus généralement

$$\begin{aligned} \sum_i v_1^i \otimes v_2^i &= \sum_i (a_1^i e_1 + \dots + a_n^i e_n) \otimes (b_1^i e_1' + \dots + b_m^i e_m') \\ &= \sum_i \sum_{k,l} a_k^i b_l^i (e_k \otimes e_l') \\ &= \sum_{k,l} \left(\sum_i a_k^i b_l^i \right) (e_k \otimes e_l') \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite

$$(e_1 \otimes e_1', \dots, e_1 \otimes e_m', e_2 \otimes e_1', \dots, e_2 \otimes e_m', \dots, e_n \otimes e_1', \dots, e_n \otimes e_m')$$

des tenseurs purs des vecteurs de base (avec l'ordre lexicographique) est génératrice pour $V_1 \otimes V_2$. On peut aussi montrer que cette suite est libre (exercice), et donc c'est une base du produit tensoriel. On a donc

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$$

ce qui souligne le caractère *multiplicatif* du produit tensoriel.

Exemple 9.1.4 Le produit tensoriel de F^n et F^m peut être réalisé comme suit :

- on identifie $F^n \cong F^{n \times 1}$ et $F^m \cong F^{1 \times m}$,
- un tenseur pur est alors donné par le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

- une somme de telles matrices est une matrice quelconque de taille $n \times m$, et on a donc $F^n \otimes F^m \cong F^{n \times m}$.

Par ailleurs, les bases canoniques de $F^{n \times 1}$ et $F^{1 \times m}$ produisent par tenseurs purs la base canonique de $F^{n \times m}$.

On peut démontrer un tas de propriétés du produit tensoriel d'espaces vectoriels, mais on ne le fera pas ici—on pourra les retrouver dans toute bonne référence d'algèbre (multi-)linéaire.

Ce qui est important pour la théorie des espaces quadratiques, c'est l'observation que, pour deux espaces quadratiques (V_1, b_1) et (V_2, b_2) , aussi le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ porte une forme bilinéaire symétrique :

Définition 9.1.5 *Si (V_1, b_1) et (V_2, b_2) sont deux espaces quadratiques, alors leur produit tensoriel (aussi appelé produit de Kronecker) est l'espace quadratique $(V_1 \otimes V_2, b)$ défini sur les tenseurs purs par*

$$b(\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2, \underline{v}'_1 \otimes \underline{v}'_2) = b_1(\underline{v}_1, \underline{v}'_1) \cdot b_2(\underline{v}_2, \underline{v}'_2)$$

(et on étend par bilinéarité à tout $(V_1 \otimes V_2) \times (V_1 \otimes V_2)$).

Si on note q_1 et q_2 les formes quadratiques de (V_1, b_1) et (V_2, b_2) , alors la forme quadratique q du produit tensoriel $(V_1 \otimes V_2, b)$ satisfait à

$$q(\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2) = q_1(\underline{v}_1) \cdot q_2(\underline{v}_2)$$

pour les tenseurs purs ; la formule pour un élément général de $V_1 \otimes V_2$ est bien plus compliquée. Par ailleurs, si on a des bases $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_m)$ pour (V_1, b_1) et (V_2, b_2) , et donc des matrices symétriques $B_1 \in F^{n \times n}$ et $B_2 \in F^{m \times m}$, alors pour la base de $V_1 \otimes V_2$ des tenseurs purs $\underline{e}_i \otimes \underline{e}'_j$ (avec ordre lexicographique), on trouve pour $(V_1 \otimes V_2, b)$ la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}B_2 & \cdots & \beta_{1n}B_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1}B_2 & \cdots & \beta_{nn}B_2 \end{pmatrix} \in F^{nm \times nm}$$

où on a écrit $B_1 = (\beta_{ij})_{i,j}$ (et ceci est ce qu'on appelle plus généralement le *produit de Kronecker* de deux matrices).

Exemple 9.1.6 Si $a, b \in F$ alors le produit tensoriel des espaces $\langle a \rangle = (F, q_1(x) = ax^2)$ et $\langle b \rangle = (F, q_2(x) = bx^2)$ est l'espace $F \otimes F \cong F$ muni de la forme $q(x) = abx^2$. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que le produit de Kronecker des "matrices" de $\langle a \rangle$ et de $\langle b \rangle$ est bel et bien (ab) .

