Calcul Matriciel en L2 Informatique à l'ULCO
Exercices avec Octave

Isar Stubbe

version de 5-11-2024

Table de matières.

1. Introduction au logiciel

Exercice 1. Pour le calcul matriciel sur ordinateur, nous utiliserons un logiciel libre adapté: Octave (`www.octave.org`). Lorsqu'on démarre Octave (en mode GUI), la Command Window s'affiche et on peut l'utiliser comme une calculatrice pour le calcul matriciel. Executer ainsi:

```
>> disp('Hello World!')          % ceci est un commentaire
>> 1+1                           % on peut calculer
>> A=[1,2,3,4;5,6,7,8;9,10,11,12] % une matrice
>> A(2,3)                        % élément à la position (2,3) dans A
>> A(1,:)                        % première ligne de A
>> A(:,2)                        % deuxième colonne de A
>> A'                            % matrice transposée
>> B=[8,7;6,5;4,3;2,1]           % une autre matrice
>> B(1:2,1:2)                    % construction d'une sous-matrice
>> D=[A(:,1:2),B(1:3,1)]         % assemblage de matrices
>> C=A*B                         % le produit matriciel
>> C=A*B;                        % cacher le résultat avec le ";"
>> [m,n]=size(A)                 % le genre d'une matrice
>> F=ones(5,3)                   % matrice remplie de "1"
>> G=zeros(10,2)                 % matrice nulle
>> L=eye(3)                      % matrice unité
>> K=[4:0.1:8]                   % aller de 4 à 8 par pas de 0.1
>> K=linspace(4,8,41)            % aller de 4 à 8 en 41 pas
```

Au lieu de travailler dans la Command Window, il est bien plus utile de faire un script de toutes les commandes que l'on souhaite executer: ainsi on peut sauvegarder (dans un fichier avec extension

".m") et modifier le script au besoin. Cela se fait facilement dans l'Editor intégré, qui permet aussi de lancer le script avec le bouton Run.

Copier le script suivant dans un fichier `exo1.m` pour calculer une factorisation $PA = LU$ avec la fonction `lu()` intégrée et resoudre le système linéaire $AX = B$ avec la fonction `linsolve()` intégrée:

```
clear all       % effacer toutes les variables précédentes
close all       % fermer toutes les fenêtres précédentes
clc             % effacer l'ecran du terminal
A=[1,2,3,4;5,6,7,8;9,10,11,12]
[L,U,P]=lu(A)
inv(P)*L*U      % pour vérifier que c'est bien A
B=[13;14;15]
X=linsolve(A,B)
A*X             % pour vérifier que c'est bien B
```

Noter la factorisation $PA = LU$ et la solution au système linéaire $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Parmis les structures de contrôle et boucles il y a:

```
if (condition)          for i=1:n               while (condition)
% instructions         % instructions          % instructions
else                    endfor                  endwhile
% instructions
endif
```

Les conditions et opérateurs logiques usuelles sont:

```
(i==j)  % i égal à j                    P & Q  % P et Q
(i<=j)  % i plus petit que j            P | Q  % P ou Q
(i>=j)  % i plus grand que j            ~ P    % non P
```

Par ailleurs, on peut changer le format d'affichage des nombres; essayer cela avec:

```
>> format bank
>> pi
>> pi^100
```

```
>> format short
>> pi^100
>> format long
>> pi^100
```

Ecrire un script `exo2.m` pour calculer:

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{3^k - 2k}{k+2} = \text{\_\_\_\_\_}\,.$$

Exercice 3. Le logiciel Octave permet la création de nouvelles fonctions (en outre des fonctions déjà définies comme `lu()`, `rank()`, `det()`, etc.). Pour cela, on crée (dans Editor) un fichier (dans le "current working directory", le répertoire de travail), toujours avec extension `.m`, *dont le nom est égal au nom de la fonction que l'on souhaite créer*, et dont le contenu suit le format suivant:

```
function [y1,y2,...]=ma_fonction(x1,x2,...)
% instructions
end
```

(Donc, les lignes ci-dessus doivent être sauvegardées dans un fichier `ma_fonction.m`, et ce fichier doit se trouver dans le répertoire de travail, pour qu'Octave reconnaisse cette fonction!) Une fonction peut avoir plusieurs entrées et plusieurs sorties, qui peuvent être des nombres et/ou des matrices. Une fonction peut en appeler d'autres; il suffit que toutes les fonctions (tous les fichiers `.m`) se trouvent dans le répertoire de travail.

