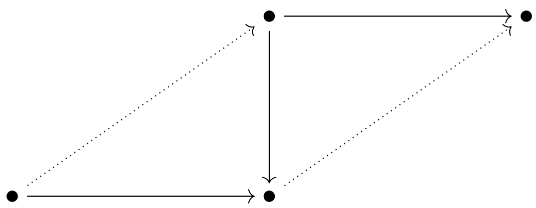
Mathématiques pour la première candidature en Sciences Sociales :

La théorie des ensembles, fonctions et relations en 101 questions

par Isar Stubbe (janvier 2004)



version $\beta 8$

1 Ensembles, sous-ensembles, partitions

1.1 Qu'est-ce qu'on entend par un "ensemble" ? Que signifie une notation comme $a \in A$, ou $x \notin A$? Et une notation comme $X = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$?

1.2 Donnez des exemples d'ensembles finis et infinis. N'oubliez pas de mentionner l'ensemble vide. Quels ensembles note-t-on $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$?

1.3 Soit A un ensemble quelconque ; définissez la notion de sous-ensemble (synonyme : "partie") de A. Que signifie $B \subseteq A$? Et $B \subset A$? Qu'est-ce que $\mathscr{P}A$? (Notez donc que $B \subseteq A$ est équivalent à $B \in \mathscr{P}A$.)

1.4 Expliquez pourquoi "toute propriété que peuvent avoir les éléments d'un ensemble A définit un sous-ensemble de A" ; et réciproquement "tout sous-ensemble de A détermine une propriété à propos des éléments de A". Donnez des exemples !

1.5 On fixe un ensemble A, et on considère $B, B' \in \mathscr{P}A$. Que signifient $B \subseteq B'$, $B \cap B'$, $B \cup B'$, B^{c}, $\emptyset$? Quand dit-on que B et B' sont des sous-ensembles "disjoints" ? Qu'est-ce qu'un singleton ?

1.6 Il y a certaines règles de calcul concernant l'ensemble $\mathscr{P}A$ et les opérations $\cap$, $\cup$ et $(\ )^{\mathsf{c}}$; on les appelle les lois de l'algèbre des sous-ensembles. Résumez-les et prouvez-les !

1.7 A l'aide des lois de l'algèbre des sous-ensembles, montrez que pour B_1, B_2, $B_3 \in \mathscr{P}A$,
(a) $(B_1 \cap B_2^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = B_1^{\mathsf{c}} \cup B_2$,
(b) $(((B_1 \cup B_2) \cap B_3)^{\mathsf{c}} \cup B_2^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = B_2 \cap B_3$,
(c) $B_1 \cup B_2^{\mathsf{c}} \subseteq (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \cap B_3)^{\mathsf{c}}$.

1.8 Soit A un ensemble, et considérons deux propriétés que les éléments de A peuvent avoir. On sait que ces deux propriétés définissent deux sous-ensembles de A ; notons-les B et B'. Quelle est la propriété exprimée par $B \cap B'$? Et $B \cup B'$, B^{c} ? Interprétez maintenant les lois de l'algèbre des sous-ensembles d'un ensemble A comme des lois de la logique des propriétés des éléments de A. Travaillez avec un exemple concret.

1.9 Pour un ensemble fini A, on note $|A|$ son nombre d'éléments. Montrez que, pour $B, B' \in \mathscr{P}A$, si $B \subseteq B'$ alors $|B| \leq |B'|$; est-ce que la réciproque est vraie aussi (donc, si $|B| \leq |B'|$ alors $B \subseteq B'$) ? Déduisez-en que $|B \cap B'| \leq |B|$ et $|B \cap B'| \leq |B'|$; et de même $|B| \leq |B \cup B'|$ et $|B'| \leq |B \cup B'|$. Prouvez que $|B \cup B'| = |B| + |B'| - |B \cap B'|$. Quand est-ce que $|B \cup B'| = |B| + |B'|$? (Bien sûr le symbole "$\leq$" signifie : "est moins grand ou égal à".)

1.10 Soit A un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}$). Combien de sous-ensembles l'ensemble A a-t-il (c'est-à-dire, que vaut $|\mathscr{P}A|$) ?

1.11 Qu'est-ce qu'une partition d'un ensemble A ? Donnez-en des exemples ! Notez qu'une partition d'un ensemble infini peut être finie ou infinie ; mais une partition d'un ensemble fini est toujours finie. Observez qu'un même ensemble peut admettre plusieurs partitions.

1.12 Soit A un ensemble fini, et $B_1, ..., B_n$ une partition de A. Prouvez la formule suivante : $|A| = |B_1| + ... + |B_n|$.

1.13 Soit $B_1, ..., B_n$ une partition de l'ensemble A ; et soit $B \subseteq A$. Montrez que $B \cap B_1, ..., B \cap B_n$ est une partition de B. (En fait, cette propriété reste vraie pour une partition infinie de A.)

1.14 Soit $B_1, ..., B_n$ une partition de A, et, pour tout B_i, $C_{i1}, ..., C_{i,k_i}$ une partition de ce B_i. Montrez que $C_{1,1}, ..., C_{1,k_1}, C_{2,1}, ..., C_{2,k_2}, ..., C_{n,1}, ..., C_{n,k_n}$ est également une partition de A. Travaillez avec un exemple pour mieux comprendre les notations ci-dessus. La preuve peut être obtenue en combinant les résultats précédents. (La propriété est aussi vraie pour des partitions infinies.)

1.15 Pour deux partitions $B_1, ..., B_n$ et $C_1, ..., C_k$ d'un même ensemble A, démontrez que $B_1 \cap C_1, ..., B_1 \cap C_k, B_2 \cap C_1, ..., B_2 \cap C_k, ..., B_n \cap C_1, ..., B_n \cap C_k$ est toujours une partition de A ! (A nouveau, cette propriété reste vraie pour des partitions éventuellement infinies.)

2 Fonctions entre ensembles

2.1 Qu'est-ce qu'une fonction entre ensembles ? Quelles sont les notations que l'on utilise ? Qu'est-ce que le domaine d'une fonction ? Et le codomaine ? Quand dira-t-on que deux fonctions sont égales ? Donnez plein d'exemples !

2.2 Pour une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ et un sous-ensemble $X \subseteq A$, qu'est-ce que l'image par f de X ? Et qu'entend-on par l'image de f tout court ? (Et si X est un singleton, qu'est-ce que cela donne ?) Si $Y \subseteq B$ est un sous-ensemble du codomaine de f, alors qu'est-ce que la préimage par f de Y ? Et la préimage de f tout court ? Nos notations seront : $f(X)$ pour l'image de X par f, et $f^*(Y)$ pour la préimage de Y par f. Illustrez cette matière par des exemples !