On peut démontrer que :

Proposition 9.1.7 *Pour des espaces quadratiques (V_1, b_1) , (V_2, b_2) et (V_3, b_3) quelconques,*

1. *si (V_1, b_1) et (V_2, b_2) sont réguliers, alors $(V_1, b_1) \otimes (V_2, b_2)$ l'est aussi,*
2. $(V_1, b_1) \otimes (V_2, b_2) \cong (V_2, b_2) \otimes (V_1, b_1)$,
3. $((V_1, b_1) \otimes (V_2, b_2)) \otimes (V_3, b_3) \cong (V_1, b_1) \otimes ((V_2, b_2) \otimes (V_3, b_3))$,
4. $(V_1, b_1) \otimes \langle 1 \rangle \cong (V_1, b_1)$,
5. $(V_1, b_1) \otimes ((V_2, b_2) \dot{\oplus} (V_3, b_3)) \cong ((V_1, b_1) \dot{\oplus} (V_2, b_2)) \otimes ((V_1, b_1) \dot{\oplus} (V_3, b_3))$

Démonstration. Exercice. □

Exemple 9.1.8 Le produit tensoriel de $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ avec $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ est (à isométrie près) l'espace $\langle a_1 b_1, \dots, a_1 b_m, a_2 b_1, \dots, a_2 b_m, \dots, a_n b_1, \dots, a_n b_m \rangle$. En effet, il suffit d'écrire $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_n \rangle$ et $\langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle b_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_m \rangle$, puis d'exploiter les règles de calcul de la Proposition 9.1.7.

Bien sûr, si on passe aux classes d'isométries d'espaces quadratiques réguliers, on peut compléter la Proposition 9.1.1 par :

Proposition 9.1.9 *L'ensemble $\mathcal{M}(F)$ des classes d'isométrie des espaces quadratiques réguliers sur un corps F est un monoïde commutatif pour le produit tensoriel; le produit tensoriel est distributif par rapport à la somme orthogonal.*

La combinaison des Propositions 9.1.1 et 9.1.9 peut être résumée joliment par :

Théorème 9.1.10 *L'ensemble $\mathcal{M}(F)$ des classes d'isométrie des espaces quadratiques réguliers sur un corps F est un rig¹ commutatif, simplifiable pour la somme.*

9.2. Groupe de Grothendieck et anneau de Witt

Le rig $\mathcal{M}(F)$ n'est pas un anneau : il manque des "négatifs"! On va y remédier, comme suit.

De façon générale, si $M = (M, +, 0)$ est un monoïde commutatif et simplifiable, alors

$$(m, n) \sim (m', n') \iff m + n' = m' + n$$

est une relation d'équivalence² sur $M \times M$; on va noter $((m, n))$ la classe d'équivalence d'un couple (m, n) . Le quotient $\mathcal{G}(M) = M \times M / \sim$ est un groupe commutatif pour

$$((m, n)) + ((m', n')) = ((m + m', n + n')) \quad , \quad 0 = ((0, 0)) \quad \text{et} \quad -((m, n)) = ((n, m)).$$

De plus, l'application

$$\phi: M \rightarrow \mathcal{G}(M): m \mapsto ((m, 0))$$

est un homomorphisme injectif de monoïdes, qui est universel : pour tout groupe commutatif $(G, +, 0)$ et tout homomorphisme de monoïdes $f: M \rightarrow G$ il existe un unique homomorphisme de groupes $\hat{f}: \mathcal{G}(M) \rightarrow G$ tel que $\hat{f} \circ \phi = f$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G}(M) \\ & \searrow f & \vdots \\ & & G \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists! \hat{f} \\ \forall f \end{array}$$

En mots, le groupe $\mathcal{G}(M)$ est le "plus petit" groupe contenant le monoïde M . (Exercice : détailler les arguments.) Cette construction porte un nom :

1. En anglais on dit *ring* pour un anneau ; un *rig* est un *ring without negatives*—un "anneau sans négatifs". Formellement : un rig est un double monoïde $(M, +, 0, \cdot, 1)$ où $(M, +, 0)$ est commutatif et on a les distributivités $x(y + z) = xy + xz$ et $(x + y)z = xz + yz$, et l'annulation $0x = 0 = x0$. Un rig est commutatif si $xy = yx$. Un rig est un anneau si et seulement si $(M, +, 0)$ est un groupe.

2. Intuitivement, la relation d'équivalence $(m, n) \sim (m', n')$ exprime que " $m - n = m' - n'$ "... sauf que cette soustraction n'existe pas nécessairement dans M !

Définition 9.2.1 Si $(M, +, 0)$ est un monoïde commutatif simplifiable, alors le groupe commutatif $(\mathcal{G}(M), +, 0)$ est le groupe de Grothendieck³ de M .

