

Rappels et compléments sur la théorie des
Ensembles, fonctions et relations

en L1 Informatique à l'Université du Littoral

Isar Stubbe

September 21, 2026

Ce document sera mis à jour au fur et à mesure que le cours progresse. Revenez donc régulièrement pour télécharger la version la plus récente! Une référence utile pour ce cours est le texte *Théorie des ensembles (fascicule de résultats)* de N. Bourbaki (1951). Un PDF est disponible gratuitement sur le site <https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr>; j'en ai mis une copie sur mon site web. L'article *Rethinking set theory* de T. Leinster (2012), disponible par le lien <https://arxiv.org/abs/1212.6543>, explique bien le point de vue catégorique que j'adopte implicitement dans ce cours. Pour ceux qui veulent vraiment creuser le sujet, je recommande sans hésitation le livre *Sets for Mathematics* de F. W. Lawvere and R. Rosebrugh (Cambridge University Press, 2003); et spécifiquement pour l'informatique fondamentale (i.e. *computer science*) il y a *Practical Foundations of Mathematics* de P. Taylor (Cambridge University Press, 1999).

Leçons

1	Ensembles, sous-ensembles	1
2	Algèbre de Boole, lois de De Morgan	3
3	Fonctions et leur composition, injection, surjection, bijection	5
4	Produit, exponentielle, Schönfinkel-Curry	7
5	Images directe et réciproque, fonction caractéristique	9
6	Axiome de l'infini, dénombrabilité, induction sur $\mathbb{N}$	10
7	Sections, rétractions, axiome du choix	11
8	Relations et leur composition	13
9	Fonctions et relations	15
10	Relations binaires	17
11	Relations d'équivalence	18
12	Relations d'ordre	19
13	Leftovers	21
14	Syllabus officiel	24

1. Ensembles, sous-ensembles

Cours

1.1 Qu'est-ce qu'on entend ("naivement") par un ensemble? Quand dit-on que deux ensembles sont égaux? Que signifie une notation comme $x \in E$, ou $x \notin E$? Et $E = \{\clubsuit, \diamond, \spadesuit, \heartsuit\}$? Qu'est-ce qu'un ensemble donné "par extension"?

1.2 Donnez des exemples d'ensembles finis et infinis. N'oubliez pas de mentionner l'ensemble vide. Quels ensembles note-t-on par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$? Qu'est-ce qu'un singleton?

1.3 Soit E un ensemble quelconque. Que signifie $A \subseteq E$? Qu'est-ce que $\mathcal{P}(E)$? Notez donc que $A \subseteq E$ est équivalent à $A \in \mathcal{P}(E)$.

1.4 Qu'est-ce qu'un prédicat sur un ensemble E ? Expliquez comment un prédicat sur E définit ("par compréhension") un sous-ensemble de E . Et réciproquement? Donnez des exemples.

1.5 Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Que signifient $A \subseteq B$, $A \cap B$, $A \cup B$, A^c ? Quand dit-on que A et B sont des sous-ensembles disjoints? supplémentaires? complémentaires? Illustrez par des diagrammes de Venn.

1.6 Considérons deux prédicats sur un ensemble E , et notons A et B les deux sous-ensembles de E qu'ils définissent. Quel prédicat sur E correspond à $A \cap B$? à $A \cup B$? à A^c ? Travaillez avec un exemple concret.

Exercices

1.7 Définir, par compréhension et/ou extension, les ensembles suivants:

- | | |
|--|--|
| (a) les pays de l'UE, | (d) les étudiants en L1 Informatique à l'ULCO, |
| (b) les nombres premiers, | (e) les points du cercle dans le plan réel, |
| (c) les présidents de la France depuis 1980, | (f) les continents. |

1.8 Pour l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$, les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

- | | | |
|----------------------------|---|--|
| (a) $1 \in A$ | (f) $\{\{1\}\} \subseteq A$ | (k) $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(A)$ |
| (b) $\{1\} \subseteq A$ | (g) $\emptyset \subseteq A$ | (l) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ |
| (c) $\{2\} \in A$ | (h) $A \subseteq \{1, 2\}$ | (m) $\{\{1\}, \{2, 3\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ |
| (d) $\{0, 1\} \subseteq A$ | (i) $A \subseteq A$ | (n) $\{\emptyset, 1\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ |
| (e) $1 \in \{1\}$ | (j) $\{2, 3\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ | (o) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ |

1.9 Donner par extension les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\},$$

puis calculer leurs intersections, réunions et complémentaires.

