Mathématiques 8 et 9 – Algèbre Linéaire en L2 Informatique à l'ULCO
Examen de rattrapage du jeudi 18 juin 2026 de 9h à 12h
Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrices.
Indiquez sur votre copie si vous faites l'examen de Mathématiques 8 et/ou l'examen de Mathématiques 9.

Mathématiques 8 20

6 1. 2 (a) Échelonner la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

2 (b) Donner (et justifier) le rang et la nullité de A.

2 (c) Calculer une matrice B *à colonnes libres* et une matrice C telle que $A = BC$.

8 2. 2 (a) Définir 'matrice inversible'.

4 (b) Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 (c) Cette matrice A, est-elle inversible? Justifier la réponse.

6 3. 2 (a) Définir 'noyau' et 'image' d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2 (b) Montrer que le noyau de A est nul *si et seulement si* $AX = AY$ implique $X = Y$ pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

2 (c) Déterminer si $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément de l'image de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mathématiques 9 20

6 4. Soit le système linéaire $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = -2 \\ 2x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

1 (a) Montrer qu'il n'y a pas de solution exacte.

1 (b) Calculer le rang de la matrice des coefficients.

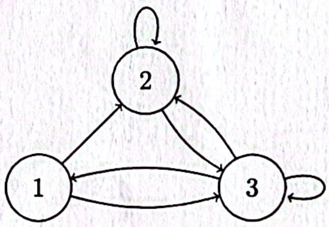
4 (c) Calculer une solution approchée au sens des moindres carrés.

8 5. 2 (a) Définir 'matrice symétrique' et 'matrice orthogonale'.

4 (b) Diagonaliser la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par une matrice orthogonale, soit $A = BDB^t$.

2 (c) Calculer A^{2026}.

6 6. Soit le graphe



2 (a) Donner sa matrice d'adjacence A et sa matrice stochastique M.

2 (b) Ce graphe, est-il primitif? Est-il irréductible? Justifier les réponses.

2 (c) Calculer le vecteur stationnaire S de la matrice M.

——— *fin* ———

Math 8

1. (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 + 3L_1]{L_2 := L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1 \\ 0 & 2 & 16 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 + 2L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= A'}$$

(b) $\operatorname{rang}(A) = \#$ pivots dans $A' = 2$

$\operatorname{null}(A) = \#\,\text{col} - \operatorname{rang}(A) = 4 - 2 = 2$

(c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ = les colonnes de A qui sont à pivot dans A'

<u>dans A'</u> : $\begin{cases} A'_3 = 8A'_2 - 5A'_1 \\ A'_4 = A'_2 \end{cases}$

<u>donc aussi</u> : $\begin{cases} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \\ A_3 = 8B_2 - 5B_1 \\ A_4 = B_2 \end{cases}$

càd
$$A = \underset{3\times 2}{B} \cdot \underbrace{\underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}}}_{= C}$$

---

2. (a) A mat. inversible $\overset{\text{def.}}{\iff}$ matrice $n\times n$ telle que il existe A^{-1} $n\times n$:

$$AA^{-1} = I = A^{-1}\cdot A \ .$$

(b) $$A = \underbrace{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}_{\text{toutes } 4\times 4} \Rightarrow \det(A) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \det A_3$$

et $$\det(A_1) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot (4+2) = 24 = 3 \cdot 2^3$$

$$\det(A_2) = -2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = -2^4 \cdot 3$$

$$\det(A_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

donc $\det(A) = -2^7 \cdot 3^2$.

(c) oui, A est inv. car $\underline{\det(A) \neq 0}$.

3. (a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\begin{cases} \ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\} \\ \mathrm{Im}(A) = \{\underbrace{A \cdot X}_{\in \mathbb{R}^m} \mid X \in \mathbb{R}^n\} . \end{cases}$$

(b) $\Rightarrow$ si $\ker(A) = \{0\}$

et $AX = AY$

alors $AX - AY = 0$

$\Leftrightarrow A(X-Y) = 0$

$\Leftrightarrow X - Y \in \ker(A)$

$\Leftrightarrow X - Y = 0$

$\Leftrightarrow X = Y$

$\Leftarrow$ si $AX = AY$ implique $X = Y$

alors $AX = 0$

$\Leftrightarrow AX = A \cdot 0$

$\Rightarrow X = 0$

donc $X \in \ker(A) \Rightarrow X = 0$

donc $\ker(A) = \{0\}$.

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A) \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

↯

pas de sol^{n}, donc non : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(A)$.

Math 9.

4. (a) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

↯

pas de sol^{n}

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 2 pivots, donc rang $= 2$

(c) $AX = B$ et rang(A) complet $\xmapsto{\text{moindres carrés}} A^tAX = A^tB$

ici,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 6 \\ 0 & \frac{33}{7} & \frac{32}{7} \end{array}\right)$$

$$7 - \frac{4}{7} \cdot 4$$
$$= \frac{49-16}{7} = \frac{33}{7}$$

$$8 - \frac{4}{7} \cdot 6 = \frac{56-24}{7} = \frac{32}{7}$$

donc
$$\begin{cases} \frac{33}{7} y = \frac{32}{7} \Rightarrow y = \frac{32}{33} \\ 7x + 4y = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{7}\left(6 - 4 \cdot \frac{32}{33}\right) \end{cases}$$
$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{70}{33} = \frac{10}{33}$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/33 \\ 32/33 \end{pmatrix}$

5. (a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est $\begin{cases} \underline{\text{symétrique}} \text{ si } A^t = A \\ \underline{\text{orthogonale}} \text{ si } A^t = A^{-1} \\ \qquad (\text{càd } A^t A = I) \end{cases}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>polyn. caract</u> : $p(\lambda) = \det(A - \lambda . I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$= (-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (\lambda^2 - 1)(1-\lambda)$$

<u>spectre</u> : $\operatorname{Spec}(A) = \{\text{racines de } p(\lambda)\}$

$$= \{1, -1\}$$

<u>esp. propres</u> :

$\underline{\lambda = 1}$: $\operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Jn}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\overset{G.S.}{=} \operatorname{Jn}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -1}$ $\operatorname{Ker}(A + I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Jn}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overset{G.S.}{=} \operatorname{Jn}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

donc $$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(c) $$A^{2026} = B \cdot D^{2026} \cdot B^t = B \cdot \begin{pmatrix} 1^{2026} & & \\ & 1^{2026} & \\ & & (-1)^{2026} \end{pmatrix} B^t$$

$$= B \cdot I \cdot B^t = BB^t = I .$$

---

6. (a) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(b) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

aucun élt 0

donc <u>primitif</u> (càd : il existe un chemin de longueur 2 entre chaque paire de sommets), donc <u>aussi irréductible</u> (car il existe un chemin entre chaque paire de sommets)

(c) S est vecteur stationnaire de M $\left(S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \cdot S = S \\ s_1 + s_2 + s_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (M - I) \cdot S = 0 \\ s_1 + s_2 + s_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & -2/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -2/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 \\ 0 & -1 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & -7/6 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 7/6 & 1/2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-7/6} & \cancel{-1/2} \end{array}\right)$$

donc

$$\frac{7}{6} s_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow s_3 = \frac{3}{7}$$

$$s_2 + \frac{4}{3} s_3 = 1 \Rightarrow s_2 = 1 - \frac{4}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{7} = \frac{3}{7}$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1 \Rightarrow s_1 = 1 - \frac{3}{7} - \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

conclusion :

$$S = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 3/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$$