2.3 Soit $\mathbf{1}$ la notation pour un ensemble quelconque à un élément ; pour fixer les idées on peut poser $\mathbf{1} = \{\star\}$. Soit aussi un ensemble quelconque A. Qu'est-ce qu'une fonction de domaine $\mathbf{1}$ et codomaine A ? Combien de telles fonctions y a-t-il donc ? Et combien de fonctions $A \longrightarrow \mathbf{1}$ y a-t-il ?

2.4 On utilisera $\mathbf{0}$ comme notation pour l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble avec zéro éléments (par analogie avec la notation $\mathbf{1}$ pour l'ensemble avec un seul élément). Pour un ensemble quelconque A, y a-t-il moyen de définir une fonction de domaine A et codomaine $\mathbf{0}$? Si oui, combien ? (La réponse est subtile : on doit distinguer le cas où A est vide du cas où A est non-vide !) Mêmes questions pour des fonctions $\mathbf{0} \longrightarrow A$.

2.5 Toujours par analogie avec les notations $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, on note $\mathbf{2}$ pour un ensemble quelconque avec deux éléments ; pour fixer les idées on va le penser comme $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. Soit A un ensemble quelconque, et $f\colon A \longrightarrow \mathbf{2}$ une fonction. Prouvez que $(f^*(0))^{\mathsf{c}} = f^*(1)$ dans $\mathscr{P}A$. Pour un sous-ensemble $B \subseteq A$, il y a toujours moyen de construire une fonction $f\colon A \longrightarrow \mathbf{2}$ telle que $f^*(1) = B$; on parle de la fonction caractéristique de $B \subseteq A$, et elle est souvent notée $\chi_B\colon A \longrightarrow \mathbf{2}$. Comment peut-on la construire ? Est-ce que cela explique le mot "caractéristique" ?

2.6 Pour deux ensembles quelconques A et B, on note B^A pour la collection des fonctions de domaine A et codomaine B ; elle est elle-même un ensemble, et on l'appelle l'ensemble exponentiel de B par A. Si A et B sont des ensembles finis, disons $|A| = n$ et $|B| = m$, l'ensemble B^A est aussi fini. Pourquoi ? Donnez la valeur de $|B^A|$. Comment ce résultat explique-t-il la notation B^A ? Reprenez les exercices précédents et constatez la cohérence des résultats obtenus.

2.7 Puisque – pour deux ensembles A et B – B^A est un ensemble, il peut lui-même servir comme domaine (ou codomaine) d'une fonction. Pour chaque élément $a \in A$, l'évaluation en a, notée ev_a, est un exemple important de fonction $B^A \longrightarrow B$. Définissez ce concept, et illustrez-le avec un exemple.

3 La composition des fonctions

3.1 Expliquez quand et comment deux fonctions données peuvent être composées ; utilisez la notation "$g \circ f$". Donnez des exemples de fonctions composées.

3.2 Montrez comment une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ détermine, par composition, pour tout ensemble X, deux nouvelles fonctions :

$$f \circ -\colon A^X \longrightarrow B^X \quad \text{et} \quad - \circ f\colon X^B \longrightarrow X^A.$$

(Souvenez-vous que B^X signifie : l'ensemble des fonctions de domaine X et codomaine B.)

3.3 Qu'est-ce qu'une endofonction ? La fonction identité sur un ensemble en est un exemple particulier ; décrivez-la en général. La notation pour la fonction identité sur un ensemble A sera $1_A\colon A \longrightarrow A$.

3.4 A propos de la composition des fonctions et des fonctions identités, il y a deux lois d'identité et une loi d'associativité qui sont très importantes. Enoncez ces lois, et prouvez-les !

3.5 Si f et g sont deux endofonctions de même (co)domaine, disons $f\colon A \longrightarrow A$ et $g\colon A \longrightarrow A$, alors les deux fonctions composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existent ; pourquoi ? A-t-on toujours que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont égales ? Ou cela n'arrive-t-il jamais ? Ou y a-t-il des exemples où $f \circ g = g \circ f$ et d'autres où $f \circ g \neq g \circ f$?

3.6 Supposons que f et g sont deux fonctions telles que les deux composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existent. Peut-on en conclure que f et g sont des endofonctions de même (co)domaine ?

3.7 Qu'est-ce qu'un diagramme commutatif d'ensembles et fonctions ? Et un diagramme non-commutatif ? Donnez des exemples ! Réécrivez les deux lois d'identité et la loi d'associativité pour la composition de fonctions avec des diagrammes commutatifs.

3.8 Que veut-on dire par : "la fonction $f\colon A \longrightarrow B$ se factorise à travers l'ensemble C" ? Montrez que toute fonction se factorise à travers son image. Déduisez-en qu'une fonction se factorise à travers $\mathbf{1}$ si et seulement si la fonction est constante (c'est-à-dire, son image est un singleton).

4 Injections, surjections, bijections

4.1 Qu'est-ce qu'une fonction injective ? Surjective ? Bijective ? On notera

$$f\colon A \rightarrowtail B,\ f\colon A \twoheadrightarrow B, \text{ et } f\colon A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$$

pour indiquer, respectivement, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une fonction f de A dans B. D'ailleurs, on dira souvent "injection" au lieu de "fonction injective", et pareil pour "surjection" et "bijection".

4.2 Prouvez que la composée de deux injections est une injection ; et que la composée de deux surjections est une surjection. Concluez que la composée de deux bijections est une bijection.

4.3 Prouvez que la fonction identité sur un ensemble est toujours une bijection.

4.4 Soit A un ensemble non-vide ; souvenez-vous que $\mathbf{0}$ est la notation pour l'ensemble vide. Montrez que l'unique fonction $\mathbf{0} \longrightarrow A$ ne peut pas être surjective mais qu'elle est toujours injective. Que peut-on dire à propos de $A \longrightarrow \mathbf{0}$? Et si A est aussi vide ?

4.5 Soient A et B des ensembles finis. Donnez des liens entre d'une part $|A|$ et $|B|$, et d'autre part l'existence d'une injection $A \rightarrowtail B$ (surjection $A \twoheadrightarrow B$, bijection $A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$).

4.6 Reformulez les définitions élémentaires d'injectivité et de surjectivité d'une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ en termes des préimages des éléments de son codomaine. Déduisez-en une caractérisation des bijections.

4.7 On a vu que toute fonction $f\colon A \longrightarrow B$ se factorise à travers son image ; soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \\ & f(A) \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

le diagramme commutatif correspondant. Prouvez que la fonction p est surjective, et que q est injective.

4.8 Appliquez le résultat précédent pour montrer que, si $i\colon A \rightarrowtail B$ est une injection, alors son domaine est en bijection avec un sous-ensemble de son codomaine. Et si $f\colon A \twoheadrightarrow B$ est une surjection, prouvez que son image est en bijection avec son codomaine.

