Mathématiques 9 – Algèbre Linéaire (Applications) en L2 Informatique à l'ULCO

Examen du 3 décembre 2025 de 13h30 à 15h30

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrices.

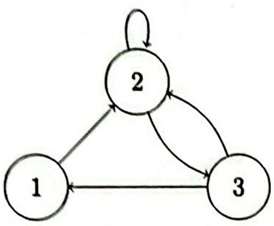
5 1. Calculer les coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ de la droite qui passe "le plus près possible" des points $(1,1)$, $(1,2)$ et $(2,4)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

5 2. 1 (a) Qu'est-ce qu'on entend par 'une factorisation QR' d'une matrice A?

4 (b) Calculer une factorisation QR de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5 3. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ou expliquer pourquoi ce n'est pas possible.

5 4. Soit le graphe



2 (a) Donner sa matrice d'adjacence A et sa matrice stochastique M.

2 (b) Définir 'graphe irréductible' et 'graphe primitif'.

1 (c) Démontrer que le graphe ci-dessus est primitif.

fin

+

20

1. $(1,1), (1,2), (2,4)$

"$y = ax+b$" donc $\begin{cases} 1 = a \cdot 1 + b \\ 2 = a \cdot 1 + b \\ 4 = a \cdot 2 + b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ moindres carrés

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

résol :
$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 11 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$L_2 := L_2 - \frac{2}{3} L_1$$

donc $\begin{cases} b = -1 \\ a = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \end{cases}$

donc $\boxed{y = \frac{5}{2} x - 1}$

2(a) $\quad A = Q \cdot R$

A : $m \times n$, de rang complet

Q : $m \times n$, à colonnes orthonormales, ie, $Q^t \cdot Q = I_n$

R : $n \times n$, inversible et triang. sup.

(b) on applique "G-S" :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$B_1 = A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = A_2 - \frac{A_2^t B_1}{B_1^t \cdot B_1} \cdot B_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$Q_1 = \frac{1}{\|B_1\|} \cdot B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \frac{1}{\|B_2\|} \cdot B_2 = \frac{1}{\sqrt{6/4}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

donc $Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ +1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ et $R = Q^t A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>poly car</u> : $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$

<u>spectre</u> : racines de χ, donc $Spec(A) = \{-1, 2\}$.

<u>esp. propres</u> :

$$E_{-1} = Ker\,(A + I) = Ker \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} = Im \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = Ker\,(A - 2I) = Ker \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = Im \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>conclusion</u> : $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$

où $B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$

$D = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right)$

$\left(\text{et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \right)$.

4. (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ adj.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ stoch.

(b) graphe irréd. $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ il existe tj. un chemin entre deux sommets.

graphe prim. $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$ on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tq. il existe tj. un chemin de longueur k entre deux sommets.

(c) pour $k = 3$ on a $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

et donc il y a tj. un chemin de longueur 3 entre deux sommets.