Mathématiques 9 – Algèbre Linéaire (Applications) en L2 Informatique à l'ULCO

Examen du 17 janvier 2024 de 9h à 11h

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrices.

6

1. Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ -x + y = 0 \\ x + z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

   2 (a) Montrer qu'il n'y a pas de solution exacte.

   4 (b) Calculer une solution approchée au sens des moindres carrés.

8

2. 2 (a) Définir 'matrice symétrique' et 'matrice orthogonale'.

   1 (b) Démontrer qu'une matrice diagonalisable par une matrice orthogonale est nécessairement symétrique.

   4 (c) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$ par une matrice orthogonale.

   1 (d) Pourquoi la diagonalisation d'une matrice peut être utile?

6

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   2 (a) Dessiner le graphe dont A est la matrice d'adjacence.

   4 (b) Ce graphe, est-il primitif? Est-il régulier? Justifier les réponses!

fin

20.

("irréductible".)

1. $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ -x+y=0 \\ x+z=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) $eq(2) \Rightarrow x=y \Rightarrow \left[eq(3) \Rightarrow \underbrace{y+z=2}\right]$

Contrad avec eq.(4) !

(b) " $A^tAX = A^tB$ "

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 5 & -2 \\ 5 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 5 & -2 & 5 \\ 5 & 6 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 11 & 5 & -2 & 5 \\ 5 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 29/2 & 21/2 \\ 0 & 7/2 & 13/2 & 9/2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -29 & -21 \\ 0 & 7 & 13 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -29 & -21 \\ 0 & 0 & 216 & 156 \end{array}\right)$$

donc $\begin{cases} 2x+y-3z=-1 \\ y-29z=-21 \\ 216z=156 \end{cases}$

$13+7\cdot 29$
$=13+140+63$
$=216$

$9+7\cdot 21$
$=9+140+7$
$=156$

d'où
$$\begin{cases} z = \dfrac{156}{216} = \dfrac{78}{108} = \dfrac{39}{54} \left(= \dfrac{13}{18}\right) \\[2ex] y = -21 + 29 \cdot \dfrac{13}{18} = \dfrac{-21 \cdot 18 + 29 \cdot 13}{18} = \dfrac{-1}{18} \\[2ex] x = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \dfrac{1}{18} + 3 \cdot \dfrac{13}{18}\right) = \dfrac{11}{18} \end{cases}$$

donc, finalement, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/18 \\ -1/18 \\ 13/18 \end{pmatrix}$

est (unique) sol^n au sens des moindres carrés

---

2. (a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sym si $A^t = A$
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orth si $A^{-1} = A^t$.

(b) si $A = BDB^t$ (et $B^{-1} = B^t$)

alors $A^t = (BDB^t)^t = (B^t)^t D^t B^t = BDB^t = A$.

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & +11 \end{pmatrix}$

poly caract : $\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -8 \\ -8 & +11-\lambda \end{pmatrix} = 0$

ssi $(-1-\lambda)(+11-\lambda) - 64 = 0$

ssi $\lambda^2 - 10\lambda - 75 = 0$

Valeurs propres :

$$\lambda = \frac{+10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-75)}}{2} = \begin{cases} -5 \\ +15 \end{cases}$$

espaces propres :

$$E_{-5} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} +4 & -8 \\ -8 & +16 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

GS

$$E_{+15} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

diagonalisation :

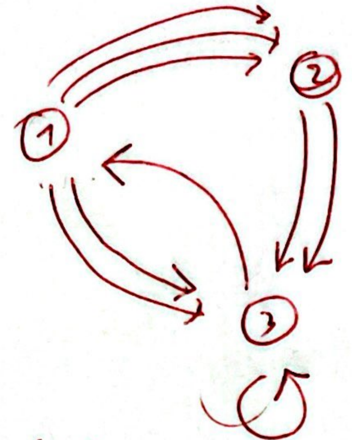
$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{B^t}_{B^t}$$

(d) Utile pour calculer puissances :

$$A^n = B \cdot D^n \cdot B^t.$$

Utile pour calculer SVD.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



(irréductible)

$\Updownarrow$

<u>régulier</u> : oui, car on peut aller de tout sommet à tout sommet ! aussi, dans $I + A + A^2 + A^3$ tout élt est $\neq 0$.

<u>primitif</u> : oui, car il existe <u>un chemin de $l=4$</u> de tout sommet à tout sommet.

aussi, $$A^4 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 6 & 11 \\ 24 & 6 & 9 \\ 40 & 22 & 23 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{chaque élt est } \neq 0 \,!$$

[et, par ailleurs, primitif $\Longrightarrow$ régulier.]