L'exemple le plus simple – et le plus connu – est le groupe de Grothendieck du monoïde $(\mathbb{N}, +, 0)$ (qui est commutatif et simplifiable) : c'est $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Mais bien sûr \mathbb{Z} est un anneau, et on comprend bien que la multiplication dans \mathbb{Z} est aussi définie par la multiplication dans \mathbb{N} . Aussi dans le cas général, si $(M, +, 0, \cdot, 1)$ est un rig commutatif qui est simplifiable pour $+$, alors on vérifie sans difficulté (exercice !) que son groupe de Grothendieck $(\mathcal{G}(M), +, 0)$ est un anneau commutatif pour

$$((m, n)) \cdot ((m', n')) = ((mm' + nn', mn' + nm')) \quad \text{et} \quad 1 = ((1, 0)).$$

Pour simplifier nos notations dans la suite, observons que, dans $\mathcal{G}(M)$, on a

$$((m, n)) = ((m, 0)) + ((0, n)) = ((m, 0)) - ((n, 0)) = \phi(m) - \phi(n)$$

pour l'inclusion $\phi: M \rightarrow \mathcal{G}(M)$ qui identifie m avec $((m, 0))$; ainsi il est tout à fait sensé de noter

$$((m, n)) = m - n,$$

tout en se rappelant que ceci n'est pas nécessairement une soustraction dans M , mais une expression formelle dans $\mathcal{G}(M)$, qui néanmoins se *comporte* comme une soustraction !

Par conséquent, on peut définir :

Définition 9.2.2 L'anneau de Grothendieck-Witt d'un corps F est $\mathcal{G}(\mathcal{M}(F))$.

Les éléments de l'anneau $\mathcal{G}(\mathcal{M}(F))$ sont donc les “différences formelles” de classes d'isométrie d'espaces quadratiques réguliers sur F : des expressions comme $[(V_1, b_2)] - [(V_2, b_2)]$ pour (V_1, b_2) et (V_2, b_2) des espaces quadratiques réguliers sur F .

Aussi élégante qu'elle soit, cette construction s'avère quelque peu problématique pour l'étude d'un corps F :

Exemple 9.2.3 Pour tout corps fini \mathbb{F}_q , les espaces réguliers sont $\langle 1, \dots, 1 \rangle$ et $\langle 1, \dots, 1, \varepsilon \rangle$; ainsi l'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{F}_q)$ est le même, quelque soit q . De plus, les opérations de somme et produit sur $\mathcal{M}(\mathbb{F}_q)$ sont les mêmes, quelque soit q , donc aussi l'anneau $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\mathbb{F}_q))$ est le même pour tout q . Cet anneau semble donc sans intérêt pour l'étude de \mathbb{F}_q .

Exemple 9.2.4 Sur un corps quelconque F , on peut calculer dans l'anneau $\mathcal{G}(\mathcal{M}(F))$ que

$$[\langle d_1 \rangle] + [\langle d_2 \rangle] = [\langle d_1 \rangle \oplus \langle d_2 \rangle] = [\langle d_1, d_2 \rangle]$$

et en particulier, pour $d \in F^\times$,

$$[\langle d \rangle] + [\langle -d \rangle] = [\langle d, -d \rangle] = [\langle 1, -1 \rangle].$$

Notons que cette dernière expression n'est pas nécessairement zéro dans $\mathcal{G}(\mathcal{M}(F))$ —autrement dit, l'élément $[\langle -d \rangle]$ n'est pas l'opposé de $[\langle d \rangle]$!

3. D'après Alexander Grothendieck (1928–2014), médaille Fields en 1966.

Les exemples indiquent que l'anneau $\mathcal{G}(\mathcal{M}(F))$ est quelque peu “trop grand”. L'idée brillante de E. Witt a été que, non pas toutes les formes quadratiques *régulières* sur F , mais plutôt les formes quadratiques *anisotropes* sont importantes pour l'étude de F . Heureusement, on a démontré que toute forme régulière se décompose en une partie hyperbolique et une partie anisotrope—voir la Proposition 6.2.4 ainsi que le Théorème 7.1.2. On veut donc “annihiler” la partie hyperbolique des éléments de $\mathcal{G}(\mathcal{W}(F))$; et tel un vrai seigneur des anneaux, on le fera en quotientant par un idéal :

Proposition 9.2.5 *Dans l'anneau $\mathcal{G}(\mathcal{M}(F))$, l'idéal engendré par le plan hyperbolique est l'ensemble des espaces hyperboliques et leurs opposés, $\mathcal{J} = \{m\langle 1, -1 \rangle \mid m \in \mathbb{Z}\}$.*

