Mathématiques 8 – Algèbre Linéaire en L2 Informatique à l'ULCO

Examen du 9 novembre 2023 de 10h30 à 12h30

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrices.

7 1. 2 (a) Echelonner la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 (b) En déduire une factorisation $PA = LU$.

1 (c) Donner le rang et la nullité de A; justifier les réponses.

1 (d) Donner une matrice $\overline{A}$ à colonnes libres, ayant la même image que A.

2 (e) Trouver une matrice B telle que $\overline{A} \cdot B = A$.

4 2. 1 (a) Définir *matrice inversible.*

2 (b) Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 (c) La matrice A, est-elle inversible? Justifier la réponse.

4 3. Calculer le polynôme d'interpolation des points $(1,4), (2,3), (3,0)$.

5 4. 1 (a) Définir 'image' et 'noyau' d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1 (b) Expliquer l'utilité de ces deux notions pour la résolution d'un système $AX = B$.

Soient maintenant les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1 (c) Déterminer si P est un élément de l'image de A.

2 (d) Donner une matrice M à colonnes libres dont l'image est le noyau de A.

——— *fin* ———

1. (a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 - L_1]{L_2 := L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 := L_3 - L_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) $P = I$

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$L = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) rang(A) = # pivots = 3

null(A) = # col − rang = 4 − 3 = 1

(d) $$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) $$\underset{3\times 3}{\overline{A}} \cdot \underset{3\times 4}{B} = \underset{3\times 4}{A} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \left(B_1 \middle| B_2 \middle| B_3 \middle| B_4 \right) =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Évidemment on prend

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour B_3 on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

au lieu on observe dans $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

que $A'_3 = \frac{1}{2} A'_2 + \frac{1}{2} A'_1$

et donc aussi (cf. cours)

$$A_3 = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 + 0 \, A_4$$

d'où

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>résultat</u> : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

—

2. (a) A inversible si $\begin{cases} \text{carrée } (n \times n) \\ \text{il existe } A^{-1} \text{ t.q.} \\ AA^{-1} = I = A^{-1} \cdot A . \end{cases}$

(b)
$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \left[2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= 4 \cdot \left[(4 - (-2)) - (12 - (-1)) \right]$$

$$= 4 \cdot (6 - 13) = -28$$

(c) A est inversible car $\det(A) \neq 0$.

3. $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,0)$

3 points, donc interpolation par

$y = ax^2 + bx + c$ (degré 2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 0 & -6 & -8 & -36 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

donc
$$\begin{cases} c = 3 \\ -2b - 3c = -13 \Rightarrow b = 2 \\ a + b + c = 4 \Rightarrow a = -1. \end{cases}$$

donc, $\boxed{y = -1x^2 + 2x + 3}$

est le polynôme d'interpolation.

—

4. (a) $\mathrm{Im}(A) = \{ AX \mid X \in \mathbb{R}^{m\times 1} \}$

$$\mathrm{Ker}(A) = \{ X \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid AX = 0 \}.$$

(b) $AX = B$ admet <u>au moins</u> une solᵒ ssi $B \in \mathrm{Im}(A)$

<u>au plus</u> une solᵒ ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) $P \in \mathrm{Im}(A)$ ssi $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 8 & 5 \end{array}\right)$

il existe une solution :

$$z = \alpha \in \mathbb{R},$$

$$10y + 8z = 5 \Rightarrow y = \frac{5 - 8\alpha}{10}$$

$$-x + 2y + 3z = 2 \Rightarrow x = -2 + 2\left(\frac{5-8\alpha}{10}\right) + 3\alpha$$

donc, oui, $P \in \mathrm{Im}(A)$.

(pe $\alpha = 0$ donne $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$)

(d) $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

donc $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 0 \end{array}\right)$

Solution : $\begin{cases} z = \alpha \in \mathbb{R} \\ 10y + 8z = 0 \implies y = -\frac{4}{5}\alpha \\ -x + 2y + 3z = 0 \implies x = 2\left(-\frac{4\alpha}{5}\right) + 3\alpha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \cdot\ \alpha \end{cases}$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \cdot \alpha \\ -4/5 \cdot \alpha \\ 1 \cdot \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 7/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où $M = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Im}(M)$
