Mathématiques 8 – Algèbre Linéaire en L2 Informatique à l'ULCO

Examen du 7 novembre 2024 de 9h à 11h

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrices.

8 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \\ 8 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4 (a) Donner une factorisation LU pour la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

2 (b) En déduire une factorisation LU pour A.

2 (c) La matrice A, est-elle inversible? (Justifier la réponse.)

6 2. Calculer le polyôme d'interpolation des points $(-1,5)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,-1)$.

6 3. 2 (a) Définir $\mathrm{Ker}(A)$ pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2 (b) Soit A' une matrice obtenue par opérations élémentaires de A. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A')$.

2 (c) Compléter la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -5 & a \\ 4 & -2 & 6 & b \\ 2 & -7 & 8 & c \end{pmatrix}$$

sachant qu'une matrice échelonnée pour A est donnée par

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

/ 20.

——— *fin* ———

1(a)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 := L_3 - L_1]{L_2 := L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 := L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $P = I$

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ +1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et $P \cdot B = L \cdot U$

i.e. $B = L \cdot U$

(b) $$A = \begin{pmatrix}3&0&0\\-5&7&0\\8&-6&9\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{B = L\cdot U}\cdot\begin{pmatrix}6&-9&6\\0&4&-8\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3&0&0\\-19&7&0\\29&12&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6&17&-23\\0&8&-19\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(c) $$\det(A) = \det\begin{pmatrix}3&0&0\\-19&7&0\\29&12&9\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}-6&17&-23\\0&8&-19\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= 3\cdot 7\cdot 9\cdot(-6)\cdot 8\cdot 1 \neq 0$$

donc A inversible

2. $(-1,5), (0,1), (1,1), (2,-1)$

4 points, donc polynôme interpol. de degré 3

càd $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

on cherche a, b, c, d tq.

$$\begin{cases} a\cdot(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 5 \\ a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 1 \\ a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 1 \\ a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ donc } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$

3. (a) $\mathrm{Ker}(A) = \{ X \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid A \cdot X = 0 \}$.

(b) soit $A' = \underbrace{E_k \cdots E_1}_{\substack{\text{matrices élém,}\\ \text{donc inversibles,}}} \cdot \underset{\text{échelonnée}}{A'}$

donc $E := E_k \cdots E_1$ est <u>inversible</u>

alors $AX = 0 \Rightarrow E \cdot A' \cdot X = 0$

$\Rightarrow A' \cdot X = E^{-1} \cdot 0 = 0$

donc $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A')$

et $A'X = 0 \Rightarrow \underset{\underset{A \cdot X}{\parallel}}{EA'X} = \underset{\underset{0}{\parallel}}{E \cdot 0}$

donc $\mathrm{Ker}(A') \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.

(c) on voit dans A' que $A'_4 = 3A'_3 + 3A'_2 - 2A'_1$

donc $A' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\underset{\underset{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}{\parallel}}{A_4} = 3A_3 + 3A_2 - 2A_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.