

Géométrie affine, groupes classiques

Isar Stubbe

(Version du 25 avril 2025 à 10:03)

Table des matières

1	Espaces affines	1
1.1	Sous-espace affine	1
1.2	Sous-espace affine engendré	3
1.3	Repère affine	6
1.4	Quelques résultats géométriques	9
1.5	Exercices	17
2	Applications affines	29
2.1	Le groupe linéaire	29
2.2	Le groupe affine	33
2.3	Le groupe des dilatations	37
2.4	Encore quelques résultats géométriques	40
2.5	Exercices	46
3	Isométries	65
3.1	Le groupe euclidien	65
3.2	Le groupe orthogonal	68
3.3	Classification des isométries affines	76
3.4	De nouveau quelques résultats géométriques	82
3.5	Exercices	90
	Références	109

Der wesentlichste Begriff, der bei den folgenden Auseinandersetzungen notwendig ist, ist der einer Gruppe von räumlichen Änderungen.

Le concept le plus essentiel, nécessaire dans les discussions qui suivent, est celui de groupe de transformations spatiales.

Felix Klein (1849–1925)

1. Espaces affines

1.1. Sous-espace affine

Un espace vectoriel V sur un corps K est un ensemble de *vecteurs* dont on peut calculer toute combinaison linéaire : pour tout x_1, \dots, x_k dans V et tout $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans K , il existe un unique $\sum_i \alpha_i x_i$ dans V ; et bien sûr il faut des axiomes adéquats pour gérer ses opérations. Un sous-espace vectoriel de V est un sous-ensemble $S \subseteq V$ fermé pour les combinaisons linéaires. Tout espace vectoriel V admet une base, et chaque base est de même cardinal : c'est la dimension de V . Dans la suite, nous allons considérer uniquement des **espaces vectoriels de dimension finie**.

Voici la notion cruciale de la géométrie affine :

Définition 1.1.1. Soit un espace vectoriel V . La translation par $a \in V$ est l'application

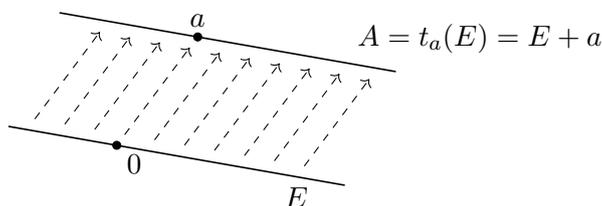
$$t_a : V \rightarrow V : x \mapsto x + a.$$

Toute translation est bijective, et il est facile de voir que :

Proposition 1.1.2. Soit un espace vectoriel V . L'ensemble $T(V)$ des translations est un sous-groupe de $\text{Bij}(V)$, isomorphe à $(V, +, 0)$, et donc commutatif.

Notons qu'une translation n'est *pas* une application linéaire (sauf la translation par $0 \in V$) !

Définition 1.1.3. Soit un espace vectoriel V . Un sous-ensemble $A \subseteq V$ est un sous-espace affine si A est l'image par une translation d'un sous-espace vectoriel¹ de V , que l'on appelle alors sa direction. La dimension d'un sous-espace affine est la dimension de sa direction. Deux sous-espaces affines sont parallèles s'ils ont même direction.



Explicitement, si $E \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel et $a \in V$, alors l'ensemble

$$A = t_a(E) = \{x + a \in V \mid x \in E\} = E + a$$

1. Cette définition implique en particulier qu'un sous-espace affine ne peut pas être vide. Dans certaines références on inclut l'ensemble vide comme sous-espace affine ("de dimension -1 ").

est, par définition, un sous-espace affine de direction E ; et puisque $0 \in E$ on a nécessairement $a = 0 + a \in A$. Autrement dit, $A \subseteq V$ est un sous-espace affine *s'il existe* $a \in A$ tel que

$$E = t_{-a}(A) = \{x - a \mid x \in A\} = A - a$$

est un sous-espace vectoriel. Par ailleurs, on vérifie facilement que, pour deux sous-espaces vectoriels $E, F \subseteq V$ et $a, b \in V$,

$$E + a = F + b \iff a - b \in E \quad \text{et} \quad E = F.$$

Cela implique que la direction d'un sous-espace affine $A \subseteq V$ est unique et est donnée par $E = A - a$ pour tout $a \in A$.

Il est commode d'écrire A_0 pour la direction d'un sous-espace affine $A \subseteq V$; et si $B \subseteq V$ est un autre sous-espace affine, on écrira $A \parallel B$ lorsque $A_0 = B_0$, c'est à dire, lorsque A et B sont parallèles. Clairement, si $\dim(V) = n$, alors pour tout $k \leq n$ il existe des sous-espaces affines de dimension k ; et la dimension de tout sous-espace affine est au plus n . Bien sûr, on parle de *droites affines* (*plans affines*, *hyperplans affines*) lorsque la direction est une droite vectorielle (plan vectoriel, hyperplan vectoriel). Les *points* de V sont exactement ses sous-espaces affines de dimension 0.

Notons bien la terminologie : tout élément $v \in V$ est d'une part un *vecteur*, et d'autre part un *point*. Bien sûr, c'est deux fois la même chose! Mais en parlant de "vecteur" on insiste sur la nature vectorielle de l'espace V , alors que le mot "point" évoque plutôt la nature affine de l'espace V . Par exemple, une droite affine est déterminée par deux points (distincts), alors que deux vecteurs (indépendants) déterminent un sous-plan vectoriel. Par ailleurs, l'élément $0 \in V$ est un *vecteur* très particulier (le neutre pour la somme!), alors que c'est un *point* comme tout autre.

Il est maintenant presque banal de noter :

Proposition 1.1.4 (5e Postulat d'Euclide). *Soit V un espace vectoriel. Pour tout sous-espace affine $A \subseteq V$ et tout point $a \in V$, il existe un unique sous-espace affine $B \subseteq V$ parallèle à A et contenant a .*



Démonstration. On pose $B = A_0 + a$. Si B' est un autre sous-espace affine parallèle à A , alors nécessairement $B' = A_0 + b$; et donc $a \in B'$ si et seulement si $a = x + b$ pour un certain $x \in A_0$, donc $a - b \in A_0$, d'où $B = t_a A_0 = t_b A_0 = B'$. \square

Autrement dit, pour toute dimension $k \leq n$, on a une action du groupe $T(V) \cong (V, +, 0)$ sur l'ensemble des sous-espaces affines de dimension k de V ; l'orbite d'un sous-espace affine $A \subseteq V$ est l'ensemble des sous-espaces affines parallèles à A . Pour les points de V (i.e. pour $k = 0$), l'action de $T(V)$ est donc *simplement transitive* : pour tout $a, b \in V$ il existe un unique $t \in T(V)$ tel que $ta = b$. (Voir les exercices pour un approfondissement de ce point de vue.)

1.2. Sous-espace affine engendré

L'intersection de sous-espaces vectoriels est toujours un sous-espace vectoriel. Pour les sous-espaces affines on a plutôt :

Proposition 1.2.1. *Une intersection de sous-espaces affines $(A_i)_i \subseteq V$ d'un espace vectoriel V est soit vide, soit un sous-espace affine (dont la direction est alors l'intersection des directions).*

Démonstration. Supposons que $a \in \bigcap_i A_i$, alors par bijectivité² de $t_a : V \rightarrow V : x \mapsto x + a$ on a que $(\bigcap_i A_i) - a = \bigcap_i (A_i - a)$, qui – en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels – est bien un sous-espace vectoriel de V . \square

Par conséquent, pour tout sous-ensemble non-vide $X \subseteq V$ d'un espace vectoriel, l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant X est l'unique plus petit sous-espace affine contenant X . On l'appelle le sous-espace affine engendré par X , noté $\langle X \rangle$, ou tout simplement $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ si $X = \{a_0, \dots, a_k\}$.

Le sous-espace affine engendré par deux points distincts $a, b \in V$ est au minimum de dimension 1 (car ça ne peut pas être un singleton!), donc une droite affine. Pour que $D \subseteq V$ soit une droite affine contenant a et b , il faut que sa direction soit une droite vectorielle $D_0 = Kv$ telle que $D = D_0 + a$. Mais alors $b \in D$ implique que $b = \alpha v + a$ pour un certain $\alpha \neq 0$ (car $a \neq b$), et donc $v = \alpha^{-1}(b - a)$; ainsi nécessairement $D_0 = K(b - a)$ et $D = K(b - a) + a$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} x \in D &\iff \exists \alpha \in K : x = \alpha(b - a) + a \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in K : x = \alpha a + \beta b \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

Plus généralement on a :

Proposition 1.2.2. *Soit un espace vectoriel V . Le sous-espace affine engendré par $\{a_0, \dots, a_k\} \subseteq V$ est*

$$\langle a_0, \dots, a_k \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \mid \alpha_0, \dots, \alpha_k \in K, \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Démonstration. Pour faciliter les notations, posons $S = \{ \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in K, \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \}$, alors on a (attention aux indices des sommes dans les deux dernières lignes!)

$$S - a_0 = \left\{ \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \right) - a_0 \mid \alpha_0, \dots, \alpha_k \in K, \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \right\}$$

2. Pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$, l'image directe preserve les réunions quelconques ; et si f est injective alors l'image directe preserve aussi les intersections quelconques.

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \right) - \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i \right) a_0 \mid \alpha_0, \dots, \alpha_k \in K, \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{i=0}^k \alpha_i (a_i - a_0) \mid \alpha_0, \dots, \alpha_k \in K, \alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i (a_i - a_0) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K \right\}.
 \end{aligned}$$

On voit ainsi que $S - a_0$ est le sous-espace *vectoriel* engendré par $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$, et donc S est un sous-espace *affine* contenant $\{a_0, \dots, a_k\}$. Par ailleurs, si A est un autre sous-espace affine contenant $\{a_0, \dots, a_k\}$, alors sa direction $A_0 = A - a_0$ est un sous-espace vectoriel contenant en particulier $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$, et donc aussi tout $S - a_0$. Ainsi on a $S \subseteq A_0 + a_0 = A$, et S est donc bien l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant $\{a_0, \dots, a_k\}$. \square

Pour faciliter la discussion qui suit, introduisons la terminologie (classique) suivante :

Définition 1.2.3. Soit un espace vectoriel V et $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq V$, alors l'expression

$$\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_k a_k \quad \text{avec} \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1 \text{ dans } K$$

est appelée le *barycentre*³ des points a_0, \dots, a_k de coefficients (ou de poids) $\alpha_0, \dots, \alpha_k$.

Ainsi on peut résumer que le sous-espace affine engendré $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ contient exactement tous les barycentres des points a_0, \dots, a_k .

Pour deux points distincts $a \neq b$, le sous-espace affine engendrée par a et b est bel et bien l'unique droite affine passant par a et b . Pour simplifier les notations dans la suite, on écrira ab pour cette droite affine. Sa direction est $(ab)_0 = K(b - a)$, montrant immédiatement (à l'aide du "5e Postulat") que :

Corollaire 1.2.4. Soit un espace vectoriel V . Pour $a \neq b, c \in V$, l'unique droite affine parallèle à ab et passant par c est $K(b - a) + c$.