Ecrire une fonction `H=matricehilbert(n)` pour construire la *matrice de Hilbert* $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & \vdots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1/n & \dots & & & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

Calculer avec les fonctions intégrées `det()` et `rank()`:

$\det(H_{10}) =$ _____ et $\operatorname{rang}(H_{20}) =$ _____

2. Matrice d'adjacence

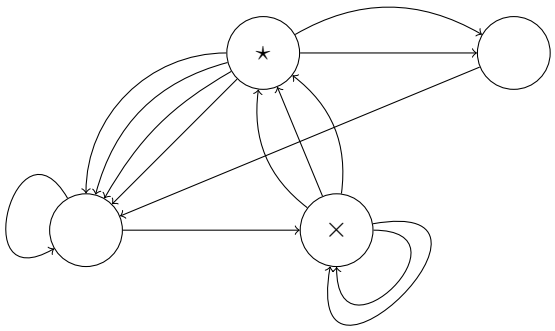
Exercice 4. Un *multigraphe dirigé* est la donnée d'un nombre fini de sommets reliés par un nombre fini de flèches. Pour des raisons pratiques, on écarte le graphe avec 0 sommets. Numérotant les sommets du graphe de 1 à n, la *matrice d'adjacence* $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ du graphe est définie par[1]

$$a_{ij} = \text{ nombre de flèches du sommet } j \text{ au sommet } i.$$

[1] Attention! Il y a *deux conventions* pour définir la matrice d'adjacence d'un graphe dirigé. Dans ce cours, nous avons adopté la *convention usuelle en sciences mathématiques*: a_{ij} correspond au nombre de flèches de j à i. En *sciences économiques et sociales*, où les graphes dirigés jouent aussi un rôle important, on note souvent a_{ij} pour le nombre de flèches de i à j ("dans le sens opposé", donc). Au final, la matrice d'adjacence "des mathématiciens" est la transposée de la matrice "des économistes".

Il n'est pas difficile de montrer[2] que l'élément en position (i, j) dans la matrice A^k (la puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$) donne le nombre de *chemins* de longueur k du sommet j au sommet i.

Soit maintenant le multigraphe dirigé



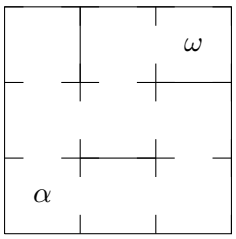
La matrice d'adjacence est

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Faire un script `exo4.m` pour calculer:

Le nombre de chemins de longueur 7 du sommet '×' au sommet '⋆' est _____ .
Le nombre de chemins de longueur au plus 15 du sommet '×' au sommet '⋆' est _____ .
Le nombre de chemins de longueur entre 117 et 213 du sommet '×' au sommet '⋆' est _____ .

Exercice 5. Dans le labyrinthe suivant, partant de la case α, on se déplace toujours à une case voisine, et une fois qu'on est à la case ω, on y reste.



En faisant au plus 23 pas, le nombre de chemins de α à ω est: _____ .

Exercice 6. Un multigraphe dirigé est dit *irréductible* (aussi *fortement connexe*) si, pour toute paire de sommets, il existe au moins un chemin de l'un à l'autre.

[2]Faisons la démonstration pour A^2. L'élément en position (i, j) dans $A^2 = A \cdot A$ est, par simple produit matriciel,

$$\sum_t a_{it} a_{tj}.$$

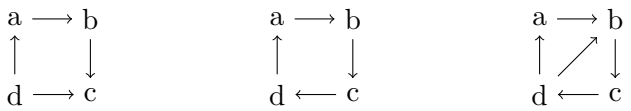
Dans cette formule, chaque terme $a_{it}a_{tj}$ est le produit du nombre de flèches $j \to t$ avec le nombre de flèches $t \to i$: c'est donc le nombre total de chemins $j \to t \to i$. Lorsqu'on fait la somme sur tous les sommets t (on fixe donc le sommet de départ j et le sommet d'arrivée i, mais on laisse varier le sommet intermédiaire t), on obtient en effet le nombre de chemins de longueur 2 de j à i. (Pour A^k on peut procéder par induction sur k.)

(a) Dessiner quelques exemples de graphes irréductibles et de graphes non-irréductibles.
(b) Montrer que, s'il existe un chemin entre deux sommets dans un graphe à n sommets, alors il existe toujours un chemin de longueur au plus $n-1$.
(c) Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe donné. Montrer que ce graphe est irréductible si et seulement si tout élément de $A^0 + A^1 + ... + A^{n-1}$ est non-nul.