Démonstration. Un espace hyperbolique est (par définition) isométrique à $m\langle 1, -1 \rangle$ (pour $m \in \mathbb{N}_0$), et $m\langle 1, -1 \rangle = [m\langle 1, -1 \rangle]$; ainsi $\mathcal{J} = \{m\langle 1, -1 \rangle \mid m \in \mathbb{Z}\}$ est effectivement l'ensemble des espaces hyperboliques et leurs opposés. Pour tout espace régulier $(V, b) \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ (avec $d_i \neq 0$) on peut calculer que

$$(V, b) \otimes m\langle 1, -1 \rangle \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle \otimes m\langle 1, -1 \rangle \cong m\langle d_1, -d_1, \dots, d_n, -d_n \rangle \cong mn\langle 1, -1 \rangle,$$

et il suit que \mathcal{J} est un idéal de $\mathcal{G}(\mathcal{M}(F))$. □

Définition 9.2.6 *L'anneau de Witt d'un corps F est le quotient $\mathcal{W}(F) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(F))/\mathcal{J}$*

Ecrivons $[(V, b)]$ pour l'élément de $\mathcal{W}(F)$ déterminé par un espace quadratique régulier (V, b) ; alors on a $[(V, b)] = [(V', b')]$ si et seulement si $[(V, b)] - [(V', b')] \in \mathcal{J}$. Par la Décomposition de Witt (Théorème 7.1.2), on sait que tout espace régulier se décompose en une partie hyperbolique et une partie anisotrope :

$$(V, b) \cong (V_h, b_h) \oplus (V_a, b_a).$$

Ainsi on a en particulier que $[(V, b)] = [(V_a, b_a)]$. C'est à dire, dans l'anneau de Witt on identifie deux formes quadratiques régulières lorsqu'elles ont la même partie anisotrope. Mieux encore :

Proposition 9.2.7 *Les éléments de $\mathcal{W}(F)$ sont en bijection avec les classes d'isométrie de formes quadratiques anisotropes sur F .*

Démonstration. Soit $d \in F^\times$, alors on peut calculer dans $\mathcal{W}(F)$ que

$$[\langle d \rangle] + [\langle -d \rangle] = [\langle d, -d \rangle] = [\langle 1, -1 \rangle] = [0]$$

et donc $-\llbracket \langle d \rangle \rrbracket = \llbracket \langle -d \rangle \rrbracket$. Ainsi, pour tout espace régulier $(V, b) \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ on trouve (par induction sur n) que

$$-\llbracket \langle d_1, \dots, d_n \rangle \rrbracket = \llbracket \langle -d_1, \dots, -d_n \rangle \rrbracket;$$

autrement dit, l'espace quadratique régulier $(V', b') = \langle -d_1, \dots, -d_n \rangle$ “est” l'opposé de (V, b) dans $\mathcal{W}(F)$. Se limitant aux parties anisotropes de (V, b) et (V', b') , on obtient ainsi une surjection

$$\pi: \{F\text{-espaces quadratiques anisotropes}\} \rightarrow \mathcal{W}(F): (V, b) \mapsto \llbracket (V, b) \rrbracket.$$

Pour deux espaces anisotropes (V, b) et (V', b') , on a

$$\begin{aligned} \llbracket (V, b) \rrbracket &= \llbracket (V', b') \rrbracket \quad \text{dans } \mathcal{W}(F) \\ \iff \llbracket (V, b) \rrbracket - \llbracket (V', b') \rrbracket &\in \mathcal{J} \quad \text{dans } \mathcal{G}(\mathcal{M}(F)) \\ \iff \llbracket (V, b) \rrbracket - \llbracket (V', b') \rrbracket &= m\langle 1, -1 \rangle \quad \text{dans } \mathcal{G}(\mathcal{M}(F)) \\ \iff \llbracket (V, b) \rrbracket &= \llbracket (V', b') \rrbracket + m\langle 1, -1 \rangle \quad \text{dans } \mathcal{G}(\mathcal{M}(F)) \end{aligned}$$

Quitte à échanger (V, b) et (V', b') on peut supposer que $m \in \mathbb{N}$, et donc le précédent est encore équivalent à $(V, b) \cong (V', b') \dot{\oplus} m\langle 1, -1 \rangle$, mais puisque (V, b) est anisotrope par hypothèse, on doit avoir $m = 0$ et donc $(V, b) \cong (V', b')$. Ainsi, la surjection π se restreint à une bijection

$$\pi': \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isométrie de } F\text{-espaces} \\ \text{quadratiques anisotropes} \end{array} \right\} \rightarrow \mathcal{W}(F): (V, b) \mapsto \llbracket (V, b) \rrbracket$$

comme voulu. □

Ainsi on retrouve la définition que E. Witt avait initialement donné de l'anneau qui porte aujourd'hui son nom :