1.10 Définir par extension et/ou par compréhension les sous-ensembles suivants :

- | | |
|--|--|
| (a) $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 7\}$ | (e) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ |
| (b) $\{x \in [0, 2\pi] \mid \cos x = 0\}$ | (f) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \subseteq \mathbb{Z}$ |
| (c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 3y + 2 = 0\}$ | (g) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\} \subseteq \mathbb{N}$ |
| (d) $\{\frac{2p+1}{p^2+1} \in \mathbb{Q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } -2 \leq p \leq 3\}$ | (h) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\} \subseteq \mathbb{R}$ |

1.11 On pose $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et on considère les sous-ensembles suivants:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{4, 5, 6, 7\} \quad C = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Calculer explicitement dans $\mathcal{P}(E)$ (en plusieurs étapes si nécessaire):

- | | | |
|----------------|--------------------|-------------------------|
| (a) $A \cap B$ | (d) $B \cap C$ | (g) $A^c \cap B^c$ |
| (b) $A \cup B$ | (e) $B \cup C$ | (h) $A^c \cup B$ |
| (c) A^c | (f) $(A \cup B)^c$ | (i) $(A \cap B) \cup C$ |

1.12 Dans $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 20\}$, on considère les sous-ensembles

$$A = \{x \in E \mid x \text{ est premier}\} \quad B = \{x \in E \mid x \text{ est paire}\}.$$

Calculer (éventuellement en étapes) $A \cap B$, $A \cup B$, A^c , B^c , $(A \cap B^c)^c$.

1.13 Pour tout $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$ (muni de son ordre usuel), on définit les sous-ensembles suivants:

- l'intervalle fermé: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- l'intervalle ouvert: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,

et de manière évidente aussi les intervalles semi-ouverts $[a, b[$ et $]a, b]$. Par abus de notation, on écrit aussi $] - \infty, a]$, $[a, +\infty[$, etc. Avec ces notations, écrire:

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| (a) $[3, 3]$ | (d) $(]0, 10] \cap [-10, 5])^c$ | (g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6 \text{ ou } x \geq 9\}$ |
| (b) $[-2, 7]^c$ | (e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$ | (h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 12 \text{ et } x \geq 9\}$ |
| (c) $[-10, 3] \cap]1, \infty[$ | (f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 4\}$ | (i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\leq 6\}$ |

1.14 Soit E un ensemble quelconque. Montrez que la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ est

- (a) réflexive: pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subseteq A$,
- (b) transitive: pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$,
- (c) anti-symétrique: pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors $A = B$.

On dit que $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un ensemble ordonné par l'inclusion.

1.15 Pour un ensemble E et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, montrer que

- (a) $A \cup B$ est le plus petit sous-ensemble de E contenant A et B ,
- (b) $A \cap B$ est le plus grand sous-ensemble de E contenu dans A et B ,
- (c) $A \subseteq B$ si et seulement si $A \cap B = A$, si et seulement si $A \cup B = B$.

1.16 La notion d'ensemble ordonné est omniprésente en mathématiques. Vérifier les exemples suivants:

- (a) $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné pour l'ordre usuel,
- (b) $\mathbb{N}$ est un ensemble ordonné pour l'ordre usuel,
- (c) $\mathbb{N}$ est un ensemble ordonné pour la divisibilité: on lit $m \leq n$ comme " m divise n ".

2. Algèbre de Boole, lois de De Morgan

Cours

2.1 Soient A, B des sous-ensembles d'un ensemble quelconque E . Reprenez les définitions de $A \cap B$, $A \cup B$ et A^c ; dressez leurs “tables de vérité d'appartenance” et visualisez-les avec un diagramme de Venn.