Exercice 7. Un multigraphe dirigé est dit *primitif* s'il existe un nombre $k > 0$ tel que, pour toute paire de sommets, il existe un chemin de longueur k de l'un à l'autre.
(a) Dessiner quelques exemples de graphes primitifs et de graphes non-primitifs.
(b) Montrer qu'un graphe, de matrice d'adjacence A, est primitif si et seulement s'il existe $k > 0$ tel que tout élément de A^k est non-nul.
(c) Montrer qu'un graphe primitif est toujours irréductible, mais que l'implication réciproque est fausse.

Plus généralement, soit A une matrice carrée à éléments réels positifs. On dit que A est *irréductible* si tout élément de $A^0 + A^1 + ... + A^{n-1}$ est non-nul; et on dit que A est *primitive* s'il existe $k > 0$ tel que chaque élément de A^k est non-nul. Ainsi on peut dire qu'un graphe est irréductible (primitif) si et seulement si sa matrice d'adjacence est irréductible (primitive).

Exercice 8. Les graphes suivants, sont-ils irréductibles? primitifs?



3. Graphes de fonctions et interpolation

Exercice 9. Avec Octave on peut faire des graphes de fonctions réelles:

```
>> x1=linspace(-10,10,200); % une liste d'abscisses
>> y1=sin(x1);              % le calcul des ordonnées
>> plot(x1,y1)              % le graphe
>> axis equal               % pour forcer un repère orthonormé
```

On peut noter l'importance de choisir "suffisamment" d'abscisses...

```
>> x2=linspace(-10,10,10);
>> y2=sin(x2);
>> plot(x2,y2)
>> axis equal
```

Pour marquer des points particuliers on peut utiliser:

```
>> x3=[-10, -8, -3, 6, 8];  % abscisses des points
>> y3=[0.2, 0.5, 1, -1, 0]; % ordonnées des points
>> plot(x3,y3,'o')          % indiquer les couples (x3,y3) par un petit rond
>> axis equal
```

Et il y a moyen de mettre plusieurs graphes dans un même repère:

```
>> plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,'o')
>> axis equal
```

Un polynôme comme par exemple $P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 2x + 4$ est encodé par la matrice ligne de ses coefficients, le premier élément étant le coefficient du terme de plus haut degré:

```
>> P=[3, 0, 5, -2, 4];
```

Pour calculer la valeur de ce polynôme en $a = 8$ on fait:

```
>> a=8;
>> b=polyval(P,a)
```

Etant donné une matrice ligne d'abscisses, on peut également calculer une matrice ligne de valeurs du polynôme:

```
>> x5=linspace(-3,3,60);
>> y5=polyval(P,x5);
>> plot(x5,y5)
>> axis equal
```

Finalement, on peut mettre plusieurs repères dans une même figure: la commande `subplot(m,n,k)` crée un repère à la k-ième place dans une figure contenant $m \times n$ repères. Copier (sous le nom `exo9.m`) toutes les définitions nécessaires données ci-dessus, puis ajouter les commandes ci-dessous, et tester le script obtenu:

```
figure
subplot(2,2,1)
plot(x1,y1)
axis equal
subplot(2,2,2)
plot(x2,y2)
axis equal
subplot(2,2,3)
plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,'o')
axis equal
subplot(2,2,4)
plot(x4,y4)
axis equal
```

Exercice 10. Nous avons vu au CM/TD comment, étant donné $n+1$ points de $\mathbb{R}^2$ notés (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n), avec les x_i tous distincts, on peut calculer l'unique *polynôme d'interpolation* de degré n, soit $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, dont le graphe contient tous les (x_i, y_i).

Créer un script (nommé `exo10.m`) pour afficher, dans un seul repère, les points $(-3, 4)$, $(-2, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, -1)$ et $(3, 7)$, ainsi que le graphe de la fonction polynomiale d'interpolation qu'ils déterminent (et qu'il faudra donc calculer).

On a $f(x) =$ _____ $x^6 +$ _____ $x^5 +$ _____ $x^4 +$ _____

_____ $x^3 +$ _____ $x^2 +$ _____ $x +$ _____ .

Sa valeur en $x = 1.7$ est $y =$ _____ .

4. Moindres carrés et régression

Exercice 11. Nous avons vu au CM/TD comment on fait de la *régression polynomiale*: on peut déterminer un unique polynôme de degré k, soit $f(x) = a_k x^x + ... + a_1 x + a_0$, dont le graphe passe "le plus près possible" de n points (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) donnés de $\mathbb{R}^2$. Etant donné des matrices lignes `x=[x1, ... ,xn]` et `y=[y1, ... , yn]`, créer une fonction `P=regresspoly(x,y,k)` qui calcule les coefficients `P=[a_k,...,a_0]` du polynôme de régression $f(x) = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$ ainsi déterminé. Utiliser ensuite cette fonction dans le script `exo11.m` suivant:

```
x=[1,2,3,4,5,6,7,8];
y=100*sin(x)+(1/10)*exp(x/100);
P=regresspoly(x,y,4);
x1=linspace(0,9,100);
y1=polyval(P,x1);
plot(x,y,'o',x1,y1)
```

Le polynôme en question est $f(x) =$ _____
et sa valeur en $x = 7$ est _____ .