Théorème 9.2.8 *L'anneau de Witt $\mathcal{W}(F)$ d'un corps F est aussi donné par l'ensemble des classes d'isométrie des espaces quadratiques anisotropes sur F , muni des opérations*

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket (V_1, b_1) \rrbracket + \llbracket (V_2, b_2) \rrbracket = [\text{partie anisotrope de } (V_1, b_1) \dot{\oplus} (V_2, b_2)] \\ \llbracket (V_1, b_1) \rrbracket \cdot \llbracket (V_2, b_2) \rrbracket = [\text{partie anisotrope de } (V_1, b_1) \otimes (V_2, b_2)] \end{array} \right.$$

9.3. Exercices

1. Compléter tous les "exercices" marqués dans le texte.
2. Révision. Montrer que, étant défini par sa propriété universelle, le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ est "unique à isomorphisme près". Reformuler la propriété universelle pour montrer un isomorphisme (canonique) de $\text{Lin}(V_1 \otimes V_2, Z)$ avec $\text{Lin}(V_1, \text{Lin}(V_2, Z))$, quelque soit l'espace vectoriel Z . (Les foncteurs $V_1 \otimes -$ et $\text{Lin}(V_1, -)$ sont *adjoints*.) Prendre $Z = F$ pour en déduire que $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \dim(V_2)$.
3. Révision. Montrer les isomorphismes (canoniques) pour le produit tensoriel d'espaces vectoriels :
 - (a) $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$,
 - (b) $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$,
 - (c) $F \otimes V \cong V$.
4. Révision. Montrer que $V_1^* \otimes V_2 \rightarrow \text{Lin}(V_1, V_2): (\varphi, \underline{v}) \mapsto \varphi(-)\underline{v}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, son inverse étant donné par $f \mapsto \sum_i \underline{e}_i^* \otimes f(\underline{e}_i)$, où $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ est une base de V_2 . En déduire que $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \dim(V_2)$.
5. Révision. Si $\underline{e}_1^1, \dots, \underline{e}_n^1$ est une base de V_1 et $\underline{e}_1^2, \dots, \underline{e}_m^2$ est une base de V_2 , montrer que la suite $(\underline{e}_i^1 \otimes \underline{e}_j^2)_{i,j}$ (écrite dans l'ordre lexicographique, disons) est une base de $V_1 \otimes V_2$.

6. Révision. Montrer comment deux applications linéaires $f: V_1 \rightarrow W_1$ et $g: V_2 \rightarrow W_2$ définissent une application linéaire $f \otimes g: V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$. Si on connaît des matrices pour f et g , comment peut-on calculer une matrice pour $f \otimes g$?

7. Montrer que le produit tensoriel (tout comme la somme orthogonale) de deux espaces quadratiques réguliers est un espace quadratique régulier. Montrer que le produit tensoriel (contrairement à la somme orthogonale) d'un espace régulier avec un espace hyperbolique est un espace hyperbolique. Indication : considérer des formes diagonales.

10. Anneau de Witt : exemples

En théorie algébrique des nombres, l'anneau de Witt est une des premières constructions pour la considération des formes quadratiques sur un corps F . Le but est de s'en servir pour étudier le corps F . C'est le sujet d'un cours spécialisé (voir les références); ici nous nous limitons à calculer quelques exemples.

10.1. Sur le corps des nombres complexes

Sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes, on sait par le Théorème 5.1.1 que tous les espaces quadratiques réguliers de dimension n sont isométriques à $\langle 1, \dots, 1 \rangle = n\langle 1 \rangle$; en particulier, le plan hyperbolique sur \mathbb{C} est $\langle 1, -1 \rangle \cong \langle 1, 1 \rangle$. Dans $\mathcal{W}(\mathbb{C})$ on "calcule à plan hyperbolique près", et donc

$$\llbracket n\langle 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle \rrbracket = \begin{cases} \llbracket \langle 1, -1, 1, -1, \dots, 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket & \text{si } n \text{ est impair} \\ \llbracket \langle 1, -1, 1, -1, \dots, -1 \rangle \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Ainsi l'anneau $\mathcal{W}(\mathbb{C})$ a exactement deux éléments—il est donc isomorphe à \mathbb{Z}_2 , l'isomorphisme étant donné par la parité de la dimension :

$$\sigma: \mathcal{W}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{Z}_2: \llbracket (V, b) \rrbracket \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \dim(V) \text{ est impaire} \\ 0 & \text{si } \dim(V) \text{ est paire} \end{cases}$$

De manière générale, comme déjà indiqué dans la Remarque 5.1.2, on peut montrer :

Théorème 10.1.1 *Un corps F est quadratiquement clos si et seulement si $\mathcal{W}(F) \cong \mathbb{Z}_2$.*