2.2 Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ pour un ensemble quelconque E . Montrer (par un raisonnement élémentaire et/ou avec une table de vérité d'appartenance) les propriétés suivantes des opérations $\cap$, $\cup$ et $(-)^c$:

- | | |
|---|---|
| 1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | 6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| 2. $A \cap E = A$ | 7. $A \cup \emptyset = A$ |
| 3. $A \cap B = B \cap A$ | 8. $A \cup B = B \cup A$ |
| 4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | 9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| 5. $A \cap A^c = \emptyset$ | 10. $A \cup A^c = E$ |

Ce sont les lois de l'*algèbre booléenne* $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, (-)^c)$ (d'après le logicien George Boole; on utilisera aussi le terme *algèbre de Boole*). C'est un résultat fondamental qu'une identité est vraie dans *toute* algèbre booléenne $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, (-)^c)$ si et seulement si elle peut être démontrée à partir de ces seules lois; c'est ce qu'on appelle la *complétude* de cette axiomatique.

2.3 Dans l'algèbre booléenne $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, (-)^c)$, démontrer les équations suivantes:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Ce sont les lois de De Morgan (d'après le logicien Augustus De Morgan).

2.4 Pourquoi dit-on que les lois de Boole sont “auto-duales”? Quelle en est la conséquence pratique?

2.5 Notons $\mathbf{1} = \{*\}$ pour un singleton dont le seul élément est $*$ (cette notation est sans importance); on a alors que $\mathcal{P}(\{*\}) = \{\emptyset, \{*\}\}$ est une algèbre booléenne à deux éléments. Comment l'identifie-t-on avec l'*algèbre booléenne des valeurs de vérité*, notée $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$? C'est encore un résultat fondamental qu'une identité est vraie dans *toute* algèbre booléenne $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, (-)^c)$ si et seulement si elle est vraie dans $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$.

Exercices

2.6 Compléter la vérification des lois de Boole dans $\mathcal{P}(E)$ (si ce n'est pas fait pendant le Cours).

2.7 Dans toute algèbre booléenne $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, (-)^c)$ il est vrai que:

- | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| (a) $(A^c)^c = A$ | (b) $A \cap A = A$ | (c) $A \cup A = A$ |
|-------------------|--------------------|--------------------|

Donner une démonstration partant des lois de Boole, une démonstration élémentaire, et aussi une démonstration par tables de vérité. (Qu'est-ce qui est le plus rapide?)

2.8 Soient A et B des parties d'un ensemble E . Les expressions suivantes sont égales à un ensemble parmi A , B , B^c , $A \cap B$; déterminer lequel en justifiant. On utilise la notation $A \setminus B = A \cap B^c$, lu comme “ A moins B ” (visualisez avec un diagramme de Venn!).

- | | |
|--|--|
| (a) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B)$ | (d) $A \cup (A \cap B)$ |
| (b) $((A \cup \emptyset) \cap (\emptyset \setminus A)) \cup (A \setminus \emptyset)$ | (e) $(A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B^c)^c$ |
| (c) $((A \cap B) \cup (B \setminus A))^c$ | (f) $(A \cup B) \cap (A \cap B)$ |

2.9 Les assertions suivantes sont-elles vraies dans toute algèbre booléenne $\mathcal{P}(E)$? Si oui, donner une démonstration; sinon, donner un contre-exemple concret.

- | | |
|--|---|
| (a) si $A \subseteq B$ alors $A \cap C \subseteq B \cap C$ | (d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ |
| (b) si $A \setminus C \subseteq B \setminus C$ alors $A \subseteq B$ | (e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ |
| (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ | (f) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ |

2.10 On définit la différence symétrique de $A, B \in \mathcal{P}(E)$ par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Visualiser cette opération avec un diagramme de Venn, puis montrer que, pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:

- (a) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(b) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

Observer que $A \Delta B$ correspond au “ou exclusif” (le **xor** en informatique).

2.11 Dans l’algèbre booléenne $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, (-)^c)$, on définit l’opération $(A \Rightarrow B) = A^c \cup B$, lu comme “ A implique B ”. Si A et B sont donnés par compréhension de prédicats, disons $A = \{x \in E \mid a(x)\}$ et $B = \{x \in E \mid b(x)\}$, montrez que $A \Rightarrow B$ est donné par le prédicat “si $a(x)$ alors $b(x)$ ”.