4.9 On a vu que, pour un ensemble A quelconque, à tout élément $B \in \mathscr{P}A$ (donc un sous-ensemble $B \subseteq A$) correspond un élément de $\mathbf{2}^A$ (une fonction de A dans $\mathbf{2}$ qu'on appelle la fonction caractéristique de B). Montrez que cette correspondance donne une bijection $\mathscr{P}A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{2}^A$. Si A est un ensemble fini, déduisez-en que $|\mathscr{P}A| = |\mathbf{2}^A| = 2^{|A|}$ (un résultat que l'on avait déjà trouvé ailleurs).

4.10 Par analogie avec les notations $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ on utilise $\mathbf{n}$ pour noter un ensemble quelconque à n éléments ; pour fixer les idées on pose $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$. Soit maintenant A un ensemble quelconque, et $f\colon A \twoheadrightarrow \mathbf{n}$ une surjection ; démontrez que les préimages par f des éléments de $\mathbf{n}$ forment une partition de A.

4.11 On a aussi la réciproque au résultat précédent : montrez comment on peut construire, pour une partition $C_1, ..., C_n$ d'un ensemble A, une surjection de domaine A et de codomaine $\mathbf{n}$.

5 Fonctions simplifiables

5.1 On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & B \arrow[r, tail, "f"] & C \end{tikzcd},$$

dans lequel A, B et C sont des ensembles, et h, k et f des fonctions, et en particulier f est injective. Prouvez que, si $f \circ h = f \circ k$ alors $h = k$.

5.2 On dira qu'une fonction $f\colon B \longrightarrow C$ est simplifiable à gauche si elle satisfait la condition suivante : pour toute paire de fonctions

$$A \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} B\ ,$$

si $f \circ h = f \circ k$ alors $h = k$. Observez donc que le résultat précédent peut être réformulé comme : toute injection est simplifiable à gauche.

5.3 On peut aussi démontrer que : toute fonction simplifiable à gauche est injective. Pour cela on se donne une fonction $f\colon B \longrightarrow C$ dont on suppose la simplifiabilité à gauche, et on étudie le cas où une paire de fonctions

$$\mathbf{1} \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} B$$

est donnée : puisque leur domaine est $\mathbf{1}$, ces fonctions "sont" des éléments de B, et la simplifiabilité à gauche de f exprime alors son injectivité.

5.4 Toute fonction $f\colon B \longrightarrow C$ détermine par composition, pour tout ensemble A, une nouvelle fonction $f \circ -\colon B^A \longrightarrow C^A$. Que voudrait dire l'injectivité de cette nouvelle fonction ?

5.5 Résumez les résultats précédents en montrant le suivant : Pour une fonction $f\colon B \longrightarrow C$ les affirmations suivantes sont équivalentes :
(a) $f\colon B \longrightarrow C$ est injective,
(b) $f\colon B \longrightarrow C$ est simplifiable à gauche,
(c) pour tout ensemble A, la fonction $f \circ -\colon B^A \longrightarrow C^A$ est injective.

5.6 On considère le diagramme

$$B \overset{f}{\twoheadrightarrow} C \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} D$$

d'ensembles et fonctions ; en particulier on considère donc une fonction f qui est surjective. Prouvez que, si $u \circ f = v \circ f$ alors $u = v$.

5.7 Une fonction $f\colon B \longrightarrow C$ est dite simplifiable à droite si elle satisfait la condition suivante : pour toute paire de fonctions

$$C \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} D\ ,$$

si $u \circ f = v \circ f$ alors $u = v$. Concluez que toute fonction surjective est simplifiable à droite.

5.8 Prouvez la réciproque du résultat précédent : toute fonction simplifiable à droite est surjective. Cet exercice est assez difficile ; pour l'aborder on peut faire comme suit. Soit $f\colon B \longrightarrow C$ une fonction qui, par hypothèse, est simplifiable à droite. On considère les deux fonction parallèles

$$C \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \mathbf{2}$$

définies par :

$$\text{pour } c \in C,\ u(c) = 1 \text{ et } v(c) = \begin{cases} 1 \text{ si } f^*(c) \text{ n'est pas vide,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(Souvenez vous que $f^*(c)$ est la notation pour la préimage de $\{c\}$ par f. Et aussi que $\mathbf{2}$ note en principe un ensemble quelconque à deux éléments ; ici on a posé $\mathbf{2} = \{0, 1\}$.) On vérifie maintenant que $u \circ f = v \circ f$. Par simplifiabilité on en déduit que $u = v$, et cette égalité exprime la surjectivité de f (en termes de préimages non-vides).

5.9 Pour une fonction $f\colon B \longrightarrow C$, que voudrait dire l'injectivité de la fonction $- \circ f\colon D^C \longrightarrow D^B$, définie par composition, pour un ensemble D quelconque ?

5.10 Prouvez maintenant ce résumé : Pour une fonction $f\colon B \longrightarrow C$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) $f\colon B \longrightarrow C$ est surjective,
(b) $f\colon B \longrightarrow C$ est simplifiable à droite,
(c) pour tout ensemble D, la fonction $- \circ f\colon D^C \longrightarrow D^B$ est injective.

5.11 Concluez avec le théorème suivant : Pour une fonction $f\colon B \longrightarrow C$, les phrases suivantes sont équivalentes :
(a) $f\colon B \longrightarrow C$ est bijective,
(b) $f\colon B \longrightarrow C$ est simplifiable à gauche et simplifiable à droite,
(c) pour tout ensemble A et tout ensemble D, les deux fonctions $f \circ -\colon B^A \longrightarrow C^A$ et $- \circ f\colon D^C \longrightarrow D^B$ sont injectives.

6 Sections, rétractions, isomorphismes

6.1 “Une surjection est une partition de son domaine dont les parties sont indicées par les éléments de son codomaine.” Expliquez cette phrase sur quelques exemples ! (Il est utile d'utiliser la caractérisation de la surjectivité en termes de préimages.)

6.2 Soit $f\colon A \twoheadrightarrow B$ une surjection ; pensez-la comme une partition de A. Observez qu'il y a moyen de construire une fonction $s\colon B \longrightarrow A$ qui satisfait la propriété que $f \circ s = 1_B$; pensez à l'idée de choisir un "représentant" dans chaque partie de la partition de A donnée par f. Une telle fonction s, est-elle unique (pour une fonction f donnée) ? Exemples ?

6.3 "Une injection est une partie de son codomaine dont les éléments sont indicés par les éléments de son domaine." Expliquez sur des exemples ! (Pensez au fait que le domaine d'une injection est en bijection avec un sous-ensemble de son codomaine.)