Démonstration. Si F est quadratiquement clos, alors on peut remplacer \mathbb{C} par F dans l'argument ci-dessus pour montrer que $\mathcal{W}(F) \cong \mathbb{Z}_2$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{W}(F) \cong \mathbb{Z}_2$; cela veut dire que tout espace quadratique régulier sur F , que l'on peut toujours décomposer comme

$$(V, b) \cong (V_h, b_h) \dot{\oplus} (V_a, b_a) \cong n\langle 1, -1 \rangle \dot{\oplus} (V_a, b_a),$$

a pour sa partie anisotrope soit $\llbracket (V_a, b_a) \rrbracket = \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket$, soit $\llbracket (V_a, b_a) \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket$. En particulier, pour $d \in F^\times$ on a $\llbracket \langle d \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket$, c'est à dire $\langle d \rangle \cong \langle 1 \rangle$, et donc d est un carré. \square

10.2. Sur le corps des nombres réels

Par le Théorème 5.2.3 on sait que les espaces quadratiques réguliers réels sont isométriques à $\langle 1, \dots, 1, -1, \dots, -1 \rangle = r\langle 1 \rangle \oplus s\langle -1 \rangle$; le couple (r, s) est la *signature* de l'espace. Par la décomposition de Witt on peut calculer dans l'anneau $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ que

$$\llbracket r\langle 1 \rangle \oplus s\langle -1 \rangle \rrbracket = r\llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket + s\llbracket \langle -1 \rangle \rrbracket = r\llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket - s\llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket = (r - s)\llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket.$$

En fait, l'application

$$\sigma: \mathcal{W}(R) \rightarrow \mathbb{Z}: \llbracket (V, b) \rrbracket \mapsto (r - s) \quad (\text{où } (V, b) \cong r\langle 1 \rangle \oplus s\langle -1 \rangle)$$

ainsi obtenue est un isomorphisme d'anneaux (exercice). De manière générale, on peut même montrer :

Théorème 10.2.1 *Un corps F est ordonné par ses carrés¹ si et seulement si $\mathcal{W}(F) \cong \mathbb{Z}$.*

Pour une démonstration de ce résultat, on pourra consulter les références.

10.3. Sur un corps fini

Sur un corps fini \mathbb{F}_q , comme démontré dans le Théorème 5.3.5, les espaces quadratiques réguliers sont isométriques à soit $\langle 1, \dots, 1 \rangle = n\langle 1 \rangle$, soit $\langle 1, \dots, 1, \varepsilon \rangle = n\langle 1 \rangle \oplus \langle \varepsilon \rangle$, où ε est un non-carré au choix dans \mathbb{F}_q . Nous avons aussi déjà démontré que $\langle 1, 1 \rangle \cong \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle$ dans tout \mathbb{F}_q , dans la Proposition 5.3.4. Concernant le plan hyperbolique $\langle 1, -1 \rangle$, nous devons distinguer deux possibilités :

- Soit -1 est un non-carré dans \mathbb{F}_q . On a alors que $\langle 1, -1 \rangle \cong \langle 1, \varepsilon \rangle$ et on peut dresser la liste des éléments de $\mathcal{W}(\mathbb{F}_q)$ comme suit :

$$\begin{aligned} & \llbracket 0 \rrbracket \\ & \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket \\ & \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket \\ & \llbracket \langle 1, 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle \rrbracket \\ & \llbracket \langle 1, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket \\ & \llbracket \langle 1, 1, 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, \varepsilon, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, \varepsilon \rangle \rrbracket + \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket + \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket \\ & \llbracket \langle \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, 1, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket + \llbracket \langle 1, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket + \llbracket 0 \rrbracket = \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket \\ & \llbracket n\langle 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, \dots, 1, 1 \rangle \rrbracket = \begin{cases} \llbracket \langle 1, \dots, 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket & \text{si } n = 4m \\ \llbracket \langle 1, \dots, 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon, 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket & \text{si } n = 1 + 4m \\ \llbracket \langle 1, \dots, 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, 1 \rangle \rrbracket & \text{si } n = 2 + 4m \\ \llbracket \langle 1, \dots, 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, 1, 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, 1, 1 \rangle \rrbracket = \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket & \text{si } n = 3 + 4m \end{cases} \end{aligned}$$

1. Cela veut dire que la relation $R = \{(x, y) \in F \times F \mid y - x \text{ est un carré}\}$ est une relation d'ordre sur F , compatible avec les opérations du corps.