2.12 Sur l’ensemble E des étudiants de l’ULCO, on considère les prédicats suivants:

- $a(x)$ veut dire que “ x est inscrit en Informatique”,
- $b(x)$ veut dire que “le prénom de x commence par la lettre t”,

et on note $A = \{x \in E \mid a(x)\}$ et $B = \{x \in E \mid b(x)\}$. Qui des personnes suivantes est dans A , dans B , dans $A \cap B$, dans $(A \Rightarrow B)$ et/ou dans $(B \Rightarrow A)$:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (a) Tamar, étudiante en Info, | (c) Tony, étudiant en Bio, |
| (b) Jamal, étudiant en Info, | (d) Paola, étudiante en Math. |

2.13 Dans l’algèbre booléenne $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$ des valeurs de vérité, que l’on identifie donc avec $(\mathcal{P}(\{*\}), \cap, \cup, (-)^c)$, donner la table de vérité de l’opération “implique”.

2.14 Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, montrer que

- (a) $(A \Rightarrow B) = E$ si et seulement si $A \subseteq B$
(b) $(A^c \Rightarrow \emptyset) = A$ (Réduction à l’absurde)
(c) $A \cap (A \Rightarrow B) \subseteq B$ (Modus Ponens)
(d) $(A \Rightarrow B) = (B^c \Rightarrow A^c)$ (Contraposée)
(e) $(A \Rightarrow B) \cap (A^c \Rightarrow B) = B$ (Analyse par cas)
(f) $(A \Rightarrow B) \cap (B \Rightarrow C) \subseteq (A \Rightarrow C)$ (Transitivité de l’implication)

Que traduisent ces (in)égalités sur le plan du raisonnement mathématique?

3. Fonctions et leur composition, injection, surjection, bijection

Cours

3.1 Qu'est-ce qu'une *fonction* (synonyme: *application*) entre deux ensembles, et comment note-t-on une fonction? Précisez son domaine et son codomaine! Quand dit-on que deux fonctions sont égales? Donnez des exemples!

3.2 Expliquez les exemples suivants: la fonction identité $\text{id}_E: E \rightarrow E$; l'inclusion canonique $i_A: A \rightarrow E$ et la fonction caractéristique $\chi_A: E \rightarrow \mathbf{2}$ d'un sous-ensemble $A \subseteq E$; les fonctions de E à $\mathbf{1}$, et de $\mathbf{1}$ à E ; les fonctions de $\emptyset$ à E , et de E à $\emptyset$.

3.3 Qu'est-ce qu'une fonction *injective* ($f: A \rightarrow B$)? *surjective* ($f: A \rightarrow B$)? *bijjective* ($f: A \rightarrow B$)? Illustrez avec des exemples!

3.4 Quand et comment compose-t-on deux fonctions données? Réviser les notations habituelles. Il y a deux lois d'identité et une loi d'associativité pour la composition de fonctions: énoncer-les!

3.5 Quand dit-on qu'une fonction $f: A \rightarrow B$ est *inversible* (synonyme: *isomorphisme*)? Expliquez les notations $f^{-1}: B \rightarrow A$, $f: A \xrightarrow{\sim} B$ et $A \cong B$ et utilisez la terminologie adéquate. Démontrez: f est inversible si et seulement si f est bijective. Donnez des exemples!

3.6 Expliquez le slogan: "la théorie des ensembles est fonctionnelle!"

Exercices

3.7 Identifier ci-dessous les fonctions bien définies:

- | | |
|--|---|
| (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$ | (g) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}: x \mapsto \frac{x}{2}$ |
| (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x}$ | (h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ |
| (c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x}$ | (i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}: x \mapsto \frac{3x+1}{2}$ |
| (d) $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E): x \mapsto \{x\}$ | (j) $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ |
| (e) $f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}): A \mapsto A \cap [-1, 1]$ | (k) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}: \frac{a}{b} \mapsto a$ |
| (f) $f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}): A \mapsto 0$ | (l) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x}$ |

3.8 Dire si les fonctions f et g ci-dessous sont égales, et justifier la réponse:

- (a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto x + 2$ et $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}: x \mapsto x + 2$,
(b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto (x + 1)^2$ et $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto x^2 + 2x + 1$,
(c) $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x + 1$
(d) $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ et $g: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x + 1$

3.9 Les fonctions suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives? Le cas échéant, donner la fonction inverse.