Exercice 12. Par le lien

`http://www-lmpa.univ-littoral.fr/~stubbe/AL/Esp_vie_FR.txt`

on trouvera les données officielles d'Eurostat (`https://ec.europa.eu/eurostat`) concernant l'espérance de vie de nouveaux né(e)s en France depuis 2012. Développer une stratégie et faire les calculs (dans un script `exo12.m`) pour estimer:

L'espérance de vie d'une fille née en France en 2030: _____ .
L'espérance de vie d'un garçon né en France en 2030: _____ .

Exercice 13. Par diverses sources fiables[3] on peut obtenir diverses données concernant la pandémie de COVID-19 des trois derniers années. Par le lien

`http://www-lmpa.univ-littoral.fr/~stubbe/AL/covid.csv`

on pourra télécharger un fichier CSV ("comma-separated values") contenant, pour les 180 jours à partir du 01/05/2020, le nombre de nouveaux cas positifs au COVID-19 par jour en France métropolitaine: c'était la "deuxième vague" de la pandémie. Octave peut lire ce fichier par la commande

```
>> A=csvread('covid.csv');
```

Ces données étant maintenant les éléments d'une matrice A, on peut faire un plot:

```
>> x=[1:1:180];
>> y=A;
>> plot(x,y);
```

[3]Par exemple `https://ec.europa.eu/eurostat`, `https://www.data.gouv.fr`, `https://ourworldindata.org`.

Par l'épidémiologie, on sait qu'une telle courbe de cas positifs lors d'une pandémie est le graphe d'une fonction exponentielle. Dans la suite, nous allons supposer qu'il s'agit ici d'une fonction $f(x) = \exp(g(x))$, où $g(x)$ est un polynôme de degré 2. Autrement dit, nous allons supposer que la donnée `(x,log(y))` peut être approché par le graphe d'un polynôme de degré 2.

Ecrire un script `exo13.m` pour calculer *par régression polynomiale* la fonction $g(x)$ (et donc par exponentiation la fonction $f(x)$), puis faire un plot contenant à la fois les données et le graphe de $f(x)$. Calculer, à l'aide de $f(x)$, le nombre de cas postifs au COVID-19 qu'aurait connu la France en un an si on n'avait pas pris de mesures pour freiner l'épidémie. Calculer, toujours à l'aide de $f(x)$, le nombre de jours qu'il aurait fallu pour contaminer tous les français (environ 67 million de personnes).

La fonction exponentielle est

$$f(x) = \exp(\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\ )$$

Le nombre de cas positifs en un an aurait été $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

Il aurait fallu $\underline{\qquad\qquad\qquad}$ jours pour contaminer tous les français.

5. Procédé de Gram-Schmidt

Exercice 14. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ une matrice (que l'on supposera de rang complet) et $P \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ une colonne quelconque. Au CM/TD nous avons défini la *projection orthogonale* $P' = \mathrm{proj}_A(P)$ de $P \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sur l'image de $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Ecrire une fonction `Pprime=proj(A,P)` pour effectuer ce calcul.

La projection orthogonale de $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur l'image de $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 8 & 7 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, au CM/TD nous avons aussi défini et calculé la *norme* $\|P\|$ d'une colonne $P \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Ecrire une fonction `N=norme(P)` pour effectuer ce calcul.

La norme de $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\underline{\qquad}$.

Exercice 15. Le *procédé classique de Gram-Schmidt (Classical Gram-Schmidt, CGS)* permet de transformer une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ de rang k en une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ayant la même image que A mais dont les colonnes forment une suite orthonormale. Comme nous avons vu au CM/TD, si on note $A_1, ..., A_k$ les colonnes de A, on calcule d'abord récursivement

- pour tout i: $B_i = A_i - \sum_{k<i} \mathrm{proj}_{B_k}(A_i)$,

et puis on pose

- pour tout i: $Q_i = \|B_i\|^{-1} B_i$.

Ecrire une fonction `Q=classGS(A)` qui implémente ce procédé, et tester votre fonction avec les commandes suivantes:

```
>> A=[1,2;3,4;5,6]
>> Q=classGS(A)
>> Q'*Q
>> B=randi([-10 10],8,4)
>> Q=classGS(B)
>> Q'*Q
```

Exercice 16. Soit la matrice

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon > 0$; le procédé de Gram-Schmidt s'applique donc à A_ε. Ecrire un script, sauvegardé dans un fichier `exo16.m`, dans lequel, pour chaque $\varepsilon \in \{0.1, 0.01, ..., 10^{-10}\}$, on calcule avec la fonction `classGS` la matrice Q correspondant à A_ε, puis on affiche le produit scalaire de la deuxième et la troisième colonne de Q.