6.4 On considère une injection $f\colon A \rightarrowtail B$ de domaine non-vide. Peut-on toujours construire une nouvelle fonction $r\colon B \longrightarrow A$ qui satisfait la propriété $r \circ f = 1_A$? Une telle fonction $r\colon B \longrightarrow A$, est-elle unique ? Donnez des exemples ! (Et que se passe-t-il si A est vide ?)

6.5 Soient des fonctions $r\colon A \longrightarrow B$ et $s\colon B \longrightarrow A$ telles que $r \circ s = 1_B$; donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "r"] & \\ B \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "1_B"'] & & B \end{tikzcd}$$

commute. On dira que r est une rétraction de s, et s une section de r. Prouvez que s est toujours une injection, et r une surjection.

6.6 Prouvez ce résumé des exercices précédents : Pour une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ entre ensembles, ces phrases sont équivalentes :
(a) f est surjective,
(b) f admet une section ;
si de plus A est non-vide, on a l'équivalence de :
(c) f est injective,
(d) f admet une rétraction.
L'unique fonction $\mathbf{0} \longrightarrow B$ est toujours injective, mais n'admet pas de rétraction, sauf si B est vide aussi.

6.7 Supposons que $f\colon A \longrightarrow B$ admet à la fois une section $s\colon B \longrightarrow A$ et une rétraction $r\colon B \longrightarrow A$. Prouvez que, dans ce cas, non seulement $r = s$ mais de plus, que cette rétraction/section est l'unique fonction $g\colon B \longrightarrow A$ qui satisfait les équations $f \circ g = 1_B$ et $g \circ f = 1_A$. On appelle cette unique fonction l'inverse de f ; elle sera notée $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$.

6.8 Concluez des résultats précédents qu'une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ est bijective si et seulement si elle admet un inverse. (L'astuce est de vérifier que, si A est vide, alors B est vide aussi...) Comment construit-on l'inverse d'une bijection dans la pratique ? Donnez des exemples !

6.9 Quand on écrit $A \cong B$, que veut-on dire ? Comment lit-on le symbole "$\cong$" ? Y a-t-il d'autres synonymes pour le mot "bijection" ?

7 Choix et détermination

7.1 On considère le problème suivant : pour deux fonctions de même codomaine, disons $h\colon A \longrightarrow C$ et $g\colon B \longrightarrow C$, on cherche une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ telle que $g \circ f = h$. C'est-à-dire, on cherche une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

commute. On appelle ceci "un problème de choix" ; pourquoi ? Qu'est-ce qui est choisi ? Donnez des exemples de problèmes de choix qui admettent une solution, et des problèmes de choix qui n'en admettent pas. Si un problème de choix admet une solution, est-elle unique ?

7.2 Pour une fonction $g\colon B \longrightarrow C$ donnée, que voudrait dire la surjectivité de la fonction

$$g \circ -\colon B^A \longrightarrow C^A,$$

définie par composition, pour un ensemble A quelconque ?

7.3 Indiquez comment le problème de trouver une section pour une fonction donnée est un problème de choix.

7.4 Prouvez que, si $g\colon B \longrightarrow C$ admet une section $s\colon C \rightarrowtail B$, alors pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow C$, le problème de choix résumé par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "?"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

admet une solution ! Observez que la solution ainsi trouvée $f\colon A \longrightarrow B$ dépend de la section s de g.

7.5 On a aussi la réciproque du résultat précédent : si $g\colon B \longrightarrow C$ est une fonction telle que, pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow C$, le problème de choix

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "?"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

admet une solution, alors g admet une section. Preuve ?

7.6 Voici un résumé des exercices précédents : Pour une fonction $g\colon B \longrightarrow C$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) $g\colon B \longrightarrow C$ admet une section,
(b) pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow C$, le problème de choix

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "?"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

admet une solution,
(c) pour tout ensemble A, la fonction $g \circ -\colon B^A \longrightarrow C^A$ est surjective.
Expliquez !

7.7 On considère maintenant un problème de choix

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, tail, "g"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "?"] \arrow[rr, "h"'] & & C. \end{tikzcd}$$

avec $g\colon B \rightarrowtail C$ injective. Montrez que la solution à ce problème, si elle existe, est unique.

7.8 On considère le problème de choix suggéré par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "?"] \arrow[rr, tail, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

avec $h\colon A \rightarrowtail C$ injective. Supposons que ce problème admette $f\colon A \longrightarrow B$ comme solution. Montrez que f est injective.

7.9 On considère le problème suivant : pour deux fonctions de même domaine, $f\colon A \longrightarrow B$ et $h\colon A \longrightarrow C$, on cherche une fonction $g\colon B \longrightarrow C$ telle que $g \circ f = h$. Donc on veut que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

commute. Pourquoi appelle-t-on ceci un “problème de détermination” ? Qu’est-ce qui est déterminé par quoi ? Un tel problème de détermination, admet-il toujours une solution ? Jamais ? Parfois ? Donnez des exemples !

7.10 Soit $f\colon A \longrightarrow B$ une fonction ; elle détermine, pour tout ensemble C, une fonction

$$- \circ f\colon C^B \longrightarrow C^A.$$

Que voudrait dire la surjectivité de $- \circ f$?

7.11 Dans quel sens le problème de trouver une rétraction à une fonction donnée est-il un problème de détermination ?

7.12 Démontrez : si $f\colon A \longrightarrow B$ est une fonction dont $r\colon B \twoheadrightarrow A$ est une rétraction, alors pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow C$ le problème de détermination

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

admet une solution. Que se passe-t-il si f admet plusieurs rétractions ?

7.13 Prouvez : si $f\colon A \longrightarrow B$ est une fonction telle que, pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow C$, le problème de détermination

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

admet une solution, alors f admet une rétraction.

7.14 Prouvez à l'aide des résultats précédents : Pour une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) $f\colon A \longrightarrow B$ admet une rétraction,
(b) pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow C$, le problème de détermination

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

admet une solution,
(c) pour tout ensemble C, la fonction $- \circ f\colon C^B \longrightarrow C^A$ est surjective.

7.15 On considère un problème de détermination

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "?"] & \\ A \arrow[ur, two heads, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

avec $f\colon A \twoheadrightarrow B$ surjective. Montrez que la solution à ce problème, si elle existe, est unique.

7.16 Soit le problème de détermination

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, dotted, "?"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, two heads, "h"'] & & C
\end{tikzcd}$$

avec h surjective ; supposons que le problème admet $g\colon B \longrightarrow C$ comme solution. Montrez la surjectivité de g.

7.17 Pour une bijection $b\colon X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ tout problème de choix

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, tail, two heads, "b"] & \\
A \arrow[ur, dotted, "?"] \arrow[rr, "h"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

admet une solution. Pourquoi ? De plus, cette solution est unique. Expliquez ! Que peut-on dire pour un problème de détermination comme le diagrame

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, dotted, "?"] & \\
X \arrow[ur, tail, two heads, "b"] \arrow[rr, "k"'] & & B
\end{tikzcd}$$

le suggère ?