- | | |
|---|---|
| (a) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+: x \mapsto x^2$ | (e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^3 + 2$ |
| (b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto x + 1$ | (f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2 + 2x - 5$ |
| (c) $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E): A \mapsto A^c$ | (g) $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0: x \mapsto \frac{1}{x}$ |
| (d) $f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}): A \mapsto A \cap [0, 1]$ | (h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 3x + 2$ |

3.10 Soit $E = \{a, b, c, d\}$. On considère les trois applications $f, g, h: E \rightarrow E$ définies par

$$\begin{aligned} f(a) &= d, & f(b) &= d, & f(c) &= a, & f(d) &= c, \\ g(a) &= d, & g(b) &= c, & g(c) &= b, & g(d) &= a, \\ h(a) &= c, & h(b) &= b, & h(c) &= a, & h(d) &= b. \end{aligned}$$

Donner explicitement les compositions $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ g$, $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$. Y a-t-il une injection/surjection/bijection parmi f , g et h ?

3.11 Pour les fonctions $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto 2x + 1$ et $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto x^2$, montrer que $g \circ f \neq f \circ g$ et que $(f \circ f)(x) \neq (f(x))^2$.

3.12 Soient A et B des ensembles finis. Formulez des conditions nécessaires et/ou suffisantes sur le nombre d'éléments de A et/ou B , pour l'*existence* d'une injection $A \hookrightarrow B$, d'une surjection $A \twoheadrightarrow B$, et/ou d'une bijection $A \xrightarrow{\sim} B$. (On peut en fait *compter* le nombre d'injections (facile), de surjections (moins facile) et de bijections (très facile) d'un ensemble fini à un autre; cela relève de la *combinatoire*.)

3.13 Soit deux fonctions $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$. Démontrer que:

- (a) si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective,
- (b) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective,
- (c) si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective; de plus, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,
- (d) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
- (e) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective,
- (f) si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

(Attention: si $g \circ f$ est bijective alors $(g \circ f)^{-1}$ existe; mais ceci n'implique pas que f^{-1} et g^{-1} existent.)

3.14 Montrer que tous les singletons sont isomorphes, par un unique isomorphisme. (Ceci explique pourquoi la notation pour l'unique élément de $\mathbf{1}$ est sans importance.)

3.15 On rappelle que la fonction caractéristique de $A \in \mathcal{P}(E)$ est notée $\chi_A: E \rightarrow \mathbf{2}$; le codomaine est l'algèbre booléenne $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$. Montrer:

- (a) pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\chi_A = \chi_B$ si et seulement si $A = B$,
- (b) pour tout $x \in E$, $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$,
- (c) pour tout $x \in E$, $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x)$,
- (d) pour tout $x \in E$, $\chi_{A^c}(x) = \neg \chi_A(x)$.

(Autrement dit: lorsqu'on identifie les sous-ensembles de E par leurs fonctions caractéristiques, les opérations booléennes sur $\mathcal{P}(E)$ sont parfaitement encodées par les opérations booléennes sur $\mathbf{2}$.)

3.16 Montrer que la relation d'isomorphisme (i.e. d'existence de bijection) entre ensembles est

- (a) réflexive: pour tout ensemble A on a $A \cong A$,
- (b) transitive: si $A \cong B$ et $B \cong C$ alors $A \cong C$,
- (c) symétrique: si $A \cong B$ alors $B \cong A$.

Dans la littérature, pour $A \cong B$ on dit aussi que A et B sont *équipotents*, ou *de même cardinal*.

3.17 Peut-on avoir un isomorphisme entre un ensemble fini et un ensemble infini? Est-ce que tous les ensembles infinis sont isomorphes? Peut-on avoir plusieurs isomorphismes entre deux ensembles?