$$\llbracket n\langle 1 \rangle \oplus \langle \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket n\langle 1 \rangle \rrbracket + \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket = \begin{cases} \llbracket 0 \rrbracket + \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket & \text{si } n = 4m \\ \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket + \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket & \text{si } n = 1 + 4m \\ \llbracket \langle 1, 1 \rangle \rrbracket + \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, 1, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket & \text{si } n = 2 + 4m \\ \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket + \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle \rrbracket = \llbracket \langle 1, 1 \rangle \rrbracket & \text{si } n = 3 + 4m \end{cases}$$

Autrement dit, on voit ici que

$$\mathcal{W}(\mathbb{F}_q) = \left\{ \llbracket 0 \rrbracket, \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket, \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket, \llbracket \langle 1, 1 \rangle \rrbracket \right\}$$

est un anneau à 4 éléments². Lorsqu'on dresse les tables d'addition et de multiplication de cet anneau, on observe que $\mathcal{W}(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{Z}_4$.

- Soit -1 est un carré dans \mathbb{F}_q . Dans ce cas on a $\langle 1, -1 \rangle \cong \langle 1, 1 \rangle$ et un calcul semblable à celui ci-dessus montre que

$$\mathcal{W}(\mathbb{F}_q) = \left\{ \llbracket 0 \rrbracket, \llbracket \langle 1 \rangle \rrbracket, \llbracket \langle \varepsilon \rangle \rrbracket, \llbracket \langle 1, \varepsilon \rangle \rrbracket \right\};$$

c'est donc aussi un anneau à 4 éléments. Par inspection de l'addition et de la multiplication, on obtient $\mathcal{W}(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]$.

On peut élégamment formuler ce résultat grâce à :

Proposition 10.3.1 *Dans \mathbb{F}_q (avec q impair),*

$$\begin{cases} -1 \text{ est un carré si et seulement si } q \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 \text{ est un non-carré si et seulement si } q \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Démonstration. Puisque q est impair, on n'a jamais $q \equiv 0 \pmod{4}$ ou $q \equiv 2 \pmod{4}$; la deuxième assertion ci-dessus est donc la négation de la première, et il suffit de démontrer la première.

Si $-1 = a^2$ dans \mathbb{F}_q , alors $a^4 = 1$ et donc -1 est un élément d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{F}_q^\times, \cdot, 1)$, et donc 4 divise l'ordre du groupe, soit $q - 1$. On a donc $q - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, ce qui est la même chose que $q \equiv 1 \pmod{4}$.

Réciproquement, si $q \equiv 1 \pmod{4}$ alors 4 divise $q - 1$ et il existe donc un élément d'ordre 4 dans $(\mathbb{F}_q^\times, \cdot, 1)$, soit $x \in \mathbb{F}_q^\times$. Mais alors x^2 est d'ordre 2, donc nécessairement égal à -1 ; et -1 est ainsi un carré. \square

Pour conclure en beauté, voici :

Théorème 10.3.2 *Pour q impair on a*

$$\begin{cases} \mathcal{W}(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2] \text{ si et seulement si } q \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathcal{W}(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{Z}_4 \text{ si et seulement si } q \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

2. Il existe exactement 4 anneaux (unitaires) à 4 éléments : \mathbb{Z}_4 , $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, \mathbb{F}_4 et l'anneau de groupe $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]$. En exercice on dressera les tables de somme et de produit de ces anneaux.

10.4. Exercices

1. Compléter tous les “exercices” marqués dans le texte.
2. Montrer que F est quadratiquement clos si et seulement si tout F -espace quadratique régulier de dimension 2 est un plan hyperbolique, si et seulement si tout F -espace quadratique régulier de dimension paire est un espace hyperbolique. Indication : Si, pour $d \in F^\times$, l'espace régulier $\langle 1, -d \rangle$ est isotrope, alors il existe $x, y \in F$ tels que $x^2 - dy^2 = 0$.
3. Anneau d'un groupe G sur un corps F . Soit un groupe $(G, \cdot, 1)$ et un corps F . Vérifier que l'ensemble

$$F[G] = \{f: G \rightarrow F \mid f \text{ est de support fini}\}$$

est un anneau pour les opérations

$$\left\{ \begin{array}{l} f + g: G \rightarrow F: a \mapsto f(a) + g(a) \\ fg: G \rightarrow F: a \mapsto \sum_{a=bc} f(b)g(c) \end{array} \right.$$

Si $|G| = n$, alors une fonction $f: A \rightarrow F$ est un n -uplet $(f(a))_{a \in G} \in F^n$, que l'on note souvent par $\sum_{a \in G} f_a e_a$ “comme si” les e_a 's sont une base de F^n et les f_a 's sont les coordonnées de f . Avec ses notations, les opérations de l'anneau $F[G]$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sum_{a \in G} f_a e_a) + (\sum_{a \in G} g_a e_a) = \sum_{a \in G} (f_a + g_a) e_a \\ (\sum_{a \in G} f_a e_a) (\sum_{a \in G} g_a e_a) = \sum_{a \in G} (\sum_{a=bc} f_b g_c) e_a \end{array} \right.$$

Si le corps est aussi fini, disons $F = \mathbb{F}_q$, alors l'anneau $\mathbb{F}_q[G]$ compte q^n éléments.