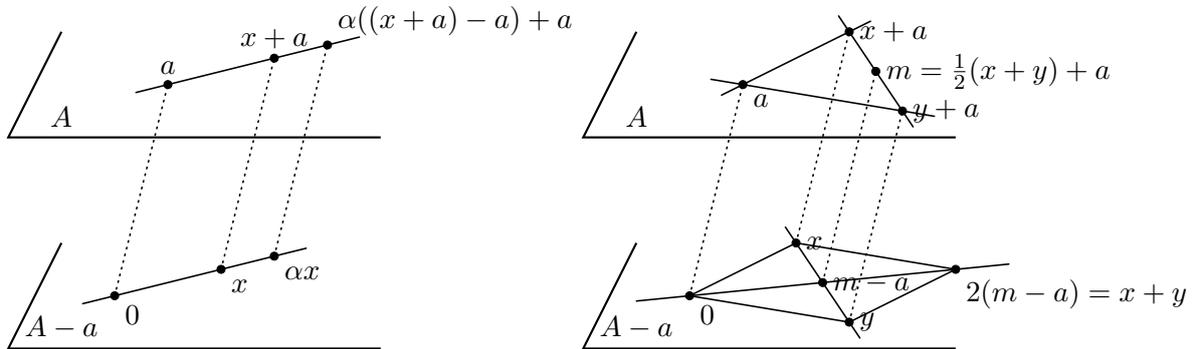
Ces droites affines nous aident à caractériser les sous-espaces affines quelconques, confirmant ainsi l'idée géométrique qu'un sous-espace affine de V est "rectiligne dans toute direction" :

Proposition 1.2.5. Soit V un espace vectoriel sur un corps K de $\text{car}(K) \neq 2$. Alors un sous-ensemble $A \subseteq V$ est un sous-espace affine si et seulement si $A \neq \emptyset$ et pour tout $a \neq b \in A$ aussi la droite affine contenant a et b est dans A .

Démonstration. Pour tout $a \neq b \in A$ on a $ab = \langle a, b \rangle \subseteq A$ parce que la droite affine ab est l'espace affine engendré par $\{a, b\}$. Réciproquement, prenons $a \in A \neq \emptyset$; il suffit de vérifier que $A - a$ est un sous-espace vectoriel. (i) Bien sûr, $0 = a - a \in A - a$. (ii) Pour $0 \neq x \in A - a$ et

3. D'après les travaux de August Ferdinand Möbius (1790–1868), notamment son livre *Der barycentrische Calcul*, publié en 1827 à Leipzig.

$\alpha \in K$ on a aussi $\alpha((x+a)-a)+a = \alpha x + a \in A$ donc $\alpha x \in A-a$ (et pour $x=0$ on est dans le cas précédent).

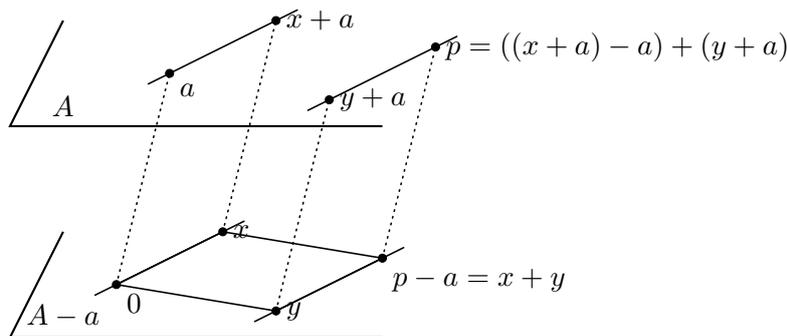


(iii) Pour $x \neq y \in A-a$ on a $x+a, y+a \in A$ et donc tout $b = \alpha((x+a)-(y+a))+(y+a) \in A$ (c'est la droite affine passant par $x+a$ et $y+a$). Posant $\alpha = \frac{1}{2}$ on retrouve un point $m = \frac{1}{2}(x+y)+a \in A$, et donc $m-a = \frac{1}{2}(x+y) \in A-a$, et ainsi (par le cas précédent) $2(m-a) = x+y \in A-a$. (Pour $x=y$ on est dans le cas précédent.) \square

Dans cette démonstration on a utilisé que $2 \neq 0$ dans K (pour calculer le "milieu" d'un segment). Et en effet, l'énoncé est faux dans p.e. $(\mathbb{F}_2)^2$: le sous-ensemble $A = \{0 = (0,0), a = (1,0), b = (0,1)\}$ contient les droites $0a, 0b$ et ab , mais n'est pas affine. (L'ensemble contient 0 , donc est un sous-espace affine si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel ; mais alors il faudrait que $a+b \in A$, quod non.) On peut enlever cette restriction, avec un énoncé quelque peu adapté :

Proposition 1.2.6. *Soit V un espace vectoriel. Alors un sous-ensemble $A \subseteq V$ est un sous-espace affine si et seulement si $A \neq \emptyset$ et pour tout $a \neq b, c \in A$ aussi la droite affine parallèle à ab et passant par c est dans A .*

Démonstration. Rappelons que la droite affine parallèle à ab et passant par c est $K(b-a)+c$. Si $A \subseteq V$ est un sous-espace affine, alors pour tout $a \neq b \in A$ on a $b-a \in A_0$, donc $K(b-a) \subseteq A_0$, et donc la droite affine $K(b-a)+c$ est bien dans $A = A_0+c$ pour tout $c \in A$. Réciproquement, supposons que $A \neq \emptyset$ contient non seulement toutes les droites affines passant par deux de ses points, mais aussi toutes les droites affines parallèles à celles-là et passant par un troisième point de A . Les points (i) et (ii) de la démonstration précédente restent valables. On donne un argument alternatif pour le point (iii), n'utilisant pas l'hypothèse $2 \neq 0$.



Soit $a \in A$; pour $x, y \in A - a$ on a $x + a, y + a \in A$ et donc aussi $((x + a) - a) + (y + a) \in A$, car c'est un point de la droite parallèle à la droite passant par $x + a$ et a , et passant par $y + a$. Il suit que $x + y \in A - a$ comme voulu. \square

Pour $a \neq b, c \in V$, la droite affine $K(b - a) + c$ est un sous-ensemble du sous-espace affine $\langle a, b, c \rangle$. Ainsi, avec ce qui précède, on peut reformuler la notion de sous-espace affine aussi comme :

Corollaire 1.2.7. *Soit un espace vectoriel V . Un sous-ensemble $\emptyset \neq A \subseteq V$ est un sous-espace affine si et seulement si pour tout $\{a_0, \dots, a_k\} \subseteq A$ aussi $\langle a_0, \dots, a_k \rangle \subseteq A$; et il suffit de vérifier cela pour $k = 2$ en général, et pour $k = 1$ lorsque $\text{car}(K) \neq 2$.*

Autrement dit, un sous-ensemble non-vide $A \subseteq V$ est un sous-espace affine si et seulement s'il est fermé pour les barycentres (i.e. les combinaisons affines).

Remarquons finalement qu'un barycentre de $\{0, a_1, \dots, a_k\}$ est exactement la même chose qu'une combinaison linéaire de $\{a_1, \dots, a_k\}$, et donc le sous-espace affine $\langle 0, a_1, \dots, a_k \rangle$ est en fait exactement le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, \dots, a_k\}$.

1.3. Repère affine

Si une droite affine $D \subseteq V$ contient trois points distincts a, b, c , alors $D = \langle a, b, c \rangle$, mais bien sûr cette présentation de D n'est pas "optimale". Pour qualifier cette notion, on introduit :

Définition 1.3.1. *Soit un espace vectoriel V . On dit que $\{a_0, \dots, a_k\} \subseteq V$ est affinement libre si aucun $a_{i_0} \in \{a_0, \dots, a_k\}$ n'est barycentre des autres points dans cet ensemble.*

Si $\{a_0, \dots, a_k\} \subseteq V$ est affinement libre, alors ces $k + 1$ points sont certainement distincts. Par ailleurs, un singleton $\{a\} \subseteq V$ est toujours affinement libre; et $\{a, b\} \subseteq V$ est affinement libre si et seulement si $a \neq b$, auquel cas le sous-espace affine engendré est la droite affine ab . Aussi, $\{a, b, c\} \subseteq V$ est affinement libre si et seulement si s'agit de trois points distincts et non-alignés (c'est à dire, un triangle non-aplati), auquel cas ces points engendrent un sous-plan affine. En général :

Proposition 1.3.2. *Soit un espace vectoriel V . Pour $\{a_0, \dots, a_k\} \subseteq V$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\{a_0, \dots, a_k\}$ est affinement libre,
2. il existe $0 \leq i_0 \leq k$ tel que $\{a_i - a_{i_0} \mid i \neq i_0\}$ est linéairement libre⁴,
3. pour tout $0 \leq i_0 \leq k$, $\{a_i - a_{i_0} \mid i \neq i_0\}$ est linéairement libre,
4. le sous-espace affine $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ est de dimension k ,
5. tout $a \in \langle a_0, \dots, a_k \rangle$ s'écrit d'une et une seule façon comme barycentre des $\{a_0, \dots, a_k\}$.

Démonstration. (2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4) Pour tout $0 \leq i_0, i_1 \leq k$, les sous-espaces vectoriels

$$\langle a_0, \dots, a_k \rangle - a_{i_0} \quad \text{et} \quad \langle a_0, \dots, a_k \rangle - a_{i_1}$$

4. "Linéairement libre" (ou linéairement indépendant) veut dire libre au sens de sous-espaces vectoriels.

sont identiques, parce que ce sont deux façons différentes de calculer la direction du sous-espace affine $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$. Nous avons déjà calculé que ces sous-espaces vectoriels sont engendrés (linéairement) par, respectivement,

$$\{a_i - a_{i_0} \mid i \neq i_0\} \quad \text{et} \quad \{a_i - a_{i_1} \mid i \neq i_1\}.$$

Ainsi, $\{a_i - a_{i_0} \mid i \neq i_0\}$ contient k vecteurs linéairement indépendants si et seulement si le sous-espace vectoriel $\langle a_0, \dots, a_k \rangle - a_{i_0}$ est de dimension k , si et seulement si le sous-espace affine $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ est de dimension k , si et seulement si le sous-espace vectoriel $\langle a_0, \dots, a_k \rangle - a_{i_1}$ est de dimension k , si et seulement si $\{a_i - a_{i_1} \mid i \neq i_1\}$ contient k vecteurs linéairement indépendants.

(1 \Rightarrow 2) Supposons que $\alpha_1(a_1 - a_0) + \dots + \alpha_k(a_k - a_0) = 0$. Si $\alpha_k \neq 0$ alors

$$a_k = \frac{1}{\alpha_k} \left(\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) a_0 - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_{k-1} a_{k-1} \right)$$

montre que a_k est un barycentre de $\{a_0, \dots, a_{k-1}\}$. Cela est exclu par hypothèse (1), donc $\alpha_k = 0$. On peut répéter l'argument pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, pour conclure que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, et donc $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ est linéairement libre. On a donc montré (2) pour $i_0 = 0$.

(3 \Rightarrow 1) Si a_0 est un barycentre des a_1, \dots, a_k , on a $a_0 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. Mais cela implique que

$$0 = (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) a_0 = \alpha_1(a_1 - a_0) + \dots + \alpha_k(a_k - a_0)$$

sans que tous les coefficients soient nuls (car leur somme vaut 1). Cela contredit l'hypothèse que $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ est linéairement indépendant, et donc a_0 ne peut pas être un tel barycentre. On répète l'argument pour chacun des $a_{i_0} \in \{a_0, \dots, a_k\}$.

(1 \Rightarrow 5) Nous avons déjà montré que l'espace affine engendré $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ est l'ensemble des barycentres de ses générateurs. Si jamais on a

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i a_i = \sum_{i=0}^k \beta_i a_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 = \sum_{i=0}^k \beta_i,$$

et (supposons) $\alpha_0 \neq \beta_0$, alors

$$a_0 = \frac{1}{\alpha_0 - \beta_0} \left(- \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \beta_i) a_i \right) \quad \text{avec} \quad \frac{- \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \beta_i)}{\alpha_0 - \beta_0} = 1$$

montre que a_0 est un barycentre de $\{a_1, \dots, a_k\}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. On répète l'argument pour tout $\alpha_i \neq \beta_i$. Ainsi tout barycentre est unique.

