Mathématiques 9 – Algèbre Linéaire (Applications) en L2 Informatique à l'ULCO

Examen du 16 janvier 2025 de 9h à 11h

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrices.

4

1. Calculer les coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ de la droite qui passe "le plus près possible" des points $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

6

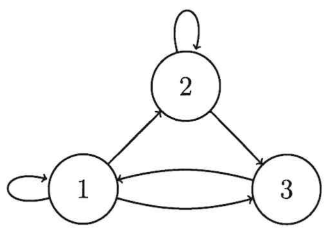
2. Pour les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   (a) calculer une factorisation $A = QR$ de la matrice A,
   (b) calculer la projection orthogonale de P sur l'image de A,
   (c) calculer la distance entre P et sa projection orthogonale.

4

3. Diagonaliser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   ou expliquer pourquoi cela n'est pas possible.

6

4. Pour le graphe



   (a) donner sa matrice d'adjacence (avec les notations du cours),
   (b) calculer sa matrice stochastique,
   (c) calculer son vecteur stationnaire,
   (d) expliquer brièvement (max. 5 lignes) l'interprétation de ce dernier résultat.

fin

20

1.

$$\begin{cases} 0a + b = 1 \\ 1a + b = 2 \\ 2a + b = 2 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

" $A \cdot X = B$ "

moindres carrés

" $A^t A X = A^t B$ "

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 6 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 14 & 6 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{11}{3} \end{array}\right)$$

$$6 - \frac{14}{3} \cdot 2 = \frac{18-28}{3} = \frac{-10}{3}$$

$$15 - \frac{14}{3} \cdot 4 = \frac{45-56}{3} = \frac{-11}{3}$$

donc $\begin{cases} 3a + 2b = 4 \\ -\frac{10}{3} b = -\frac{11}{3} \end{cases}$

d'où $b = \frac{11}{10}$ et $a = \frac{4-2b}{3} = \frac{6}{10}$.

donc $\boxed{y = \frac{6}{10} x + \frac{11}{10}}$

(2)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>G-S</u> :

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\[2ex] B_2 = A_2 - \dfrac{A_2^t \cdot B_1}{B_1^t \cdot B_1} \cdot B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{-9}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{1}{\|A_1\|} \cdot A_1 = \dfrac{1}{\sqrt{A_1^t \cdot A_1}} \cdot A_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\[4ex] Q_2 = \dfrac{1}{\|A_2\|} \cdot A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1/2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

donc $A = Q \cdot R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot R$

et $R = Q^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -9/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

b) $\text{proj}_A(P) \overset{A=QR}{=} \text{proj}_Q(P) = QQ^t \cdot P$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

c) $$\operatorname{dist}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{spec}(A) = \{1, -1\}$ (car A est <u>triang sup</u> !!)

$$E_1 = \operatorname{Ker}(A - 1.I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \operatorname{Ker}(A + 1I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $$B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ et } D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

4 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ tq. $\begin{cases} M \cdot S = S \\ s_1 + s_2 + s_3 = 1 \end{cases}$

donc $\begin{pmatrix} M - I \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 21 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-42} & \cancel{-12} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc $s_3 = \frac{2}{7}$, $s_2 = -2 + 8s_2 = \frac{2}{7}$, $s_1 = 1 - s_2 - s_3 = \frac{3}{7}$

donc $S = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 2/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$

d) vecteur stationnaire ~ les probabilités ~~...~~ de passage d'un "très long chemin" dans le graphe donné ; utile pour p. e. classer les sommets du graphe.