7.18 Prouvez à l'aide des résultats précédents : une fonction $b\colon X \longrightarrow Y$ est une bijection si et seulement si, pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow Y$ et toute fonction $k\colon X \longrightarrow B$, on peut trouver des fonctions $f\colon A \longrightarrow X$ et $g\colon Y \longrightarrow B$ telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "b"] & B \\
A \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[ur, dotted, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

commute. De plus, dans ce cas, les fonctions f et g sont les uniques fonctions qui font commuter ce diagramme !

8 Résumé à propos d'injectivité et surjectivité

8.1 Pour une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ entre ensembles, dont le domaine est non-vide, les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) f est injective,
(b) f est simplifiable à gauche,
(c) pour tout ensemble D, la fonction $f \circ -\colon A^D \longrightarrow B^D$ est injective.
(d) f admet une rétraction,
(e) pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow C$ le problème de détermination

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "?"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

admet une solution,
(f) pour tout ensemble C, la fonction $- \circ f\colon C^B \longrightarrow C^A$ est surjective,
Si le domaine de f est vide et son codomaine est non-vide, alors f est injective, et les conditions (a-b-c) sont trivialement vraies, mais (d-e-f) sont fausses. Si le domaine et le codomaine de f sont vides, alors f est l'identité sur l'ensemble vide, qui est une bijection, et donc toutes les conditions ci-dessus sont trivialement vraies.

8.2 Pour une fonction $g\colon B \longrightarrow C$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) g est surjective,
(b) g est simplifiable à droite,
(c) pour tout ensemble D, la fonction $- \circ g\colon D^C \longrightarrow D^B$ est injective,
(d) g admet une section,
(e) pour toute fonction $h\colon A \longrightarrow C$ le problème de choix

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "?"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

admet une solution,
(f) pour tout ensemble A, la fonction $g \circ -\colon C^A \longrightarrow B^A$ est surjective.

9 Produit d'ensembles

9.1 Pour deux ensembles A et B donnés, définissez leur produit $A \times B$. Donnez quelques exemples de produits. Comment représente-t-on souvent un produit graphiquement ?

9.2 Soient A et B des ensembles ; prouvez que $A \times B \cong B \times A$. Montrez aussi que $A \times \mathbf{1} \cong A$, et $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$. Supposons maintenant que A et B sont des ensembles finis ; que vaut $|A \times B|$? Comment cela explique-t-il la terminologie “produit” ?

9.3 On peut bien sûr parler du produit d'un ensemble A avec lui-même : $A \times A$. Prouvez l'isomorphisme $A \times A \cong A^{\mathbf{2}}$.

9.4 Jusqu'à présent on a considéré des produits de deux ensembles (un “produit binaire” comme on dit parfois), comme $A \times B$. Comment peut-on définir un “produit ternaire” $A \times B \times C$? Ou $A \times B \times C \times D$? Ou même $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$?

9.5 Si on note $\mathbf{n}$ un ensemble quelconque avec exactement n éléments (et pour fixer les idées on peut poser $\mathbf{n} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$), prouvez que $A^{\mathbf{n}}$ est isomorphe au produit de n copies de A : le produit $A \times A \times ... \times A$ avec n facteurs.

9.6 Qu'est-ce qu'on entend par les “projections” d'un produit d'ensembles ? Prouvez que ces projections sont toujours des surjections, pour autant qu'on considère un produit d'ensembles non-vides. (Quel est le problème avec un produit comme $A \times \mathbf{0}$?)

9.7 Pourquoi est-ce que, pour A et B des ensembles non-vides, un problème de choix comme

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dr, "p_A"] & \\
C \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, "h"'] & & A
\end{tikzcd}$$

admet toujours une solution ? Donnez-en un exemple.

9.8 Si on considère des ensembles non-vides A et B, et on donne deux fonctions $h \colon C \longrightarrow A$ et $k \colon C \longrightarrow B$ de même domaine, on a donc le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[r, dotted, shift left, "?"] \arrow[r, dotted, shift right, "?"'] \arrow[urr, bend left, "h"] \arrow[drr, bend right, "k"'] & A \times B \arrow[ur, bend right, "p_A"'] \arrow[dr, bend left, "p_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

qui suggère deux problèmes de choix. En principe, chacun de ces problèmes de choix a sa propre solution (voir ci-dessus). Prouvez qu'il existe une seule fonction $f \colon C \longrightarrow A \times B$ qui est à la fois solution des deux problèmes de choix ; c'est-à-dire, une fonction f telle que $p_A \circ f = h$ et $p_B \circ f = k$. (L'hypothèse que A

et B soient non-vides, n'est en fait pas nécessaire, mais nous la supposons pour faciliter la preuve. Que se passe-t-il si soit A, soit B, soit les deux, sont vides ?)

9.9 La propriété remarquable du produit qu'on a découverte dans l'exercice précédent s'appelle la propriété universelle du produit. On peut en fait démontrer, pour trois ensembles quelconques A, B et C, qu'il existe un isomorphisme $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$. La démonstration de l'existence d'un tel isomorphisme n'est pas terriblement difficile sous l'hypothèse supplémentaire que A, B et C sont des ensembles finis ; on peut se baser sur le nombre d'éléments des ensembles impliqués.

9.10 Nous avons vu que, pour deux ensembles A et B et un élément $a \in A$, il existe une fonction $\mathrm{ev}_a \colon B^A \longrightarrow B$, l'évaluation des fonctions $f \in B^A$ en $a \in A$. Montrez comment ceci donne lieu à une fonction $\mathrm{ev} \colon A \times B^A \longrightarrow B$.

9.11 Un autre isomorphisme essentiel dit que, pour n'importe quels ensembles A, B et C, $C^{A\times B} \cong (C^B)^A$; cet isomorphisme montre ce qu'on appelle l'adjonction entre le produit et l'exponentiation d'ensembles. Donnez une preuve de l'isomorphisme pour des ensembles finis ; vous pouvez vous baser sur le nombre d'éléments des ensembles.

10 Relations entre deux ensembles

10.1 Soient A et B deux ensembles quelconques ; une relation R entre A et B est, par définition, un sous-ensemble $R \subseteq A \times B$ du produit. Expliquez la terminologie ; donnez des exemples ! Discutez les notations $R \colon A \multimap B$, aRb, $a \not{R} b$, $(a,b) \in R$, $(a,b) \notin R$. Expliquez les mots "domaine" et "codomaine" dans ce contexte.

10.2 Soient R et S deux relations entre deux ensembles A et B ; c'est-à-dire, $R \colon A \multimap B$ et $S \colon A \multimap B$. Observez que $R \cap S$, $R \cup S$ et R^{c} sont aussi des relations $A \multimap B$. Qu'entend-on par la relation totale entre A et B ? Et la relation vide ? Illustrez avec des exemples.