(5 \Rightarrow 1) Tout élément $a_{i_0} \in \{a_0, \dots, a_k\}$ est le barycentre "trivial" $a_{i_0} = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i$ avec $\alpha_{i_0} = 1$ et tous les autres coefficients nuls. Par hypothèse d'unicité, aucun élément de $\{a_0, \dots, a_k\}$ ne peut donc être barycentre des autres éléments. \square

Théorème 1.3.3. *Soit un espace vectoriel V . Un sous-ensemble $A \subseteq V$ est un sous-espace affine de dimension k si et seulement s'il existe $\{a_0, \dots, a_k\} \subseteq V$ affinement libre tel que $A = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$. On dit alors que $\{a_0, \dots, a_k\}$ est un repère affine⁵ de A .*

5. Attention : dans la littérature, ce terme est utilisé dans plusieurs sens différents (mais liés) ; insistons qu'ici un tel "repère affine" sera utilisé pour déterminer les "coordonnées barycentriques" des points.

Démonstration. Une implication a déjà été montrée. Réciproquement, si A est un sous-espace affine de dimension k , alors l'espace vectoriel A_0 admet une base $\{x_1, \dots, x_k\}$. Fixant un $a \in A$, on sait donc que tout élément $a' \in A = A_0 + a$ s'écrit comme

$$a' = (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) + a = \alpha_1(x_1 + a) + \dots + \alpha_k(x_k + a) + (1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k))a$$

et c'est bien un barycentre des éléments de l'ensemble $\{a, x_1 + a, \dots, x_k + a\}$. Cet ensemble est, par construction, affinement libre et engendre (affinement) A . \square

Corollaire 1.3.4. *Soit un sous-espace affine $A \subseteq V$ de dimension k . Tout choix de repère affine $\{a_0, \dots, a_k\}$ de A détermine, et est déterminé par, une bijection*

$$A \longrightarrow \{(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in K^{k+1} \mid \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1\}$$

envoyant $a \in A$ sur ces coordonnées barycentriques, i.e. l'unique tuple $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ de somme 1 tel que $a = \alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_k a_k$.

En fixant un repère affine d'un sous-espace affine $A \subseteq V$, on peut “faire de la géométrie” dans A sans référer à l'espace vectoriel ambiant V : car tout point de A s'exprime de manière unique comme barycentre des éléments du repère affine choisi. Cela est en particulier vrai pour l'espace vectoriel V en tant que sous-espace affine de lui-même—c'est à dire, pour V en tant qu'*espace affine*. Bien sûr, un même sous-espace affine $A \subseteq V$ peut admettre plusieurs repères affines (et plus tard on va étudier comment on peut “changer de repère”) : cela donne la liberté de choisir un repère affine adapté à telle ou autre situation géométrique.

Pendant, une légère généralisation du précédent nous sera utile : pour un nombre fini de points pondérés et de poids total non-nul,

$$(a_0, \alpha_0), \dots, (a_k, \alpha_k) \in V \times K \quad \text{avec} \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_k \neq 0 \text{ dans } K$$

on peut bien calculer le barycentre

$$x = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \dots + \alpha_k} a_0 + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \dots + \alpha_k} a_k = \frac{1}{\alpha_0 + \dots + \alpha_k} (\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_k a_k),$$

qui est donc toujours un élément de $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$. Autrement dit, c'est le barycentre au sens de la définition donnée auparavant, modulo une “renormalisation” des poids. Avec cette définition élargie on voit facilement que :

Proposition 1.3.5. *Le calcul barycentrique est*

1. *homogène* : multiplier tous les poids d'une famille de points pondérés⁶ par un même facteur ne change pas son barycentre,
2. *unitaire* : le barycentre d'un seul point pondéré est ce point lui-même,
3. *commutative* : l'ordre des points pondérés dans une famille de points pondérés est sans importance pour le calcul de son barycentre,

6. Ici, comme plus loin, on veut toujours dire : une suite finie de points pondérés, de poids total non-nul.

4. *associative* : pour calculer le barycentre d'une famille de points pondérés, toute sous-famille de poids total non-nul peut être remplacée par son barycentre pesé par son poids total.

Par conséquent, étant donné un repère affine $\{a_0, \dots, a_k\}$ d'un sous-espace affine $A \subseteq V$, tout tuple $(\xi_0, \dots, \xi_k) \in K^{k+1}$ de somme non-nulle détermine un barycentre

$$x = \frac{1}{\xi_0 + \dots + \xi_k} (\xi_0 a_0 + \dots + \xi_k a_k) \in A;$$

et un autre tuple $(\eta_0, \dots, \eta_k) \in K^{k+1}$ de somme non-nulle détermine le même point si et seulement si

$$\text{il existe } 0 \neq \kappa \in K : (\eta_0, \dots, \eta_k) = \kappa \cdot (\xi_0, \dots, \xi_k).$$

Ceci est une relation d'équivalence entre tuples de somme non-nulle, et il convient de noter

$$(\xi_0 : \dots : \xi_k)$$

lorsqu'on souhaite considérer le tuple (ξ_0, \dots, ξ_k) "à multiple non-nul près". Ainsi on a justifié :

Définition 1.3.6. *Soit un repère affine $\{a_0, \dots, a_k\}$ d'un sous-espace affine $A \subseteq V$. Lorsqu'un point x est le barycentre des points pondérés $(a_0, \xi_0), \dots, (a_k, \xi_k)$ de poids total non-nul, on dit que $(\xi_0 : \dots : \xi_k)$ sont les coordonnées homogènes de $x \in A$.*

Ci-dessus, l'adjectif "homogène" veut dire "déterminé à multiple non-nul près". Parfois on parle de coordonnées *barycentriques* homogènes, pour insister que le point x est déterminé par un barycentre. Pour contraster avec les coordonnées barycentriques homogènes, on parle de coordonnées barycentriques *normalisées* lorsqu'on impose que la somme des poids soit égale à 1.

1.4. Quelques résultats géométriques

Jusqu'à présent nous avons fait principalement de l'algèbre linéaire—il est grand temps de faire de la géométrie affine ! C'est à dire, on souhaite maintenant étudier des configurations de sous-espaces affines (points, droites, plans, ...) exprimées à l'aide des relations d'incidence et du parallélisme. Bien sûr on travaille toujours dans un espace vectoriel V ambiant, mais on le considère plutôt comme espace affine (sous-espace affine de lui-même) : on parlera donc de *points, droites, plans*, sans toujours préciser que ce sont des sous-espaces affines de l'espace vectoriel V .

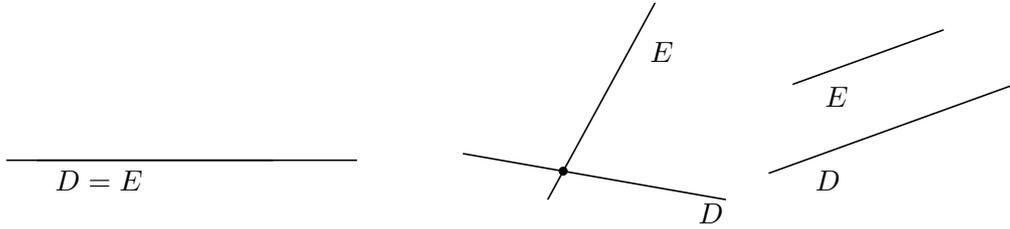
Voici un tout premier exemple pour "confirmer l'intuition" :

Proposition 1.4.1. *Chaque droite affine contient au moins deux points distincts, et deux points distincts déterminent une et une seule droite affine.*

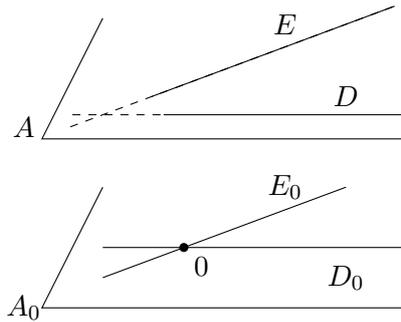
Démonstration. Si $D \subseteq V$ est une droite affine, alors sa direction D_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 1, et ne peut se réduire au singleton $\{0\}$. Ainsi D_0 contient au moins deux points distincts, et par translation (bijective !) il en est de même pour D . La deuxième partie a déjà été montré. \square

De même, "confirmons l'intuition" que deux droites dans un même plan sont parallèles exactement quand elles n'ont aucun point en commun :

Proposition 1.4.2 (Incidence de deux droites coplanaires). *L'intersection de deux droites affines coplanaires est soit une droite (si les droites sont identiques), soit un point (si les droites sont distinctes et non-parallèles), soit vide (si les droites sont distinctes et parallèles).*



Démonstration. Supposons que $D, E \subseteq A \subseteq V$ où D et E sont des droites affines, et A est un plan affine, dans un espace vectoriel V . Bien sûr $D = E$ implique que $D \cap E$ est une droite. Supposons désormais $D \neq E$, alors $D \cap E$ est soit vide, soit un singleton (car si D et E ont deux points distincts en commun, alors ces droites sont identiques, puisque deux points distincts déterminent une et une seule droite affine). Si $D \parallel E$, alors $a \in D \cap E$ implique $D = D_0 + a = E_0 + a = E$, ce qui contredit l'hypothèse $D \neq E$; ainsi $D \cap E = \emptyset$. Si $D \not\parallel E$, alors D_0 et E_0 sont des droites vectorielles distinctes dans le plan vectoriel A_0 , et donc $D_0 \oplus E_0 = A_0$.



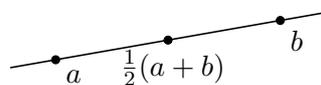
Prenons $d \in D$ et $e \in E$, alors $d - e \in A - e = A_0 = D_0 \oplus E_0$. Il existe donc $x \in D_0$ et $y \in E_0$ tel que $d - e = x + y$. Il suit alors que $-x + d = y + e \in (D_0 + d) \cap (E_0 + e) = D \cap E$, d'où $D \cap E \neq \emptyset$. \square

Ce résultat peut être généralisé à deux hyperplans dans un espace de dimension quelconque, ou encore à deux sous-espaces affines *supplémentaires*.

Dans la pratique, une configuration de points (droites, plans, ...) donnés engendre un sous-espace affine, et on peut souvent utiliser le calcul barycentrique (par rapport aux points donnés, voire par rapport à un repère affine dudit sous-espace affine) pour étudier la configuration donnée. Pour en donner le goût, introduisons une notion classique.

Définition 1.4.3. *L'isobarycentre (auss appelé centroïde) des points a_1, \dots, a_k (dans un espace vectoriel V sur un corps K dans lequel $k \neq 0$) est le point $x = \frac{1}{k}(a_1 + \dots + a_k) \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$.*

L'isobarycentre de deux points distincts a et b est appelé leur *milieu*, soit $m = \frac{1}{2}(a + b)$; c'est un élément de la droite ab .

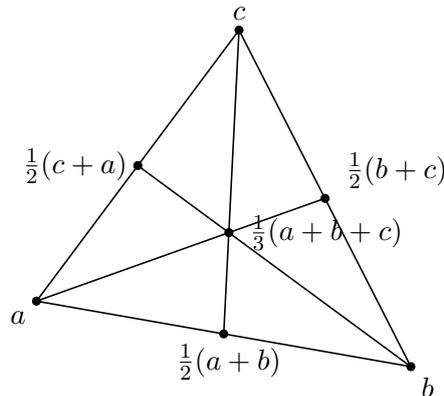


Attention, cette notion n'a pas son sens usuel : nous ne pouvons pas dire que “ m est équidistant à a et b ”, faute de notion de distance dans un espace vectoriel quelconque ! Le dessin ci-dessus, et tous les dessins qui suivent, sont des illustrations dans un plan affine réel (“le plan usuel”) de résultats qui sont vrais pour n'importe quel corps K .

