

Mathématiques 8 – Algèbre Linéaire en L2 Informatique à l'ULCO

Examen du 6 novembre 2024 de 9h00 à 11h

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrices.

6 1. Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

1 (a) Ecrire ce système sous forme matricielle $AX = B$.

2 (b) Calculer rang et nullité de A .

1 (c) En déduire que ce système admet une unique solution.

2 (d) Calculer cette solution.

6 2.2 (a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible. Montrer que $\det(A) \neq 0$.

2 (b) Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2 (c) Calculer le déterminant de la matrice $B = -\frac{1}{3}A^2$.

8 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 & 7 & 5 & 6 \\ -4 & 2 & -11 & 10 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

1 (a) Calculer une factorisation $PA = LU$.

2 (b) Trouver une matrice à colonnes libres $\bar{A}$ telle que $\text{Im}(A) = \text{Im}(\bar{A})$.

2 (c) Trouver une matrice T telle que $A = \bar{A} \cdot T$.

————— fin —————

20

$$1. (a) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 21 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & \cancel{14} \cdot \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$3 \text{ pivots} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$\Rightarrow \text{null}(A) = 0$$

(par Thm du rang)

(c) A 3×3 et de rang 3 $\Rightarrow A$ inversible

$$\Rightarrow \text{unique sol}^n \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

$$(c) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 14 & -7 & 10 \\ 0 & 21 & -7 & 16 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 14 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 7/2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{donc} \begin{cases} \frac{7}{2} x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x_2 - 7x_3 = 10 \Rightarrow x_2 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\text{donc unique sol.} \quad X = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$

2. (a) par hypothèse, il existe A^{-1} tel que
 $A \cdot A^{-1} = I$, donc

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

donc $\det(A) \neq 0$ car sinon on a "0 = 1".

ci-dessous.

$$(b) \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \left[2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$= -2 \left[2 \cdot (8 - 1) + 3 \cdot (-12 + 7) \right] = 2.$$

$$(c) \det(B) = \det\left(-\frac{1}{3}A^2\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \det(A)^2$$

$$= + \frac{4}{81}$$

$$2. (a) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 & 7 & 5 & 6 \\ -4 & 2 & -11 & 10 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$
 $L_2' = L_2 + L_1$
 $L_3' = L_3 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_4 := L_4 + 2L_1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Bewirkt} & \text{Bewirkt} & \text{Bewirkt} \\ & & & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow L_4' = L_4 - 3L_3 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A'$$

$$P = I, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -2 & & 1 \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & & 1 \\ & 2 & & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & -2 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 2 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ -2 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & +2 & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 5 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 3 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 7 & 6 \\ -4 & -11 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \left(A_1 \mid A_3 \mid A_4 \mid A_6 \right)$$

(c) dans A' (échelonnée), on trouve que :

$$\begin{cases} A'_2 = -\frac{1}{2} A'_1 \\ A'_5 = A'_4 + A'_3 - \frac{3}{2} A'_1 \end{cases}$$

pour les colonnes "sans pivot", et donc aussi
dans A on a $\begin{cases} A_2 = -\frac{1}{2} A_1 \\ A_5 = -\frac{3}{2} A_1 + A_3 + A_4 \end{cases}$

d'où

$$\begin{aligned} A &= \left(A_1 \mid A_2 \mid A_3 \mid A_4 \mid A_5 \mid A_6 \right) = \left(A_1 \mid A_3 \mid A_4 \mid A_6 \right) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: T} \\ &= \overline{A} \cdot T \end{aligned}$$