4. Donner les 4 anneaux à 4 éléments : $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]$ (donner leurs tables de somme et de produit). Dresser les tables de somme et de produit dans $\mathcal{W}(\mathbb{F}_q)$ (distinguer les cas où -1 est un carré ou non), et en déduire l'isomorphisme avec un des anneaux à 4 éléments.
5. Montrer que, pour tout corps fini \mathbb{F}_q , le groupe multiplicatif $(\mathbb{F}_q^\times, \cdot, 1)$ est cyclique. Indication : Sinon, il existe $n < q - 1$ tel que $x^n = 1$ pour tous les $q - 1$ éléments $x \in \mathbb{F}_q^\times$. Ainsi, tous les éléments de \mathbb{F}_q^\times seraient racine du polynôme $X^n - 1 \in \mathbb{F}_q[X]$, qui ne peut avoir que n racines — contradiction.
6. Calculer les éléments inversibles dans $W(\mathbb{F}_q)$ (distinguer $q = 1 + 4k$ et $q = 3 + 4k$).
7. *Isotropie de formes quadratiques sur \mathbb{Q}* . On va s'intéresser aux formes quadratiques régulières $f \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$; on supposera toujours que les formes sont diagonales : $f \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ avec les $a_i \in \mathbb{Q}^\times$. On veut établir un critère pour l'isotropie de f , autrement dit, pour l'existence d'une solution rationnelle non-triviale à l'équation $f(X_1, \dots, X_n) = 0$.
 - (a) Montrer qu'il suffit de considérer des $f \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ avec les $a_i \in \mathbb{Z}^\times$; on le fera désormais.
 - (b) Montrer que, pour tout nombre premier $p \geq 2$, on peut écrire

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \cong \langle b_1, \dots, b_k \rangle \perp \langle p \rangle \otimes \langle b_{k+1}, \dots, b_n \rangle$$

avec tous les b_i non-divisibles par p ; on écrira cette décomposition comme $f \cong f_1^p \perp \langle p \rangle \otimes f_2^p$.

Un célèbre théorème de Hasse-Minkowski implique que f est isotrope sur \mathbb{Q} si et seulement si f est isotrope sur \mathbb{R} et sur tous les \mathbb{Q}_p . Un tout aussi célèbre théorème de Springer implique que, pour tout nombre premier $p \geq 3$, $f \cong f_1^p \perp \langle p \rangle \otimes f_2^p$ est anisotrope sur \mathbb{Q}_p si et seulement si f_1 et f_2 sont anisotropes sur \mathbb{F}_p .

(c) Montrer que tout f de dimension $n \geq 3$ sur \mathbb{F}_p avec $p \geq 3$ est isotrope.

(d) En déduire que tout f de dimension $n \geq 5$ sur \mathbb{Q} est isotrope si et seulement si elle est isotrope sur \mathbb{R} et sur \mathbb{Q}_2 .

Un résultat de Hilbert implique que, si f est de dimension 3 et f est isotrope sur tous les \mathbb{Q}_p avec $p \geq 3$, alors f est aussi isotrope sur \mathbb{Q}_2 . Les équations suivantes ont-elles des solutions non triviales dans \mathbb{Q} ?

(e) $17x^2 + 26y^2 = z^2$

(f) $3x^2 + 15y^2 - 7z^2 = 0$

(g) $13x^2 + 26xy + 21y^2 - 11z^2 = 0$

Références

- E. Artin, Geometric Algebra, Interscience Publishers Inc., New York-London, 1957.
- J. W. S. Cassels, Rational quadratic forms, Academic Press Inc., London-New York, 1978.
- B. Kahn, Formes quadratiques sur un corps, Soc. Math. France, Paris, 2008.
- T.Y. Lam, Introduction to Quadratic Forms over Fields, Amer. Math. Soc., Providence, 2005.
- D. Perrin, Cours d'Algèbre, Ellipses, Paris, 1996.
- W. Scharlau, Quadratic and Hermitian forms, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York and Tokyo, 1985.
- J.-P. Serre, A Course in Arithmetic, Springer-Verlag, New York, 1973.