Un *triangle* (non-aplati) abc est la donnée de trois points non-alignés (i.e. affinement libres) a , b et c ; ces points sont les *sommets* du triangle, et les droites⁷ ab , bc et ca sont ses *côtés*. Par définition, un triangle “vit” dans le plan affine engendré $\langle a, b, c \rangle$. Pour faire de la *géométrie affine du triangle*, il est souvent commode d'utiliser les sommets du triangle comme repère affine du plan contenant ce triangle. Illustrons cette idée avec quelques résultats classiques.

Une *médiane* d'un triangle abc est une droite reliant un sommet du triangle au milieu du côté opposé. Une telle médiane est donc comprise dans le plan affine $\langle a, b, c \rangle$. On peut alors se servir du repère affine $\{a, b, c\}$ pour démontrer :

Proposition 1.4.4 (Concurrence des médianes d'un triangle). *Soit un corps K de $\text{car}(K) \notin \{2, 3\}$. Les trois médianes d'un triangle s'intersectent à l'isobarycentre.*



Démonstration avec barycentres normalisés. On travaille dans le plan affine engendré par les sommets du triangle abc . En calcul barycentrique, le “milieu” du segment ab est le point $m = \frac{1}{2}(a + b)$, et la médiane contenant c est donc la droite $cm = \{\alpha(m - c) + c \mid \alpha \in K\}$. De la même manière, on calcule $n = \frac{1}{2}(b + c)$ et $an = \{\beta(n - a) + a \mid \beta \in K\}$, et $p = \frac{1}{2}(c + a)$ et $bp = \{\gamma(p - a) + a \mid \gamma \in K\}$. Maintenant on a $x \in cm \cap an \cap bp$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in K$ tels que

$$\begin{cases} x = \alpha(m - c) + c = \frac{\alpha}{2}a + \frac{\alpha}{2}b + (1 - \alpha)c \\ x = \beta(n - a) + a = (1 - \beta)a + \frac{\beta}{2}b + \frac{\beta}{2}c \\ x = \gamma(p - a) + a = \frac{\gamma}{2}a + (1 - \gamma)b + \frac{\gamma}{2}c \end{cases}$$

Par unicité des coordonnées barycentriques on trouve $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3}$, d'où $x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$. \square

Par définition, l'isobarycentre du triangle abc est le point de coordonnées homogènes $(1 : 1 : 1)$ par rapport au repère $\{a, b, c\}$. Pour illustrer la différence entre coordonnées barycentriques normalisées et homogènes, on peut donner une autre démonstration du résultat précédent :

7. On dit bien “droites”, car c'est la seule notion disponible en géométrie affine sur un corps quelconque; pour définir la notion de “segment”, il faudrait un corps *ordonné* (comme p.e. \mathbb{Q} ou \mathbb{R}).

Démonstration avec barycentres homogènes. L'isobarycentre g du triangle abc est, par définition, le barycentre (au sens élargi) de $(a, 1), (b, 1), (c, 1)$. Mais si on note m le barycentre de $(a, 1), (b, 1)$, alors par associativité du calcul barycentrique, g est aussi le barycentre de $(m, 2), (c, 1)$, ce qui montre que $g \in mc$, où mc est la médiane reliant le sommet c au milieu m du segment ab . De la même manière on voit que g appartient aux deux autres médianes du triangle abc . L'isobarycentre est donc bien le point d'intersection des trois médianes. \square

Par ailleurs, l'écriture en coordonnées barycentriques montre également que, si g est l'isobarycentre du triangle abc et m est le milieu du segment ab , alors $g = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}c$. Dans un plan affine réel (donc $K = \mathbb{R}$), cela veut dire que g se trouve "à deux tiers des sommets, et à un tiers des milieux des côtés".

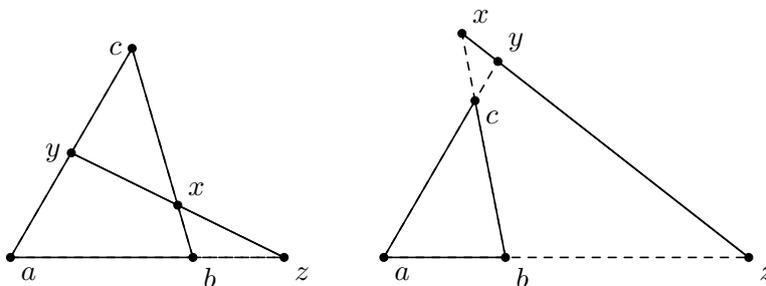
Pour se convaincre de la nécessité des conditions sur le corps K , outre le fait que l'expression de l'isobarycentre n'a pas de sens quand $\text{car}(K) = 3$, on peut facilement vérifier que le triangle de sommets $(0, 0), (2, 0)$ et $(0, 2)$ dans $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ a ses trois médianes parallèles.

Le résultat suivant était connu par Menelaos⁸ d'Alexandrie (env. 70–140), qui l'a formulé et démontré dans le cadre de la géométrie d'Euclide. Il y a beaucoup de démonstrations différentes ; nous allons en donner une ici (en termes de barycentres), et une autre plus tard (en termes de dilatations).

Proposition 1.4.5 (Théorème de Menelaos). *Soit un triangle abc , et $x \in bc$, $y \in ca$ et $z \in ab$ trois points distincts des sommets du triangle. Ecrivons, en coordonnées barycentriques,*

$$x = \alpha_x b + \beta_x c \quad y = \alpha_y c + \beta_y a \quad z = \alpha_z a + \beta_z b.$$

Alors les points x, y et z sont alignés si et seulement si $\alpha_x \alpha_y \alpha_z = -\beta_x \beta_y \beta_z$.



Pour démontrer facilement ce résultat, développons d'abord un critère analytique (en termes de coordonnées barycentriques) de colinéarité de trois points dans un plan affine :

Lemme 1.4.6. *Soit un repère affine $\{a, b, c\}$ d'un sous-plan affine $A \subseteq V$, et trois points $x, y, z \in A$ avec $x \neq y$. Notons en coordonnées barycentriques normalisées*

$$x = \alpha_x a + \beta_x b + \gamma_x c \quad y = \alpha_y a + \beta_y b + \gamma_y c \quad z = \alpha_z a + \beta_z b + \gamma_z c.$$

Alors $z \in xy$ si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{pmatrix} = 0.$$

8. En grec : "Μενέλαος" ; en français on écrit souvent "Ménélaüs".

Démonstration. Puisque $x \neq y$, on a $z \in xy$ si et seulement si

$$\text{il existe } \kappa : z = (1 - \kappa)x + \kappa y.$$

Dans ce barycentre, on peut remplacer x , y et z par leurs expressions barycentriques, et la condition devient équivalente à

$$\begin{aligned} \alpha_z a + \beta_z b + \gamma_z c &= (1 - \kappa)(\alpha_x a + \beta_x b + \gamma_x c) + \kappa(\alpha_y a + \beta_y b + \gamma_y c) \\ &= ((1 - \kappa)\alpha_x + \kappa\alpha_y)a + ((1 - \kappa)\beta_x + \kappa\beta_y)b + ((1 - \kappa)\gamma_x + \kappa\gamma_y)c. \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées barycentriques, on peut écrire cela encore par un système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha_z = (1 - \kappa)\alpha_x + \kappa\alpha_y \\ \beta_z = (1 - \kappa)\beta_x + \kappa\beta_y \\ \gamma_z = (1 - \kappa)\gamma_x + \kappa\gamma_y \end{cases}$$

Maintenant, si un tel $\kappa \in K$ existe, alors la dépendance des colonnes exprimée par le système ci-dessus implique que

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{pmatrix} = 0.$$

Réciproquement, ce déterminant est nul si et seulement si les colonnes de la matrice sont dépendantes (au sens linéaire!), c'est à dire,

$$\text{il existe } (\sigma, \rho, \theta) \neq (0, 0, 0) : \sigma \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \beta_x \\ \gamma_x \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \alpha_y \\ \beta_y \\ \gamma_y \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} \alpha_z \\ \beta_z \\ \gamma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque colonne étant de somme 1 (car les éléments sont des coordonnées barycentriques), on obtient par sommation des trois équations

$$\begin{cases} \sigma\alpha_x + \rho\alpha_y + \theta\alpha_z = 0 \\ \sigma\beta_x + \rho\beta_y + \theta\beta_z = 0 \\ \sigma\gamma_x + \rho\gamma_y + \theta\gamma_z = 0 \end{cases}$$

que $\sigma + \rho + \theta = 0$. Si $\theta = 0$ alors

$$\text{il existe } (\sigma, \rho) \neq (0, 0) : \sigma \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \beta_x \\ \gamma_x \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \alpha_y \\ \beta_y \\ \gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais alors $\sigma + \rho = 0$, et donc $\sigma = -\rho \neq 0$, d'où $x = y$. Ceci contredit l'hypothèse de l'énoncé, et donc on a toujours $\theta \neq 0$. Mais alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_z \\ \beta_z \\ \gamma_z \end{pmatrix} = \frac{-\sigma}{\theta} \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \beta_x \\ \gamma_x \end{pmatrix} + \frac{-\rho}{\theta} \begin{pmatrix} \alpha_y \\ \beta_y \\ \gamma_y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{-\sigma}{\theta} + \frac{-\rho}{\theta} = -\frac{\sigma + \rho}{\theta} = -\frac{-\theta}{\theta} = 1$$

montre que $\kappa = -\frac{\rho}{\theta}$ est une solution au système exprimant que $z = (1 - \kappa)x + \kappa y$. \square

Démonstration du Théorème de Menelaos. Par le lemme, les points

$$x = \alpha_x b + \beta_x c \quad y = \alpha_y c + \beta_y a \quad z = \alpha_z a + \beta_z b$$

sont alignés si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \beta_y & \alpha_z \\ \alpha_x & 0 & \beta_z \\ \beta_x & \alpha_y & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

et par calcul de ce déterminant on trouve la condition nécessaire et suffisante de l'énoncé. \square

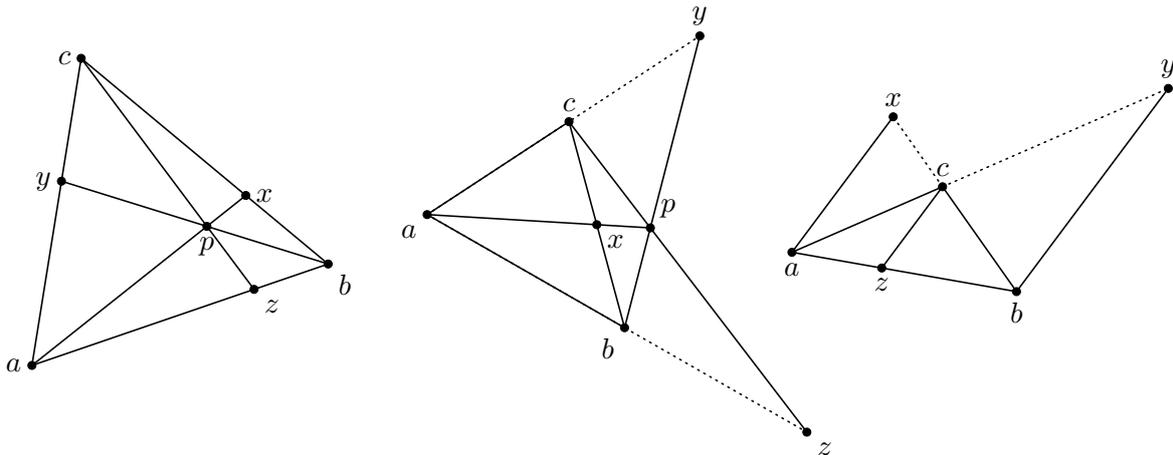
La caractérisation de l'alignement des points x, y et z par un déterminant (cf. le lemme ci-dessus) reste valable si on remplace les coordonnées barycentriques (normalisées) par des coordonnées homogènes : puisque la nullité du déterminant n'est pas affectée lorsqu'on multiplie ses colonnes par des constantes. Ainsi on peut aussi reformuler le Théorème de Menelaos en utilisant des coordonnées homogènes pour x, y et z .