10.3 Pour une relation $R \colon A \multimap B$ donnée, qu'entend-on par la relation opposée à R ? Sa notation sera R^{op} ; on a donc que $R^{\mathsf{op}} \colon B \multimap A$! Donnez la relation opposée dans quelques exemples. Qu'est-ce que $(R^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}}$? Si on a deux relations $R \colon A \multimap B$ et $S \colon A \multimap B$, prouvez que

$$(R \cap S)^{\mathsf{op}} = R^{\mathsf{op}} \cap S^{\mathsf{op}} \text{ et } (R \cup S)^{\mathsf{op}} = R^{\mathsf{op}} \cup S^{\mathsf{op}}.$$

Faites attention : ne confondez pas la relation opposée R^{op} avec la relation complémentaire R^{c} ; en fait, prouvez que $(R^{\mathsf{c}})^{\mathsf{op}} = (R^{\mathsf{op}})^{\mathsf{c}}$.

10.4 Soit A un ensemble quelconque. Quelles sont les relations $\mathbf{0} \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} A$? Et $\mathbf{1} \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} A$?

10.5 Si A et B sont des ensembles finis, disons $|A| = n$ et $|B| = m$, combien de relations existe-t-il entre A et B ? Constatez la cohérence avec le résultat précédent.

10.6 Puisqu'une relation $R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$ est un sous-ensemble du produit $A \times B$, on peut considérer sa fonction caractéristique $\chi_R\colon A \times B \longrightarrow \mathbf{2}$. Construisez-la pour quelques exemples de relations ; observez comment χ_R caractérise (le mot est bien choisi !) les couples $(a, b) \in A \times B$ qui sont en relation (pour la relation R bien sûr).

10.7 Pour deux ensembles finis A et B, on représente souvent une relation $R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$ par sa matrice booléenne $\mathscr{M}_R$. Qu'est-ce que c'est ? Donnez la matrice booléenne pour quelques exemples de relations.

10.8 Soient A et B des ensembles finis, et considérons deux relations $R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$ et $S\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$. On peut donc considérer les relations R^{c}, $R \cap S$ et $R \cup S$ (qui sont toutes $A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$) et R^{op} (qui est $B \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} A$). Comment peut-on construire les matrices booléennes de ces nouvelles relations à partir des matrices $\mathscr{M}_R$ et $\mathscr{M}_S$?

11 La composition des relations

11.1 Pour des relations $R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$ et $S\colon B \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} C$, définissez la relation composée $S \circ R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} C$. Calculez quelques exemples de relations composées.

11.2 Qu'est-ce que la relation diagonale, notée Δ_A, sur un ensemble A ? A quoi ressemble la matrice booléenne de la relation diagonale sur un ensemble fini ? Comment cela explique-t-il la terminologie ?

11.3 Soient $R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$ et $S\colon B \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} C$ deux relations entre ensembles finis ; on peut calculer la relation composée $S \circ R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} C$. A propos des matrices booléennes de ces trois relations, on a que $\mathscr{M}_{S \circ R} = \mathscr{M}_S \cdot \mathscr{M}_R$. Cette formule, que nous dit-elle ? Expliquez en particulier comment on calcule le produit de deux matrices booléennes, et prouvez ensuite cette formule.

11.4 Pour la composition des relations on a deux lois d'identité et une loi d'associativité. Enoncez ces lois ! (Qu'est-ce que la "relation identité" sur un ensemble ?) Pour des relations entre ensembles finis, traduisez ces lois en termes de matrices booléennes.

11.5 Travaillons avec des ensembles et des relations comme le diagramme

$$A \overset{R}{\relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow} B \underset{S_2}{\overset{S_1}{\rightrightarrows}} C \overset{T}{\relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow} D$$

les indique. Expliquez et démontrez (ce n'est pas facile !) les formules suivantes :

$$T \circ (S_1 \cup S_2) = (T \circ S_1) \cup (T \circ S_2),$$

$$(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R);$$

on parle de la distributivité de la composition des relations par rapport à leur réunion. (Quant à la distributivité des relations par rapport à leur intersection, on a toujours l'inclusion

$$T \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (T \circ S_1) \cap (T \circ S_2)$$

mais rarement l'égalité.)

11.6 Soient $R\colon A \relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow B$ et $S\colon B \relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow C$ des relations. Prouvez que $(S \circ R)^{\mathsf{op}} = R^{\mathsf{op}} \circ S^{\mathsf{op}}$. Faites attention : l'ordre de la composition a changé ; dessinez un diagramme pour bien comprendre la situation ! Quelle est la relation opposée de la relation diagonale $\Delta_A\colon A \relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow A$?

12 Fonctions et relations

12.1 Toute fonction $f\colon A \longrightarrow B$ détermine une relation $G_f\colon A \relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow B$ qu'on appelle le graphe de f. Définissez ce concept, et donnez des exemples. D'où vient la terminologie ?

12.2 Prouvez que, pour des fonctions entre ensembles

$$A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C\ ,$$

le graphe de la fonction composée $g \circ f$ est la composée des graphes de g et f ; c'est-à-dire, que $G_{g \circ f} = G_g \circ G_f$. Montrez aussi que le graphe de la fonction identité sur un ensemble A est la relation diagonale sur A : $G_{1_A} = \Delta_A$.

12.3 Il n'est pas vrai que toute relation $R\colon A \relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow B$ est le graphe d'une fonction $f\colon A \longrightarrow B$. Pour se convaincre de ce fait, il est utile de considérer des exemples de relations et (graphes de) fonctions entre deux ensembles finis, et de comparer leurs matrices booléennes respectives ; observez les particularités des matrices booléennes des graphes de fonctions.

12.4 Définissez les concepts de relation “partout définie” et de relation “fonctionnelle” ; caractérisez maintenant les graphes de fonctions.

12.5 Soient trois ensembles A, B et C, et des relations $R\colon A \multimap B$, $S\colon B \multimap C$ et $T\colon A \multimap C$. On a donc que $S \circ R \subseteq A \times C$, et aussi $T \subseteq A \times C$; il est par conséquent sensé de supposer $S \circ R \subseteq T$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "S", "\circ" marking] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\subseteq$}"] & \\
A \arrow[ur, "R", "\circ" marking] \arrow[rr, "T"', "\circ" marking] & & C
\end{tikzcd}$$

résume la situation. Que veut dire cette inclusion des relations ? Donnez des exemples de cette situation !