ε	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
$Q_2^t Q_3$						

Constat?

Explication: Le procédé classique de Gram-Schmidt pose donc quelques problèmes quant à son implémentation sur ordinateur, essentiellement dû aux erreurs d'arrondi; on dit que le procédé n'est pas *numériquement stable*.

Exercice 17. Le *procédé modifié de Gram-Schmidt (Modified Gram-Schmidt, MGS)* est une variante du procédé classique de Gram-Schmidt, qui résout le problème de stabilité observé ci-dessus. Explicitement, pour les colonnes $A_1, ..., A_k$ d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ de rang k:

- on pose $B_1 = A_1$,
- pour $i \geq 2$ on a l'itération suivante pour calculer B_i:

$$\begin{aligned} B_i^{(1)} &= A_i \\ B_i^{(2)} &= B_i^{(1)} - \mathrm{proj}_{B_1}(B_i^{(1)}) \\ B_i^{(3)} &= B_i^{(2)} - \mathrm{proj}_{B_2}(B_i^{(2)}) \\ &\vdots \\ B_i^{(j+1)} &= B_i^{(j)} - \mathrm{proj}_{B_j}(B_i^{(j)}) \\ &\vdots \\ B_i := B_i^{(i)} &= B_i^{(i-1)} - \mathrm{proj}_{B_{i-1}}(B_i^{(i-1)}) \end{aligned}$$

et ensuite on normalise pour obtenir le résultat:

- pour $i \geq 1$: $Q_i = \|B_i\|^{-1} B_i$.

Ecrire une fonction `Q=modifGS(A)` pour implémenter cet algoritme, puis reprendre l'exercice précédent mais avec la fonction `modifGS`, dans un script appelé `exo17.m`.

ε	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
$Q_2^tQ_3$						

Constat?

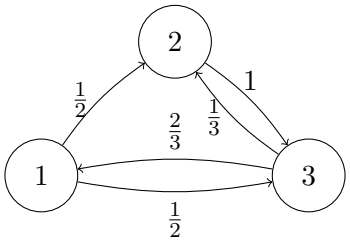
Exercice 18. Utiliser le MGS pour calculer une factorisation QR de la matrice suivante à deux décimaux près (donc en `format bank`):

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & -4 & 7 \\ -8 & 4 & -3 & 6 \\ 8 & -7 & 4 & 2 \\ -6 & -10 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

6. Vecteur stationnaire

Exercice 19. On appelle $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ un *vecteur stochastique* si tous ses éléments sont positifs et leur somme vaut 1. Une *matrice stochastique* (aussi appelée *matrice de Markov*) est une matrice carrée dont chaque colonne est un vecteur stochastique. A toute matrice stochastique $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on peut associer un graphe pondéré (et *vice versa*): ce graphe a n sommets, et de tout sommet j à tout sommet i une flèche "pondérée" par le poids m_{ij}. Un tel graphe visualise un *système probabiliste discret* (aussi appelé *chaîne de Markov*): chaque sommet est un état du système, chaque flèche indique la probabilité de transition d'un état à un autre.

On considère maintenant le jeu suivant. On choisit une de trois positions initiales, et ensuite le hasard décide quel mouvement on fait, selon les probabilités données dans le graphe suivant:



La matrice stochastique associée au graphe est $M = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

Calculer:

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}, \quad M^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}, \quad M^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}.$$

Que représentent ces résultats?

Calculer:

$$M^{100} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}, \quad M^{100} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}, \quad M^{100} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}.$$

Constat?

Calculer aussi:

$$M \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad M^3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad M^5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}.$$

Constat?

Exercice 20. On dit qu'une colonne stochastique $S \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ est un *vecteur stationnaire* d'une matrice stochastique $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si $MS = S$; autrement dit, il s'agit d'un *vecteur propre stochastique pour la valeur propre* $\lambda = 1$. Le *Théorème de Perron-Frobenius*[4] assure que toute matrice stochastique irréductible $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a un unique vecteur stationnaire $S = (s_1, ..., s_n)$. Ce vecteur S est donc la *seule* solution au système linéaire

$$\begin{cases} M \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\ s_1 + ... + s_n &= 1 \end{cases}$$

[4]D'après les mathématiciens allemands Oskar Perron (1880-1975) et Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917). Pour l'énoncé complet du théorème général, consulter une bonne référence. Ici nous n'avons besoin que du cas particulier des matrices stochastiques, où l'énoncé se simplifie considérablement.

qui s'écrite de manière équivalente comme

$$\left(\begin{array}{c} M - I_n \\ \hline 1 \quad \dots \quad 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coder une fonction `S=vectstat(M)` pour effectuer ce calcul. Reprendre ensuite l'Exercice 19: calculer le vecteur stationnaire de la matrice stochastique en question, et comparer le résultat avec les calculs déjà faits.