Aussi le résultat suivant est un "grand classique" : il porte le nom du mathématicien italien Giovanni Ceva (1647–1734), qui l'a formulé et démontré dans le cadre de la géométrie d'Euclide, bien que ce résultat figure déjà dans les travaux de Yusuf Al-Mutaman (...–1085), mathématicien et roi de la taïfa de Saragosse (en Espagne) à la fin du 11e siècle. Nous allons donner une démonstration barycentrique de l'énoncé, le validant ainsi plus généralement en géométrie affine.

Proposition 1.4.7 (Théorème de Ceva). *Soit un triangle abc , et $x \in bc$, $y \in ca$ et $z \in ab$ trois points distincts des sommets du triangle. Ecrivons, en coordonnées barycentriques,*

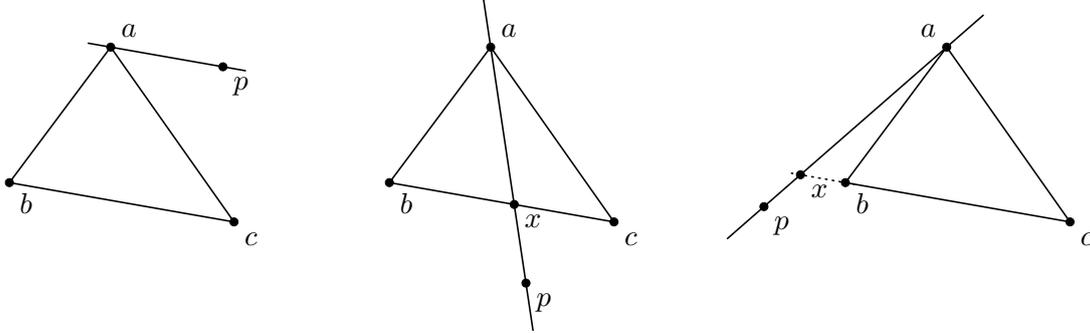
$$x = \alpha_x b + \beta_x c \quad y = \alpha_y c + \beta_y a \quad z = \alpha_z a + \beta_z b.$$

Alors les droites ax, by, cz sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\alpha_x \alpha_y \alpha_z = \beta_x \beta_y \beta_z$.



Dans cet énoncé, on a affaire à des droites passant par un sommet d'un triangle donné : on appelle cela une *droite cévienne* (ou tout simplement une *cévienne*) du triangle. Les médianes d'un triangle sont des céviennes, mais aussi p.e. les bissectrices ou les hauteurs du triangle (dans le cadre de la géométrie d'Euclide, bien entendu). Pour la suite il est utile de démontrer d'abord :

Lemme 1.4.8. Soit un triangle abc et un point $a \neq p \in \langle a, b, c \rangle$ de coordonnées homogènes $(\alpha : \beta : \gamma)$ par rapport au repère affine $\{a, b, c\}$. Alors la cévienne ap est parallèle au côté opposé bc si et seulement si $\beta + \gamma = 0$; et si les droites ne sont pas parallèles, alors leur (unique) point d'intersection $x \in ap \cap bc$ est de coordonnées homogènes $(0 : \beta : \gamma)$.



Démonstration. Dans le plan affine $A = \langle a, b, c \rangle$, les droites ap et bc sont distinctes (car $a \notin bc$), donc elles sont non-parallèles si et seulement si elles ont exactement un point d'intersection. Mais un point x de coordonnées homogènes $(\alpha' : \beta' : \gamma')$ est à la fois sur ap et sur bc si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha' \\ 0 & \beta & \beta' \\ 0 & \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha' \\ 1 & 0 & \beta' \\ 0 & 1 & \gamma' \end{pmatrix} = 0,$$

c'est à dire, quand

$$\beta\gamma' - \gamma\beta' = 0 \quad \text{et} \quad \alpha' = 0.$$

Puisque $a \neq p$, on a nécessairement $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$ (car le point de coordonnées homogènes $(\alpha : 0 : 0)$ est exactement a). Supposons que $\beta \neq 0$, alors $\gamma' = \frac{\gamma}{\beta}\beta'$ et on a ainsi

$$(\alpha' : \beta' : \gamma') = (0 : \beta' : \frac{\gamma}{\beta}\beta') = (0 : \beta : \gamma).$$

Si $\beta = 0$ alors $\gamma \neq 0$ et on utilise $\beta' = \frac{\beta}{\gamma}\gamma'$ pour obtenir le même résultat. Mais il s'agit ici de coordonnées homogènes (du point x) si et seulement si la somme des coordonnées est non-nulle, soit $\beta + \gamma \neq 0$. Par contraposée on a donc $ap \parallel bc$ si et seulement si $\beta + \gamma = 0$. \square

Démonstration du Théorème de Ceva. Remarquons d'abord que $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y$ et β_z sont tous non-nuls, car par hypothèse x, y et z sont distincts de a, b et c . Dans la suite, on pourra donc diviser par ces α 's et β 's.

Si les droites ax, by et cz s'intersectent en un point p , que l'on suppose de coordonnées homogènes $(\alpha : \beta : \gamma)$ dans le repère $\{a, b, c\}$, alors par le lemme on a

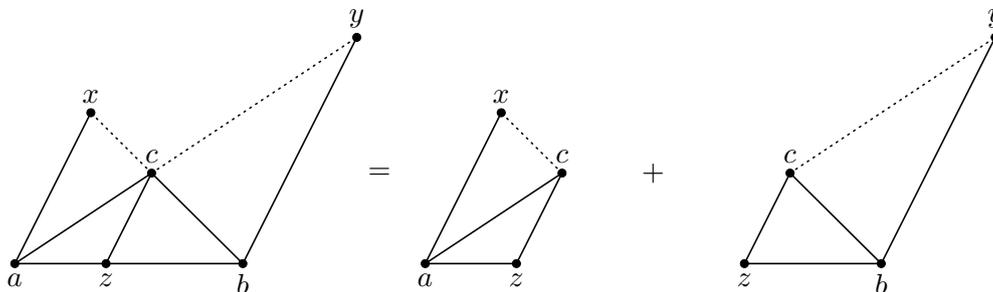
$$(0 : \alpha_x : \beta_x) = (0 : \beta : \gamma) \quad (\beta_y : 0 : \alpha_y) = (\alpha : 0 : \gamma) \quad (\alpha_z : \beta_z : 0) = (\alpha : \beta : 0)$$

et donc

$$\frac{\alpha_x}{\beta_x} \cdot \frac{\alpha_y}{\beta_y} \cdot \frac{\alpha_z}{\beta_z} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

ce qui implique bien sûr que $\alpha_x\alpha_y\alpha_z = \beta_x\beta_y\beta_z$.

Supposons maintenant que les droites ax , by et cz sont parallèles. Pour invoquer le lemme ci-dessus, on va “couper le problème en deux” (et l’argument développé ci-après ne dépend pas du “découpage” choisi!) :



Ainsi on peut voir ax comme une céviène du triangle azc , parallèle au côté zc ; et by est une céviène du triangle bzc , parallèle au côté zc . Pour utiliser le lemme ci-dessus, on doit exprimer x comme barycentre du repère $\{a, z, c\}$, et y comme barycentre du repère $\{b, c, z\}$. Mais de $z = \alpha_z a + \beta_z b$ on obtient $b = -\frac{\alpha_z}{\beta_z} a + \frac{1}{\beta_z} z$ et donc $x = -\frac{\alpha_x \alpha_z}{\beta_z} a + \frac{\alpha_x}{\beta_z} z + \beta_x c$ (et la somme des coefficients vaut 1). Le lemme dit qu’alors $ax \parallel zc$ si et seulement si $\frac{\alpha_x}{\beta_z} + \beta_x = 0$, soit $\beta_x \beta_z = -\alpha_x$. De même, $z = \alpha_z a + \beta_z b$ implique $a = \frac{1}{\alpha_z} z - \frac{\beta_z}{\alpha_z} b$, d’où $y = -\frac{\beta_y \beta_z}{\alpha_z} b + \frac{\beta_y}{\alpha_z} z + \alpha_y c$. Le lemme dit que $by \parallel cz$ si et seulement si $\beta_y = -\alpha_y \alpha_z$. Il suit par multiplication que $\alpha_x \alpha_y \alpha_z = \beta_x \beta_y \beta_z$.

Réciproquement, si les trois droites ax , by et cz ne sont pas parallèles, alors au moins deux d’entre elles s’intersectent (en un unique point). Supposons que p , dont on note les coordonnées homogènes dans le repère $\{a, b, c\}$ par $(\alpha : \beta : \gamma)$, est le point d’intersection de ax et by , alors x est le point d’intersection de ap et bc , et y est le point d’intersection de by et ac , donc le lemme précédent dit que

$$(0 : \alpha_x : \beta_x) = (0 : \beta : \gamma) \quad \text{et} \quad (\beta_y : 0 : \alpha_y) = (\alpha : 0 : \gamma),$$

c’est à dire,

$$\frac{\alpha_x}{\beta_x} = \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_y}{\beta_y} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Par la condition du théorème, $\alpha_x \alpha_y \alpha_z = \beta_x \beta_y \beta_z$, on trouve alors que

$$\frac{\alpha_z}{\beta_z} = \frac{\beta_x \beta_y}{\alpha_x \alpha_y} = \frac{\alpha}{\beta}$$

et donc les coordonnées homogènes de z sont

$$(\alpha_z : \beta_z : 0) = (\beta_x \beta_y : \alpha_x \alpha_y : 0) = (\alpha : \beta : 0).$$

Mais cela dit (encore par le lemme) que z est aussi le point d’intersection de cp et ab ; ainsi les trois droites ax , by et cz sont bel et bien concourantes en p . Somme toute, sous la condition $\alpha_x \alpha_y \alpha_z = \beta_x \beta_y \beta_z$, les droites ax , by et cz sont soit parallèles, soit concourantes (en un seul point). \square

Par ailleurs, dans le cas de concourance des céviennes, les coordonnées homogènes du point d'intersection p sont bien (avec les notations de la démonstration)

$$(\alpha : \beta : \gamma) = \left(\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma} : 1\right) = \left(\frac{\beta_y}{\alpha_y} : \frac{\alpha_x}{\beta_x} : 1\right) = (\beta_x\beta_y : \alpha_x\alpha_y : \alpha_y\beta_x).$$

(Ici on a utilisé que $\gamma \neq 0$; le contraire impliquerait que $x = b$, ce qui est interdit par les hypothèses.) Clairement, l'existence de l'unique point d'intersection des trois médianes d'un triangle abc (lorsque $\text{car}(K) \notin \{2, 3\}$) est un cas particulier du Théorème de Ceva : il suffit de prendre pour x, y et z les milieux des segments bc, ca et ab .