12.6 Pour des relations $R\colon A \multimap B$, $S\colon B \multimap C$ et $T\colon A \multimap C$ on peut aussi s’intéresser à la situation où $T \subseteq S \circ R$, comme le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "S", "\circ" marking] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & \\
A \arrow[ur, "R", "\circ" marking] \arrow[rr, "T"', "\circ" marking] & & C
\end{tikzcd}$$

l’indique. Interprétez, et donnez un exemple !

12.7 Soit $f\colon A \longrightarrow B$ une fonction ; on considère son graphe, $G_f\colon A \multimap B$, et la relation opposée au graphe, $G_f^{\mathsf{op}}\colon B \multimap A$. On peut donc considérer les relations composées $G_f^{\mathsf{op}} \circ G_f\colon A \multimap A$ et $G_f \circ G_f^{\mathsf{op}}\colon B \multimap B$. Démontrez les inclusions indiquées dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[rr, "\Delta_B", "\circ" marking] \arrow[dr, "G_f^{\mathsf{op}}", "\circ" marking] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & & B \arrow[dl, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] \\
A \arrow[ur, "G_f", "\circ" marking] \arrow[rr, "\Delta_A"', "\circ" marking] & & A \arrow[ur, "G_f"', "\circ" marking] &
\end{tikzcd}$$

12.8 Soit $R\colon A \multimap B$ une relation. Prouvez l’équivalence des affirmations suivantes :

(a) R est fonctionnelle,

(b) $R \circ R^{\mathsf{op}} \subseteq \Delta_B$.

Prouvez aussi l’équivalence de :

(c) R est partout définie,

(d) $\Delta_A \subseteq R^{\mathsf{op}} \circ R$.

Cet exercice n’est pas facile ; la solution demande une très bonne comphréhension des notions impliquées !

12.9 Si une relation $R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$ satisfait les inclusions

$$\Delta_A \subseteq R^{\mathsf{op}} \circ R \text{ et } R \circ R^{\mathsf{op}} \subseteq \Delta_B,$$

alors on dit que R est adjointe à sa relation opposée. Concluez qu'une relation donnée est le graphe d'une fonction si et seulement si elle est adjointe à sa relation opposée.

12.10 Prouvez que, si on a deux relations et des inclusions comme dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[rr, "\Delta_B", "\circ" marking] \arrow[dr, "S", "\circ" marking] & & B \\
A \arrow[ur, "R", "\circ" marking] \arrow[rr, "\Delta_A"', "\circ" marking] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & & A \arrow[ur, "R"', "\circ" marking] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] &
\end{tikzcd}$$

alors $S = R^{\mathsf{op}}$ (ou équivalent, $R = S^{\mathsf{op}}$).

12.11 Démontrez le résumé suivant des résultats précédents : Pour une relation $R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) il existe une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ telle que $R = G_f$,
(b) R est une relation fonctionnelle et partout définie,
(c) on a que $R \circ R^{\mathsf{op}} \subseteq \Delta_B$ et $\Delta_A \subseteq R^{\mathsf{op}} \circ R$ (où R^{op} est la relation opposée à R),
(d) il existe une relation $S\colon B \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} A$ telle que $R \circ S \subseteq \Delta_B$ et $\Delta_A \subseteq S \circ R$.

13 Relations binaires

13.1 Une relation binaire sur un ensemble A est une relation de A dans A, donc une relation $R\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} A$, donc un sous-ensemble $R \subseteq A \times A$. Donnez des exemples de relations binaires ! On note souvent (A, R) pour l'ensemble A muni de la relation binaire R.

13.2 Quand dit-on qu'une relation binaire R sur un ensemble A est réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ? Donnez à chaque fois des exemples !

13.3 Attention avec la notion de "antisymétrie" : une relation binaire peut être non-symétrique sans être antisymétrique ! Exemple ? Prouvez : une relation binaire sur un ensemble A, qui est à la fois symétrique et antisymétrique, est contenue dans la relation diagonale Δ_A.

13.4 Soit A un ensemble fini, et R une relation binaire sur A avec matrice booléenne $\mathscr{M}_R$. Comment voit-on sur la matrice $\mathscr{M}_R$ que R est réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Et - plus difficile - comment la transitivité se traduit-elle en termes de la matrice booléenne ?

13.5 On considère maintenant deux relations binaires sur un même ensemble A ; disons $R \subseteq A \times A$ et $S \subseteq A \times A$. Leur intersection $R \cap S$ est évidemment toujours une relation binaire sur A. Si R et S sont réflexives (symétriques, antisymétriques, transitives), montrez que $R \cap S$ l'est aussi. Qu'en est-il pour la réunion $R \cup S$? Et pour la relation complémentaire R^{c} ? Et pour la relation opposée R^{op} ?

13.6 Soit (A, R) un ensemble muni d'une relation binaire quelconque. Prouvez que la relation binaire $R \cap R^{\mathsf{op}}$ est toujours symétrique.

13.7 Jusqu'à présent on a toujours parlé d'une relation binaire sur un ensemble A ; c'est un sous-ensemble $R \subseteq A \times A$. Que serait donc une relation ternaire sur A ? Et une relation unaire ? Ou, en général, une relation n-aire ? Attention : est-il sensé de parler d'une relation nullaire (donc $n = 0$) ? Trouvez des exemples !

14 Relations d'équivalence

14.1 On définit une relation d'équivalence sur un ensemble A comme une relation binaire sur A qui est transitive, réflexive et symétrique. Donnez des exemples. La notation pour un ensemble A muni d'une relation d'équivalence est $(A, \sim)$; on lit $a \sim b$ comme "a est équivalent à b".

14.2 Sur un même ensemble A on peut avoir plusieurs relations d'équivalence ; pour les distinguer on peut les noter $\sim_1$, $\sim_2$, etc. Est-ce que l'intersection de deux équivalences est toujours une équivalence ? Et leur réunion ? La relation complémentaire d'une équivalence ; sa relation opposée ? Vous pouvez utiliser des résultats prouvés plus haut !

14.3 Quelle est la plus petite relation d'équivalence sur un ensemble A ? Et la plus grande ?

14.4 Soit $(A, \sim)$ un ensemble muni d'une équivalence. Qu'est-ce que la classe d'équivalence d'un élément $a \in A$? La notation pour cette classe d'équivalence sera $[a]$. Quand a-t-on l'égalité de deux classes d'équivalence, $[a] = [a']$? Prouvez maintenant que les classes d'équivalence forment une partition de A !

14.5 Montrez comment toute partition de A donne lieu à une équivalence $(A, \sim)$ dont les classes d'équivalence sont précisément la partition.

14.6 Toujours à propos d'un ensemble muni d'une équivalence $(A, \sim)$, qu'est-ce que le quotient de A par l'équivalence $\sim$? La notation pour le quotient est $A/\!\sim$; on dit que A est quotienté par la relation $\sim$. Notez qu'il existe donc une fonction surjective $q_A \colon A \twoheadrightarrow A/\!\sim$ qui envoie un élément $a \in A$ sur sa classe d'équivalence $[a]$.