Constat?

C'est encore le *Théorème de Perron-Frobenius* qui explique ce résultat: pour une matrice stochastique primitive M, on peut approcher son vecteur stationnaire S par

$$S \approx M^k \cdot U \quad \text{avec } U \text{ un distribution quelconque et } k \text{ "assez grand".}$$

Ce calcul s'appelle la *Méthode de la Puissance Itérée ('Power Method')*. Pour la plus grande efficacité on prend souvent la distribution uniforme pour U.

Exercice 21. Pour leurs vols européens, une compagnie aérienne propose deux formules: un billet moins cher mais une seule pièce de bagage à main est autorisée, puis un billet plus cher mais avec la possibilité de prendre jusque 35kg de bagage. Peu après le lancement de ces deux formules, on a constaté que 40% des voyageurs ayant pris la formule la moins chère en sont contents et reprennent un tel billet pour leur prochain voyage; mais 60% change donc de formule. D'autre part, parmi ceux qui ont pris la formule avec plus de bagage, 80% en sont contents alors que 20% changent de formule.

Dessiner le graphe mettant en situation ces données:

Donner la matrice stochastique $M = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

et son vecteur stationnaire $S = \texttt{vectstat(M)} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

Comment cette information peut-elle être utile pour la compagnie aérienne?

7. Matrice de Google

Exercice 22. Créer une fonction `M=stoch(A)` qui transforme une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ d'éléments positifs en une matrice stochastique en divisant chaque colonne par la somme de ses éléments; si une colonne de A est nulle, elle sera remplacée par la colonne $(1/n, ..., 1/n)$. Tester la fonction avec les commandes suivantes:

```
>> A=randi([1,99],10,10); % une matrice aléatoire 10x10 d'entiers entre 1 et 99
>> M=stoch(A);
>> k=randi(10);           % un entier aléatore entre 1 et 10
>> sum(M(:,k))
```

Si un multigraph dirigé est donné (p.e. celui de Exercice 4), et A est sa matrice d'adjacence, comment interpréter alors la matrice stochastique $M = \text{stoch}(A)$?

_____

_____

Exercice 23. *Qui est le meilleur de la classe?* Voici un tableau avec les résultats des examens (sur 20):

	Math	Phys	Chim	Info	Econ
Anne	14	12	15	11	9
Blaise	9	16	11	14	11
Christelle	17	19	15	16	11
Diego	13	9	12	12	15

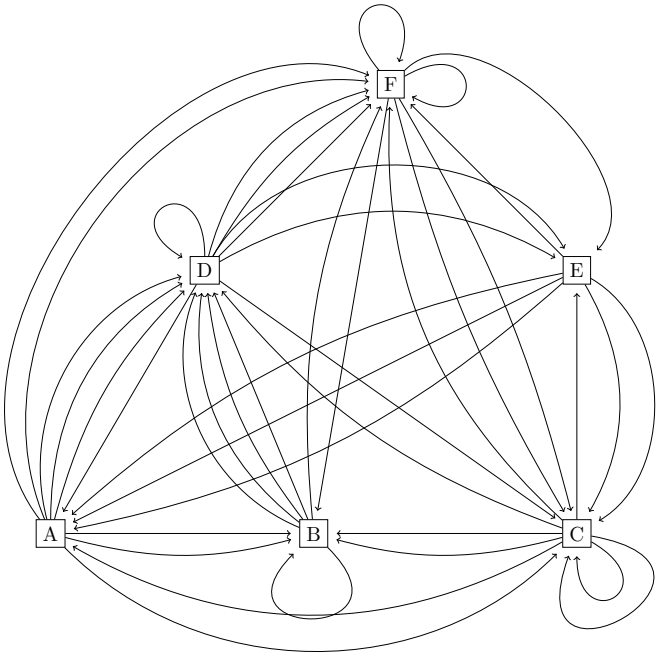
Si on calcule les moyennes des notes, on obtient le classement suivant:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

Si on fait un multigraphe dont les sommets sont les étudiants, et dans lequel on ajoute une flèche de x à y pour chaque examen que x a fait mieux que y, alors selon le vecteur stationnaire de la matrice stochastique de ce multigraphe, on obtient le classement suivant:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