Pour terminer, encore un dernier commentaire. Les théorèmes de Menelaos et de Ceva se ressemblent : Menelaos dit quand trois *points* se trouvent *sur une même droite*, alors que Ceva dit quand trois *droites* se rencontrent *en un même point*. Et oui, les théorèmes de Menelaos et de Ceva sont des conséquences d'un résultat plus général—voir [M. S. Klamkin, A. Liu, *Simultaneous Generalization of the Theorems of Ceva and Menelaus*, Mathematics Magazine, Vol. 65 (February 1992), pp. 48–52]. Mieux encore, reformulé en géométrie projective, ces deux théorèmes sont duaux l'un de l'autre; et donc l'un implique l'autre, et vice versa—voir [J. R. Silvester, *Ceva = (Menelaus)²*, The Mathematical Gazette, Vol. 84 (July 2000), pp. 268–271].

1.5. Exercices

Exercice 1.5.1 (Image directe et image réciproque). Montrer que, pour toute fonction $f: X \rightarrow Y$, l'image directe preserve les réunions quelconques; et si f est injective alors l'image directe preserve aussi les intersections quelconques. Qu'en est-il alors pour l'image directe, resp. l'image réciproque, d'une bijection? (Ceci est utile pour les translations, et plus généralement pour les automorphismes affines que l'on rencontrera plus tard.)

Exercice 1.5.2 (Bijections). Montrer que, pour tout ensemble X , l'ensemble des bijections $\text{Bij}(X)$ est un groupe (pour la composition). Montrer que ce groupe agit “naturellement” sur l'ensemble X , c'est à dire, que l'application $\text{Bij}(X) \times X \rightarrow X: (f, x) \mapsto fx$ a les “propriétés usuelles”.

Exercice 1.5.3 (Actions de groupe—abstraction du précédent). Rappeler la notion d'action d'un groupe sur un ensemble (montrer l'équivalence de $G \times X \rightarrow X$ et $G \rightarrow \text{Bij}(X)$). Etudier des propriétés (action fidèle, libre, transitive; orbit, point fixe, stabilisateur) et donner des exemples simples. (On verra plein d'actions “linéaires” dans le cours.)

Exercice 1.5.4 (Sous-groupes, quotients). Rappeler sous-groupe (normal) et quotient d'un groupe G ; rappeler comment cela s'écrit dans une suite exacte courte $N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q$. Donner des exemples (sous-groupes de $\text{Bij}(X)$, quotients de \mathbb{Z} , ...) (On rencontrera plein d'exemples de suites exactes courtes de groupes dans le cours.)

Exercice 1.5.5 (Morphismes entre actions). Etant donné une action de groupe $G \times X \rightarrow X$, montrer qu'un sous-groupe $H \subseteq G$ induit toujours une action $H \times X \rightarrow X$, mais qu'un sous-ensemble $Y \subseteq X$ ne détermine pas toujours une action $G \times Y \rightarrow Y$. Formuler des conditions sur

Y pour que l'inclusion $i: Y \hookrightarrow X$ induise une action $G \times Y \rightarrow Y$. Rappeler la "bonne définition" de morphisme équivariant entre G -actions.

Exercice 1.5.6 (Corps). Rappeler les notations des corps "usuels" : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p), \mathbb{F}_{p^r}$. (Ce dernier n'a probablement pas encore été défini dans les cours d'algèbre ; ici on peut juste mentionner son existence.)

Exercice 1.5.7 (Espaces vectoriels et applications linéaires). Soit V un espace vectoriel sur un corps K . Rappeler : base et dimension de V , sous-espace de V , intersection de sous-espaces, somme (directe) de sous-espaces, formule de Grassmann. Application linéaire entre espaces vectoriels, noyau, image, théorème du rang. Rappeler que toute base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V détermine, et est déterminée par, un isomorphisme linéaire $V \rightarrow K^n$; rappeler la représentation matricielle d'une application linéaire. (Tout cela est vu dans les cours de L1 et L2.)

Exercice 1.5.8 (Equations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel). Soit V un espace vectoriel sur un corps K , muni d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension $k \leq n$ est l'ensemble des $x = \sum_i x_i e_i$ dont les coordonnées sont les solutions d'un système linéaire *homogène*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{(n-k)1}x_1 + \dots + a_{(n-k)n}x_n = 0 \end{cases}$$

dont la matrice de coefficients est de rang $n - k$.

Exercice 1.5.9 (Direction d'un sous-espace affine). Soient deux sous-espaces vectoriels $E, F \subseteq V$ et $a, b \in V$. Montrer d'abord que $E + a = E$ si et seulement si $a \in E$, puis plus généralement que $E + a = F + b$ si et seulement si $E = F$ et $a - b \in E$. Conclure qu'un sous-ensemble $A \subseteq V$ est un sous-espace affine si et seulement si, pour tout $a \in A$, $A_0 = A - a$ est un (et toujours le même) sous-espace vectoriel de V .

Exercice 1.5.10 (Parallélisme est une relation d'équivalence). Soit un espace vectorielle V . Notons $\text{Aff}(V)$ pour l'ensemble des sous-espaces affines de V , et $\text{Vec}(V)$ pour l'ensemble des sous-espaces vectoriels. Montrer que l'application $\text{Aff}(V) \rightarrow \text{Vec}(V): A \mapsto A_0$ est surjective mais pas injective, puis montrer que la relation d'équivalence qu'elle détermine est exactement le parallélisme. (Rappeler que toute surjection (ensembliste) détermine, et est déterminée par, une relation d'équivalence.)

Exercice 1.5.11 (Actions des translations). Soit un espace vectorielle V de dimension n . Notons $\text{Aff}^k(V)$ pour l'ensemble des sous-espaces affines de dimension $k \leq n$. Montrer que, pour toute translation $t \in T(V)$, l'image directe définit une bijection $t: \text{Aff}^k(V) \rightarrow \text{Aff}^k(V)$. En déduire une action de groupe $T(V) \times \text{Aff}^k(V) \rightarrow \text{Aff}^k(V)$. Cette action, est-elle transitive ? libre ? (La réponse dépend de k .) Quelle est la relation d'équivalence sur $\text{Aff}^k(V)$ déterminée par cette action de $T(V)$? Mêmes questions lorsqu'on remplace $\text{Aff}^k(V)$ par $\text{Aff}(V)$.

Exercice 1.5.12 (Définition d'espace affine par action). Soit un espace vectoriel V . Montrer que le groupe $T(V) = (V, +, 0)$ agit simplement transitivement sur (l'ensemble des points de) V . Réciproquement, lorsque $(V, +, 0)$ agit simplement transitivement sur un ensemble X , montrer que (par transport de structure) X est un espace vectoriel isomorphe à V (et que l'on peut choisir n'importe quel $x \in X$ comme vecteur nul). (Plusieurs références (françaises) utilisent cette équivalence pour définir ainsi un "espace affine X de direction V ".)

Exercice 1.5.13 (Equations cartésiennes d'un sous-espace affine). Soit V un espace vectoriel sur un corps K , muni d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Montrer que tout sous-espace affine de dimension $k \leq n$ est l'ensemble des $x = \sum_i x_i e_i$ dont les coordonnées sont les solutions d'un système linéaire (pas nécessairement homogène)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{(n-k)1}x_1 + \dots + a_{(n-k)n}x_n = b_{n-k} \end{cases}$$

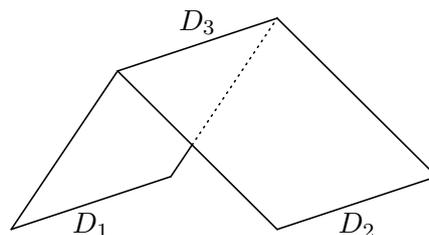
dont la matrice de coefficients est de rang $n - k$.

Exercice 1.5.14 (Sous-espaces affines—le cas réel). Identifier (par une équation cartésienne) les sous-espaces affines de \mathbb{R}^n lorsque $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. (Pour \mathbb{R}^2 on retrouve bien sûr les équations des droites données dans le cours de Géométrie en L2.)

Exercice 1.5.15 (Espaces finis). "Dessiner" les espaces $\mathbb{F}_2^2, \mathbb{F}_3^2, \mathbb{F}_5^2$, et indiquer toutes les droites (vectorielles et affines). Combien de points y a-t-il dans \mathbb{F}_q^n ? Combien de points y a-t-il sur chaque droite dans \mathbb{F}_q^n ? Combien de droites y a-t-il dans \mathbb{F}_q^n ?

Solution. Une sous-droite vectorielle de \mathbb{F}_q^n est (isomorphe à) \mathbb{F}_q (car c'est un espace vectoriel de dimension 1), et elle contient donc q éléments. Puisqu'une droite affine est définie par translation, et une translation est bijective, aussi chaque droite affine contient exactement q éléments. Une droite (affine) est déterminée par deux points distincts; et cette même droite est alors déterminée par chaque paire de points distincts contenus dans cette droite. Donc, pour compter les droites dans \mathbb{F}_q^n , on compte d'abord le nombre de paires de points distincts dans cet espace, soit $q^n \cdot (q^n - 1)$; puis le nombre de paires de points distincts d'une droite, soit $q \cdot (q - 1)$; pour conclure que le nombre de droites affines distinctes dans \mathbb{F}_q^n est $\frac{q^n \cdot (q^n - 1)}{q \cdot (q - 1)} = q^{n-1}(q^{n-1} + \dots + q + 1)$. \square

Exercice 1.5.16 (Théorème du toit). Dans un espace affine de dimension 3, montrer que si deux plans affines non-parallèles P_1 et P_2 contiennent respectivement deux droites parallèles D_1 et D_2 , alors l'intersection $D_3 = P_1 \cap P_2$ est une droite affine parallèle à D_1 et à D_2 .



Exercice 1.5.17 (Déterminer un plan). Dans un espace affine quelconque, montrer que deux droites affines distinctes parallèles ou sécantes sont contenues dans un et un seul plan affine. Et si ces droites ne sont ni parallèles, ni sécantes ?

Exercice 1.5.18 (Théorème du toit—généralisation). Dans un espace affine de dimension 3, soient P_1, P_2 et P_3 trois plans deux à deux non-parallèles. Montrer que les droites d'intersections $D_1 = P_2 \cap P_3, D_2 = P_3 \cap P_1$ et $D_3 = P_1 \cap P_2$ sont parallèles ou concourantes.

Exercice 1.5.19 (Barycentres et translations). Soit un espace vectoriel V . Montrer qu'une combinaison linéaire $b = \alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_k a_k$ dans V est un barycentre (donc $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1$) si et seulement si, pour tout $t \in T(V)$, on a $tb = \alpha_0 t a_0 + \dots + \alpha_k t a_k$. Autrement dit, une combinaison barycentrique (= affine) est exactement une combinaison linéaire préservée par toutes les translations.

Exercice 1.5.20 (Fonction de Leibniz). Soit un espace vectoriel V . Etant donné des points $\{a_0, \dots, a_k\} \subseteq V$ et des scalaires $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\} \subseteq K$, on définit la fonction

$$L: V \rightarrow V: x \mapsto \sum_i \alpha_i (a_i - x).$$

Montrer que cette fonction est constante si $\sum_i \alpha_i = 0$, et bijective si $\sum_i \alpha_i \neq 0$. Dans ce deuxième cas, identifier l'image réciproque de 0.

