Mathématiques 8 et 9 – Algèbre Linéaire en L2 Informatique à l'ULCO

Examen de rattrapage du vendredi 13 juin 2025 de 9h à 12h

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrices. Si vous faites uniquement Mathématiques 8, ou uniquement Mathématiques 9, veuillez l'indiquer clairement sur votre copie.

Mathématiques 8

6 1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer une factorisation $PA = LU$.
   (b) Donner le rang et la nullité de A (et justifier les réponses).

6 2. Calculer le polynôme d'interpolation des points $(1, 2), (2, 3), (3, 6)$.

9 3. (a) Définir 'image' et 'noyau' d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
   (b) Expliquer l'utilité de ces deux notions pour la résolution d'un système linéaire $AX = B$.

   Supposons maintenant que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ et $C \in \mathbb{R}^{m \times k}$ sont tels que $AB = C$.

   (c) Parmi les assertions suivantes, choisir et démontrer l'unique assertion correcte:
      i. $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Im}(C)$,
      ii. $\mathrm{Im}(C) \subseteq \mathrm{Im}(A)$.
   (d) Parmi les assertions suivantes, choisir et démontrer l'unique assertion correcte:
      i. $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(C)$,
      ii. $\mathrm{Ker}(C) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$.

20

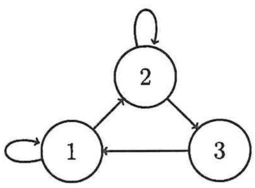
Mathématiques 9

6 4. Calculer une solution approchée au sens des moindres carrés pour le système linéaire:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 1 \\ -x + 4y - 2z = 0 \\ x + z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

6 5. (a) Définir 'matrice symétrique' et 'matrice orthogonale'.
   (b) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ par une matrice orthogonale.

8 6. Pour le graphe



   (a) donner sa matrice d'adjacence (avec les notations du cours),
   (b) montrer que ce graphe est primitif,
   (c) calculer sa matrice stochastique,
   (d) calculer son vecteur stationnaire.

——— *fin* ———

20

1. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 - L_1]{L_2 := L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

$$\downarrow L_3 := L_3 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & 13 \end{pmatrix}$$

donc $P = I$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & 13 \end{pmatrix}$$

$$L = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\text{rang}(A) = 3 = \#$ pivots dans U

$\text{null}(A) = \#\text{col} - \text{rang} = 4 - 3 = 1$

---

2. on cherche $f(x) = ax^2 + bx + c$ tq.

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 3 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

et on trouve (après résolution du syst. lin)

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 3.$$

---

(3) $\underline{a-b}$: voir cours

$\underline{c}$: $\underline{\mathrm{Im}(C) \subseteq \mathrm{Im}(A)}$

$$
\begin{aligned}
Y \in \mathrm{Im}(C) &\Leftrightarrow \exists X : Y = CX \quad \big\downarrow C = AB \\
&\Leftrightarrow \exists X : Y = ABX \\
&\Leftrightarrow \exists X : Y = A(BX) \\
&\Rightarrow \exists Z : Y = AZ \quad (\text{à savoir } Z = BX) \\
&\Leftrightarrow Y \in \mathrm{Im}(A).
\end{aligned}
$$

$\underline{d}$: $\underline{\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(C)}$

$$
\begin{aligned}
BX = 0 &\Rightarrow A\cdot(BX) = A\cdot 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow (AB)X = 0 \quad \big\downarrow C = AB \\
&\Leftrightarrow CX = 0
\end{aligned}
$$

---

(4) on a
$$
\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

et on le transforme avec la formule

"$A^t A X = A^t B$" en :

$$A^t A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 8 & 33 & -11 \\ 0 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^t B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 8 & 0 & 5 \\ 8 & 33 & -11 & 4 \\ 0 & -11 & 7 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{299}{11} & -11 & 4/11 \\ 0 & -11 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{762}{11} & \frac{343}{11} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 762 & 343 \end{array}\right)$$

donc
$$\begin{cases} z = \dfrac{343}{762} \\ y = -\dfrac{1}{11}\left(1 - 7\cdot\dfrac{343}{762}\right) = \dfrac{149}{762} \\ x = \dfrac{1}{11}\left(5 - 8\cdot\dfrac{149}{762}\right) = \dfrac{238}{762} \end{cases}$$

(les calculs à la fin sont affreux, désolé ; pour la note obtenue, je tiens principalement compte de la méthode de résolution.)

---

⑤ (a) voir cours

(b) <u>poly car</u> : $\det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4 = 0$$

<u>racines</u> : $\lambda \in \{-2, 2\}$.

<u>esp. propres</u> : $E_{-2} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{\text{G-S}}{=} \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$

$$E_{2} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>conclusion</u> : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

---

⑥ (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) A^3 n'a que des élts strictement positifs, thm.

(c) $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(d) résoudre $\begin{pmatrix} & M - I & \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

on trouve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$