Exercice 24. On considère le multigraphe suivant:



Numéroter ses sommets par ordre alphabétique et donner la matrice de multi-adjacence A, la matrice stochastique M, puis le vecteur stationnaire S de M:

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$M = \texttt{stoch(A)} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad S = \texttt{vectstat(M)} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Désormais on interprète ce multigraphe comme un réseau de pages web liées entre elles. On s'imagine une personne qui visite une première page web (choisie au hasard), puis suit un des hyperliens de cette

page vers une autre page, etc. Si on répète ce procédé *ad infinitum*, alors la page la plus souvent visitée (donc "la page la plus importante") est donnée par le score le plus élevé dans le vecteur stationnaire du graphe.

Il y a, pourtant, un double problème avec ce modèle: (1) la matrice stochastique M n'admet peut-être pas un (unique) vecteur stationnaire, et (2) c'est un peu simple de penser que tout surfeur sur internet suit éternellement les hyperliens qui lui sont présentés. Une légère modification de la matrice stochastique du graphe résout ces deux problèmes—c'est l'invention de Larry Page, cofondateur de Google en 1998.

On introduit ainsi la *matrice de Google* du graphe:

$$G = \alpha M + (1-\alpha)\begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

où M est la matrice stochastique, n est le nombre total de pages (ici $n = 6$), et $\alpha \in [0,1]$ est un paramètre. D'un côté, ce paramètre α exprime la "fidélité" du surfeur: il y a une probabilité α que le visiteur suit les hyperliens proposés, et une probabilité $1-\alpha$ qu'il choisira au hasard une nouvelle page de départ. De l'autre côté, cette nouvelle matrice stochastique est *primitive* pour tout $\alpha \neq 1$, et cela implique que l'on peut calculer son unique vecteur stationnaire efficacement par la Méthode des Puissances Itérées. Coder une fonction `G=google(M,alpha)` pour effectuer ce calcul.

Pour $\alpha = 0.85$, calculer:

$G =$ `google(M,0.85)` $=$ $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ et $S =$ `vectstat(G)` $=$ $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

Selon ce modèle, quelle est donc le classement des pages web de "la plus importante" à "la moins importante"?

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

C'est exactement avec un tel procédé que Google classe les pages web (lors d'une recherche sur internet p.e.); cet algorithme est désormais connu comme le 'PageRank' algorithme. On estime que la matrice que Google utilise, est de taille $3 \cdot 10^{10} \times 3 \cdot 10^{10}$; pour le calcul de son vecteur stationnaire, Google utilise la Méthode de la Puissance Itérée, et on estime que Google fait entre 50 et 100 itérations. On

pense que la valeur de α est autour de 0.85 (mais c'est un secret industriel). Le calcul prend plusieurs jours.

Exercice 25. Montrer les assertions suivantes.

(a) Si M est une matrice stochastique et S est une colonne stochastique, alors aussi la colonne $M \cdot S$ est stochastique (lorsque le produit matriciel est bien défini).

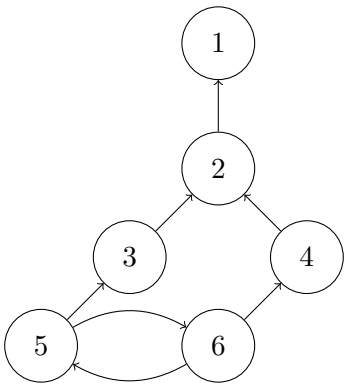
(b) Si M et N sont deux matrices stochastiques de même taille, alors pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$ aussi $K = \alpha \cdot M + (1-\alpha) \cdot N$ est stochastique. On dit que K est une *combinaison convexe* de M et N.

(c) Pour tout $n > 0$, la matrice $n \times n$ dont chaque élément vaut n^{-1} est stochastique. On va la noter U_n dans la suite.

(d) Soit M une matrice stochastique carrée, de taille $n \times n$. Pour tout $0 < \alpha < 1$, la matrice $\alpha \cdot M + (1-\alpha) \cdot U_n$ est stochastique et à éléments strictement positifs; il suit donc que cette combinaison convexe est une matrice primitive.

(e) Conclure que, pour toute matrice stochastique M et tout $0 < \alpha < 1$, la matrice de Google $G = \alpha M + (1-\alpha)U_n$ est stochastique et primitive; cela implique que l'on peut calculer son vecteur stationnaire efficacement par la Méthode des Puissances Itérées.