Exercice 1.5.21 (Coordonnées barycentriques et coordonnées cartésiennes). Soit un repère affine $\{a_0, \dots, a_k\}$ d'un sous-espace affine $A \subseteq V$; ainsi $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ est une base du sous-espace vectoriel $A_0 \subseteq V$. Tout point $x \in A$ s'écrit donc comme un barycentre

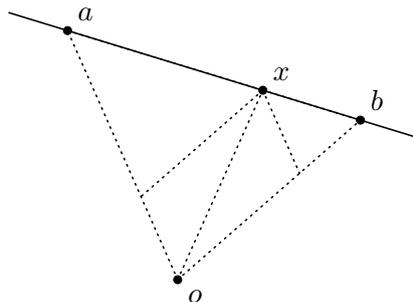
$$x = \alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_k a_k \quad \text{avec} \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1,$$

et le vecteur $x - a_0 \in A_0$ s'écrit comme une combinaison linéaire

$$x - a_0 = \alpha'_1 (a_1 - a_0) + \dots + \alpha'_k (a_k - a_0).$$

Montrer comment ces coordonnées barycentriques et cartésiennes se déterminent mutuellement.

Exercice 1.5.22 (Barycentres—sur une droite dans le plan réel). Soit une droite affine ab passant par deux points distincts a et b du plan \mathbb{R}^2 , que l'on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2. Tout point de la droite s'écrit donc par un barycentre $x = \alpha a + \beta b$, et on veut calculer ses poids α et β . Pour cela, considérons d'abord un point x situé entre a et b , puis les triangles formés à l'aide de l'origine o (que l'on suppose en dehors de la droite ab) et des segments parallèles :



Utiliser le Théorème de Thales pour montrer qu'alors

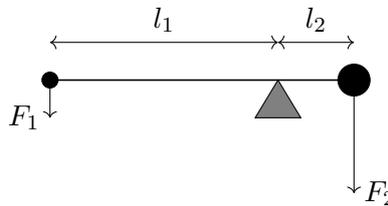
$$\alpha = \frac{\text{distance } bx}{\text{distance } ab} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\text{distance } ax}{\text{distance } ab}$$

Modifier l'argument pour décrire *tous* les points de ab , en introduisant des *distances signées*. (Ce résultat est en fait valable dans tout *espace euclidien*.)

Exercice 1.5.23 (Barycentres—origine physique). En physique classique, d'après les travaux d'Archimedes (Αρχιμήδης) de Syracuse (qui vivait donc à Syracuse, sur la côte dans le sud-est de la Sicile, de -287 à -212), la loi du levier dit que

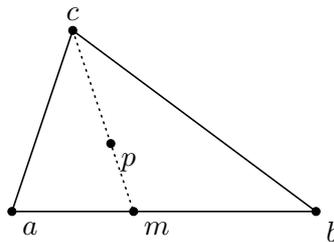
$$F_1 l_1 = F_2 l_2,$$

où F_i est une force et l_i est une longueur de bras de levier. On peut par exemple penser à deux poids (poids = force de pesanteur exercée sur une masse) en équilibre sur une balance "asymétrique" :



Montrer que la position du pivot du levier est le barycentre des extrémités du levier, dont les coefficients sont les poids. (Ceci est effectivement l'origine historique du calcul barycentrique ; βάρους se traduit par "poids".)

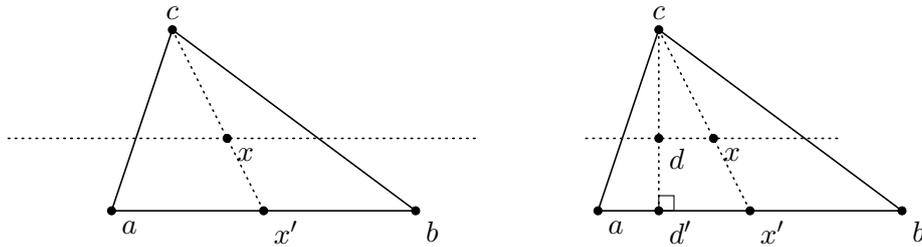
Exercice 1.5.24 (Associativité du calcul barycentrique). Soit un triangle abc dans un plan affine. Pour situer le point p de coordonnées homogènes $(\alpha : \beta : \gamma)$, montrer comment on peut le faire "en deux étapes", comme suggéré par le dessin suivant,



où m est le barycentre de $(a, \alpha), (b, \beta)$ et p est le barycentre de $(m, \alpha + \beta), (c, \gamma)$. (Que faire si $\alpha + \beta = 0$?)

Exercice 1.5.25 (Barycentres—dans le plan réel). Soit un triangle non-aplati abc dans le plan \mathbb{R}^2 , que l'on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2. Tout point $x \in \mathbb{R}^2$ s'écrit alors de manière unique comme un barycentre $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$, et on veut déterminer les coefficients α, β et γ . Considérer d'abord un point x à l'intérieur du triangle abc , et montrer que

tout point de la droite parallèle à ab et passant par x à le même coefficient γ :



(Indication : exprimer x comme barycentre de c et x' puis utiliser le Théorème de Thales.) En abaissant une droite perpendiculaire de c sur ab , en déduire que

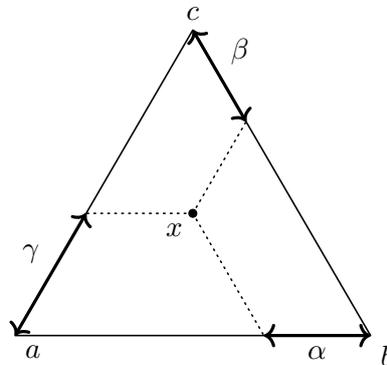
$$\gamma = \frac{\text{aire } abd}{\text{aire } abc} = \frac{\text{aire } abx}{\text{aire } abc},$$

puis conclure “en répétant l’argument” par

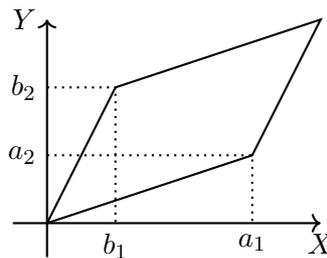
$$\alpha = \frac{\text{aire } xbc}{\text{aire } abc} \quad \beta = \frac{\text{aire } axc}{\text{aire } abc} \quad \gamma = \frac{\text{aire } abx}{\text{aire } abc}.$$

Généraliser pour un point quelconque du plan, avec des coordonnées barycentriques éventuellement négatives, en introduisant la notion d’*aire signée* d’un triangle. (Ce résultat est en fait valable dans tout *espace euclidien*.)

Exercice 1.5.26 (Barycentres—dans le plan réel (2)). Dans \mathbb{R}^2 (que l’on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2), montrer que les coordonnées homogènes $(\alpha : \beta : \gamma)$ d’un point x à l’intérieur d’un triangle *équilatéral* abc sont données par les longueurs indiquées ci-dessous :



Exercice 1.5.27 (Barycentres—dans le plan réel (3)). Dans \mathbb{R}^2 (que l’on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2), montrer que l’aire signée du parallélogramme ci-dessous est donnée par $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$:



En déduire une formule pour l'aire signée d'un triangle quelconque abc dans \mathbb{R}^2 , de sommets $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ et $c = (c_1, c_2)$. Conclure que, par rapport à ce triangle abc , tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a pour coordonnées homogènes

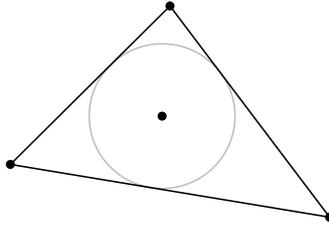
$$\left(\det \begin{pmatrix} b_1 - x_1 & c_1 - x_1 \\ b_2 - x_2 & c_2 - x_2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} c_1 - x_1 & a_1 - x_1 \\ c_2 - x_2 & a_2 - x_2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a_1 - x_1 & b_1 - x_1 \\ a_2 - x_2 & b_2 - x_2 \end{pmatrix} \right),$$

ou, de manière équivalente,

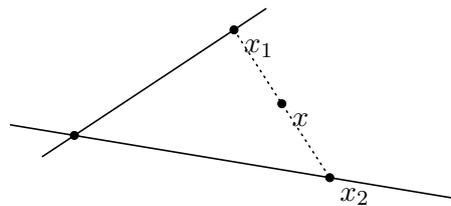
$$\left(\det \begin{pmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & c_1 \\ a_2 & x_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Formuler un critère (par un calcul de déterminants) pour vérifier si un point $x \in \mathbb{R}^2$ est inclus ou non dans un triangle abc de sommets donnés. (Ceci a d'importantes applications en robotique (par exemple, pour positionner un robot dans l'espace), en graphisme informatique (images de synthèse, rendu de surfaces), etc.)

Exercice 1.5.28 (Centre du cercle inscrit dans un triangle réel). Pour un triangle non-aplati abc dans \mathbb{R}^2 (que l'on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2), exprimer le centre de son cercle inscrit comme un barycentre.

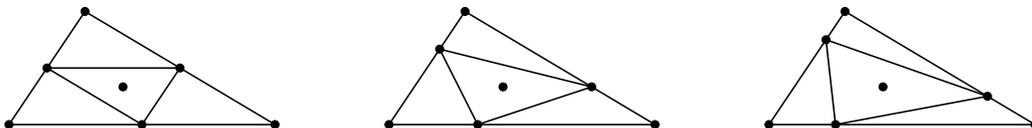


Exercice 1.5.29 (Entre deux droites). On considère deux droites sécantes dans un plan affine sur un corps K tel que $\text{car}(K) \neq 2$. Montrer que tout point en dehors de ces deux droites est le milieu de deux points se trouvant sur l'une des deux droites.

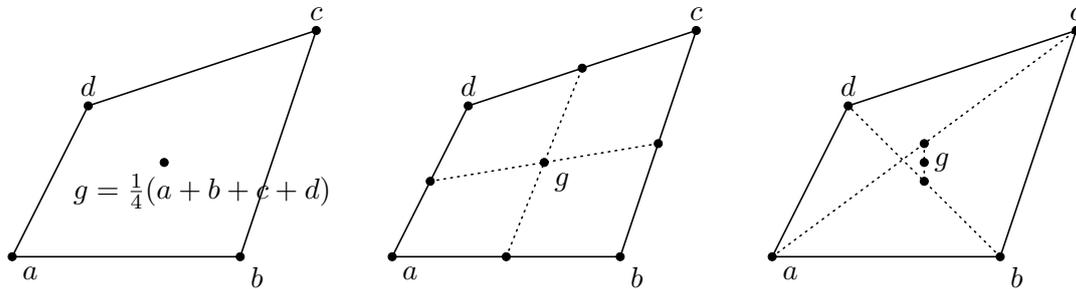


Si on travaille dans le plan \mathbb{R}^2 (avec sa géométrie euclidienne vue en L2), comment peut-on construire avec règle et compas ces deux points ?

Exercice 1.5.30 (Isobarycentre). Soit un triangle non-aplati abc dans un plan affine sur un corps K tel que $\text{car}(K) \notin \{2, 3\}$. Montrer que l'isobarycentre de abc est également l'isobarycentre du triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de abc . Généraliser cet énoncé en remplaçant "milieu des côtés" par une expression barycentrique adéquate.

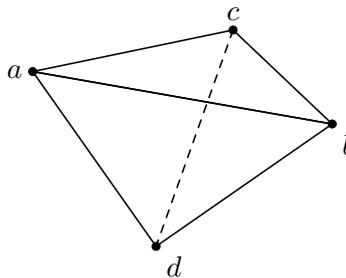


Exercice 1.5.31 (Centroïde d'un quadrilatère). Soit un quadrilatère $abcd$ dans un plan affine sur un corps K de $\text{car}(K) \neq 2$.

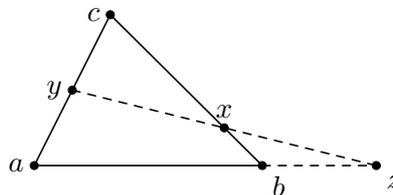


Montrer qu'un point g est l'isobarycentre des quatre sommets si et seulement si g est le point d'intersection des segments joignant les milieux de côtés opposés (les *bimédianes* du quadrilatère), si et seulement si g est le milieu du segment reliant les milieux des *diagonales*.