14.7 Soit $f\colon A \longrightarrow B$ une fonction entre ensembles. On définit une relation binaire R sur A comme suit :

$$R = \{(a, a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}.$$

Prouvez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur A ! On l'appelle l'équivalence nucléaire associée à f ; dans la suite elle sera notée $\sim_f$. Que se passe-t-il si la fonction f est injective ?

14.8 Soit $(A, \sim)$ un ensemble muni d'une équivalence ; on sait qu'il existe donc une surjection $q_A\colon A \twoheadrightarrow A/\sim$. Quelle est la relation nucléaire associée à cette surjection ?

14.9 Soit une fonction $f\colon A \longrightarrow B$. Prouvez que le quotient de A par l'équivalence nucléaire associée à f est isomorphe à l'image de f : $A/\sim_f \cong f(A)$. Prouvez en particulier que les éléments du quotient (i.e. les classes d'équivalence) sont donnés par les préimages par f des éléments de l'image de f : $[a] = f^*(f(a))$.

14.10 Soit une surjection $f\colon A \twoheadrightarrow B$ entre ensembles. Prouvez que la fonction $b\colon A/\sim_f \longrightarrow B$ qui envoie une classe d'équivalence $[a]$ sur $f(a)$ est bijective et fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, bend right, "q_A"'] & & B \\ & A/\sim_f \arrow[ur, tail, two heads, bend right, "b"'] & \end{tikzcd}$$

14.11 Pour résumer les résultats précédents, indiquez, pour un ensemble A, les liens entre :
(a) la donnée d'une relation d'équivalence sur A,
(b) la donnée d'une partition de A,
(c) la donnée d'une surjection dont A est le domaine.

15 Relations d'ordre

15.1 Une relation d'ordre sur un ensemble A est, par définition, une relation binaire qui est transitive, réflexive et antisymétrique. Expliquez cette terminologie en donnant des exemples. La notation habituelle pour un ensemble A muni d'une relation d'ordre est $(A, \leq)$; on lit $a \leq b$ comme "a est moins grand ou égal à b". On parle aussi d'un ensemble ordonné, ou tout simplement un ordre, si on veut dire un ensemble muni d'une relation d'ordre.

15.2 Montrez que, pour un ensemble quelconque A, l'ensemble de ses sous-ensembles $\mathscr{P}A$ est un ordre pour la relation "$\subseteq$".

15.3 Prouvez : la relation diagonale Δ_A est la seule relation binaire sur A qui est à la fois un ordre et une équivalence.

15.4 Un même ensemble A peut, en général, être muni de plusieurs relations d'ordre différentes ; dans cette situation on les note $\leq_1$, $\leq_2$, etc. pour les distinguer. Donnez des exemples !

15.5 Prouvez que l'intersection de deux relations d'ordre sur un même ensemble A est toujours un ordre sur A. Qu'en est-il pour la réunion de deux ordres ? Et le complémentaire d'un ordre ? Et la relation opposée ? (Vous pouvez récupérer des résultats prouvés précédemment !)

15.6 Soit A un ensemble ; un préordre sur A est, par définition, une relation binaire sur A qui est réflexive et transitive. On note souvent $(A, \preceq)$ pour un préordre. (Un ordre est donc un préordre qui est en plus antisymétrique.) Donnez des exemples de préordres.

15.7 Montrez - vous pouvez utiliser des résultats obtenus plus haut - que, si $(A, \preceq)$ est un préordre, alors $\preceq \cap \preceq^{\mathsf{op}}$ est une relation d'équivalence. Notons cette équivalence $\sim$. Comment le quotient $A/\!\sim$ est-il naturellement muni d'un ordre ?

15.8 Soient $(A, \leq)$ et $(B, \leq)$ deux ensembles ordonnés, et $f\colon A \longrightarrow B$ une fonction. Quand dit-on que f est croissante ? Et pleine ? Donnez quelques exemples !

15.9 Soient des ordres $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ et $(C, \leq)$, et des fonctions croissantes $f\colon A \longrightarrow B$ et $g\colon B \longrightarrow C$. Prouvez que la composée $g \circ f\colon A \longrightarrow C$ est toujours croissante. Prouvez aussi que la fonction identité $1_A\colon A \longrightarrow A$ est croissante.

15.10 Dans l'exercice précédent, remplacez le mot "croissante" par "pleine" : est-ce que la composée de deux fonctions pleines est toujours pleines, et la fonction identité est-elle pleine ?

15.11 Prouvez que toute fonction pleine entre deux ordres est injective ! Est-ce que toute fonction injective entre ordres est aussi pleine ?

15.12 Soient deux ordres $(A, \leq)$ et $(B, \leq)$; notons par $\mathsf{FctCr}(A, B)$ l'ensemble des fonctions croissantes de A dans B :

$$\mathsf{FctCr}(A, B) = \{f\colon A \longrightarrow B \mid f \text{ est une fonction croissante}\}.$$

Prouvez que la relation binaire sur $\mathsf{FctCr}(A, B)$ définie par

$$fRg \text{ signifie : pour tout } a \in A \text{ on a } f(a) \leq g(a) \text{ dans } B$$

est une relation d'ordre. On l'appelle l'ordre ponctuel sur l'ensemble $\mathsf{FctCr}(A, B)$; on le notera désormais $f \leq g$.

15.13 Si $(A, \leq)$ et $(B, \leq)$ sont des ordres, montrez que la relation binaire suivante definit un ordre sur l'ensemble $A \times B$:

$$(a, b)R(a', b') \text{ signifie : } a \leq a' \text{ dans } A \text{ et } b \leq b' \text{ dans } B.$$

On parle de l'ordre composante-par-composante du produit ; on le notera désormais $(a, b) \leq (a', b')$. Prouvez que les projections $p_A \colon A \times B \twoheadrightarrow A$ et $p_B \colon A \times B \twoheadrightarrow B$ sont croissantes. Sont-elles aussi pleines ?

15.14 Toujours pour deux ordres $(A, \leq)$ et $(B, \leq)$, prouvez que la fonction appelée évaluation et définie par

$$\mathrm{ev} \colon A \times \mathsf{FctCr}(A, B) \longrightarrow B \colon (a, f) \mapsto \mathrm{ev}(a, f) = f(a)$$

est croissante. Bien sûr on considère que $\mathsf{FctCr}(A, B)$ est muni de l'ordre ponctuel, et que le produit $A \times \mathsf{FctCr}(A, B)$ est ordonné composante-par-composante.

Table des matières

Un grand merci à Mathieu Dupont pour la correction de ces notes. Merci aussi à Isabelle Berlanger pour ses commentaires. En espérant que ce cours soit non seulement intéressant mais aussi amusant,

Isar Stubbe.