Exercice 26. Soit le graphe



Selon le vecteur stationnaire de la matrice de Google du graphe, prenant $\alpha = 0.6$, le classement des sommets de ce graphe est le suivant:

Selon le vecteur stationnaire de la matrice de Google du graphe, prenant $\alpha = 0.7$, le classement des sommets de ce graphe est le suivant:

Morale?

8. Traitement d'image

Exercice 27. Nous avons vu au CM/TD que, si $A = USV^t$ est la décomposition par ses valeurs singulières (notées $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_r > 0$) d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang r, alors pour tout $k \leq r$ la matrice

$$A^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i U_i V_i^t$$

est la meilleure approximation de A par une matrice de rang k (où V_i, resp. U_i, est la i-ième colonne de V, resp. U). Pour calculer la décomposition par valeurs singulières de A, on pourra utiliser la fonction `[U,S,V]=svd(A)`. Ecrire une fonction `X=SVDapprox(A,k)` pour calculer la meilleure approximation de A par une matrice de rang k. Soit H la matrice de Hilbert 4×4 (cf. Exercice 3). Ecrire un script `exo27.m` pour calculer ses approximations de rang 1 à 4 (en `format bank`):

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \qquad H^{(2)} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix},$$

$$H^{(3)} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \qquad H^{(4)} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Comment expliquer le fait que $H^{(4)} = H$?

Exercice 28. Pour Octave, une image en niveaux de gris est une matrice dont chaque élément représente une valeur de luminosité d'un pixel (entre 0 = noir et 255 = blanc). On peut donc faire du "calcul matriciel" pour modifier une telle image. Expérimenter dans la Command Window avec les instructions suivantes:

```
>> I=imread('http://www-lmpa.univ-littoral.fr/~stubbe/AL/image_BW.jpg');
>> size(I)        % taille de la matrice
>> I              % montrer la matrice contenant les valeurs grises des pixels
>> imshow(I)      % montrer l'image
>> [L,U,P]=lu(I); % du calcul matriciel...
>> imshow(U)
```

Une image en `truecolor` de $m \times n$ pixel est la superposition de trois matrices, une pour la composante rouge, une pour la composante verte, une pour la composante bleue. L'élément à la position (i, j) d'une telle matrice est un des 2^8 nombres entre 0 et 255, et encode l'intensité de rouge, verte ou bleu du pixel correspondant; ainsi on peut donc former 2^{24} (soit environ 16 million) couleurs différentes. Dans la Command Window, essayer les commandes ci-dessous:

```
>> I=imread('http://www-lmpa.univ-littoral.fr/~stubbe/AL/image_CL.jpg');
>> size(I)       % Que constate-t-on?
>> figure(1)
>> imshow(I);
>> R=I(:,:,1);   % Red
>> G=I(:,:,2);   % Green
>> B=I(:,:,3);   % Blue
>> figure(2)
>> imshow(R);
>> figure(3)
>> imshow(G);
>> figure(4)
>> imshow(B);
```

Puisqu'une image couleur est une superposition de trois matrices, on peut la modifier avec les techniques de l'algèbre linéaire. Mais attention au format des éléments des matrices! Pour une matrice provenant d'une image, les éléments sont des entiers entre 0 et 255: c'est le format `uint8` (*unsigned 8 bit integer*). Cependant, pour certaines fonctions – et notamment le `svd` – Octave exige que les éléments soient en format `double` (*double-precision floating-point number*). Copier sous le nom `exo28.m`, puis exécuter, le script suivant:

```
I=imread('http://www-lmpa.univ-littoral.fr/~stubbe/AL/image_CL.jpg');
I=double(I);            % ... dont on change le format des éléments.
R=I(:,:,1);             % On sépare la composante rouge ...
R=SVDapprox(R,20);      % ... pour appliquer l'approximation par SVD.
G=I(:,:,2);             % ... composante 'verte' ...
G=SVDapprox(G,20);
B=I(:,:,3);             % ... composante 'bleue' ...
B=SVDapprox(B,20);
J=zeros(size(I));       % On recompose une matrice-image ...
J(:,:,1)=R;
J(:,:,2)=G;
J(:,:,3)=B;
J=uint8(J);              % ... et on remet le bon format des éléments.
imshow(J)                % Affichage du résultat.
```

Exercice 29. On souhaite comparer, dans une même figure, les approximations de rang 5, de rang 10, de rang 20 et de rang 50 de l'image `image_CL.jpg`. Pour cela, transformer d'abord la partie pertinante du script de l'exercice précédent en une fonction `J=imageapprox(I,k)` pour calculer l'image-matrice approchée J en fonction de l'image-matrice I donnée et le rang k souhaité. Ecrire ensuite un script (que l'on sauvegardera comme `exo29.m`) pour terminer cet exercice.