Exercice 1.5.32 (Centroïde d'un tétraèdre). Soit un tétraèdre $abcd$ dans un espace affine de dimension 3 sur un corps K de $\text{car}(K) \notin \{2, 3\}$. Montrer que l'isobarycentre des quatre sommets est le point d'intersection des 4 droites reliant un sommet au centroïde de la face opposée, ainsi que des trois *bimédianes* (= droites joignant deux milieux de côtés opposés).



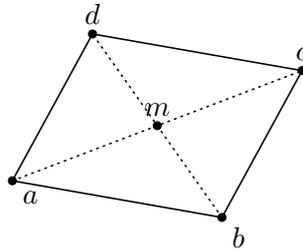
Exercice 1.5.33 (Menelaos—application). Pour un triangle abc dans un plan affine, on suppose que deux points $x \in bc$ et $y \in ac$ sont donnés par leurs coordonnées homogènes. Utiliser le Théorème de Menelaos pour calculer les coordonnées homogènes de l'unique $z \in ab \cap xy$.



Exercice 1.5.34 (Parallélogramme). Soient quatre points a, b, c et d distincts et non-colinéaires dans un espace affine. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $ad \parallel bc$ et $ab \parallel cd$,
2. a est de coordonnées homogènes $(1 : -1 : 1)$ dans le repère $\{b, c, d\}$,
3. $a - d = b - c$

4. $a - b = d - c$,
5. si $\text{car}(K) \neq 2$: ac et bd se coupent en leur milieu.



Bien sûr, on appelle un tel quadrilatère un *parallélogramme*. Observer que les sommets d'un parallélogramme sont coplanaires.

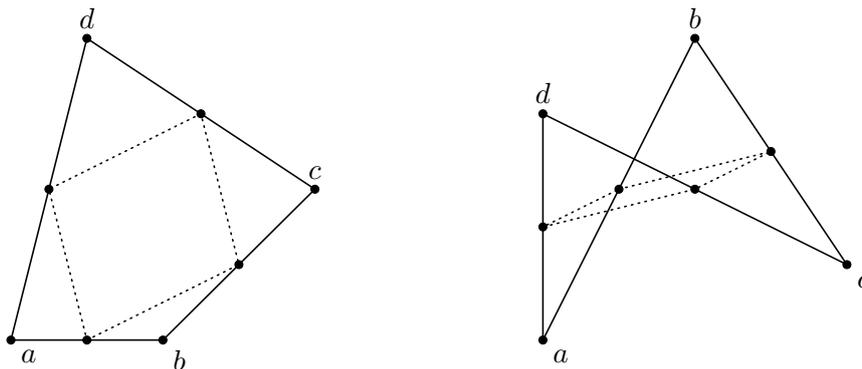
Exercice 1.5.35 (Parallélogramme et corps de caractéristique 2). Montrer qu'un corps K est de caractéristique 2 si et seulement si tout parallélogramme dans n'importe quel espace affine sur K a des diagonales parallèles.

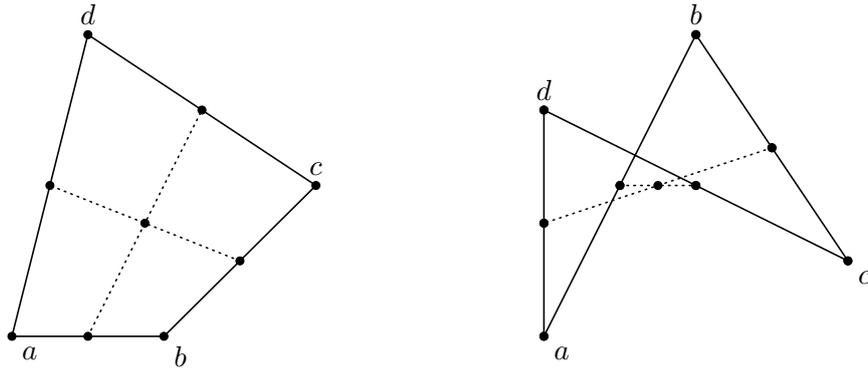
Solution. Si $\text{car}(K) \neq 2$ on a déjà montré que les diagonales de tout parallélogramme s'intersectent en leur milieu. Si $\text{car}(K) = 2$ et $abcd$ est un parallélogramme, alors (avec les conditions équivalentes de l'exercice précédent)

$$a - c = (a - b) + (b - d) + (d - c) = (d - c) + (b - d) + (d - c) = (b - d) + 2(d - c) = b - d$$

et donc les diagonales ont même direction, c'est à dire, sont parallèles. □

Exercice 1.5.36 (Théorème de Varignon). Soit un quadrilatère $abcd$ dans un plan affine sur un corps K de $\text{car}(K) \neq 2$. Montrer que les milieux des côtés du quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme ; autrement dit, les bimédianes de $abcd$ s'intersectent en leur milieu.

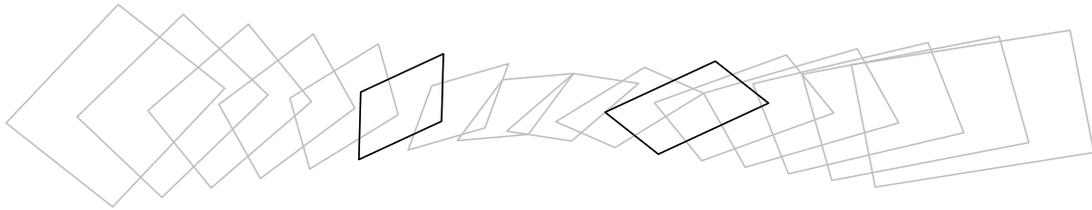




Exercice 1.5.37 (Famille de parallélogrammes). Soient $abcd$ et $a'b'c'd'$ deux parallélogrammes dans un plan affine sur un corps K et notons

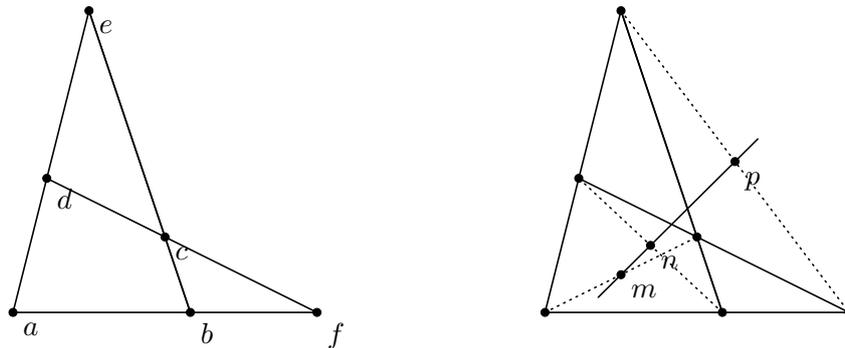
$$a_t = (1-t)a + ta' \quad b_t = (1-t)b + tb' \quad c_t = (1-t)c + tc' \quad d_t = (1-t)d + td'$$

pour $t \in K$. Montrer que chaque $a_t b_t c_t d_t$ est un parallélogramme, et observer que les sommets de cette famille de parallélogrammes sont alignés. Voici une illustration dans \mathbb{R}^2 , où les parallélogrammes noirs sont donnés et les autres sont calculés pour quelques valeurs de $t \in \mathbb{R}$:



Ce principe est utilisé en graphisme informatique (dessin animé), pour créer des images intermédiaires entre deux positions tout en gardant certaines propriétés (comme le parallélisme).

Exercice 1.5.38 (Quadrilatère complet). Un *quadrilatère complet* dans un plan affine est la donnée de 4 droites ayant exactement six points d'intersection ; autrement dit, c'est un quadrilatère $abcd$ dont les côtés opposés s'intersectent :

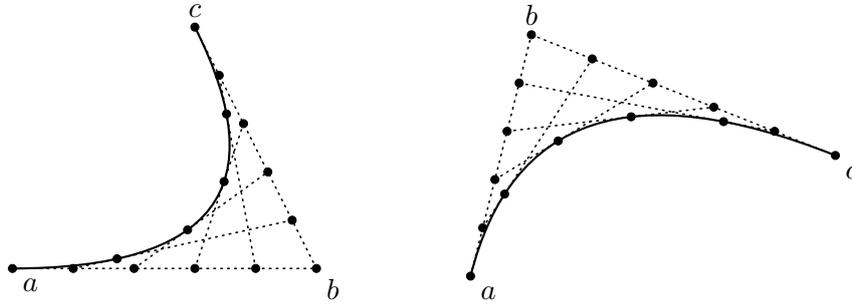


Montrer que les milieux des 3 diagonales sont colinéaires (on suppose que $\text{car}(K) \neq 2$).

Exercice 1.5.39 (Courbes de Bézier). Dans le plan affine réel, on considère trois points a , b et c non-alignés, et pour $t \in [0, 1]$ on définit les barycentres

$$m_t = (1-t) \cdot a + t \cdot b, \quad n_t = (1-t) \cdot b + t \cdot c, \quad p_t = (1-t) \cdot m_t + t \cdot n_t.$$

Montrer que la fonction $\Gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto p_t$ est quadratique en t , et que $\Gamma(0) = a$ et $\Gamma(1) = c$. L'image de Γ est un arc de parabole reliant a et c , et ayant ab comme tangente en a , et cb comme tangente en c : c'est la *courbe de Bézier de a à c avec point de contrôle b* .



On peut généraliser ce principe à des courbes de Bézier ayant n points de contrôle (et les courbes seront polynomiales de degré $n + 1$). Ces courbes sont fort utilisées pour créer des images sur ordinateur ; notamment les lettres que vous lisez ici-même (ainsi que la plupart des lettres partout ailleurs) ont été créées avec des courbes de Bézier de degré 1, 2 et 3.

Exercice 1.5.40 (Intersection d'hyperplans affines). Soit un espace vectoriel V de dimension n . Montrer que l'intersection de deux hyperplans affines H et H' de V est

- soit un hyperplan (si $H = H'$),
- soit le vide (si $H \neq H'$ et $H \parallel H'$),
- soit un sous-espace affine de dimension $n - 2$ (si $H \neq H'$ et $H \not\parallel H'$).

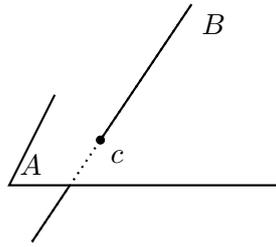
Solution. Si $H = H'$ alors bien sûr $H \cap H' = H = H'$ est un hyperplan. Supposons maintenant que $H \neq H'$ et $H \parallel H'$. Si $b \in H \cap H'$ alors $H = H_0 + b = H'_0 + b = H'$ est une contradiction ; donc $H \cap H' = \emptyset$. Supposons finalement que $H \neq H'$ et $H \not\parallel H'$. On a alors $H_0 \neq H'_0$, et il existe donc un $0 \neq x \in H_0$ tel que $x \notin H'_0$, c'est à dire, il existe une droite vectorielle $D_0 = Kx$ contenue dans H_0 et supplémentaire à H'_0 . Ainsi il suit que $V = D_0 \oplus H'_0 \subseteq H_0 + H'_0 \subseteq V$, donc $H_0 + H'_0 = V$. Par la formule "vectorielle"

$$\dim(H_0 + H'_0) + \dim(H_0 \cap H'_0) = \dim(H_0) + \dim(H'_0)$$

on sait alors que $H_0 \cap H'_0$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 2$. De plus, pour $a \in H$ quelconque, $D = D_0 + a$ est une droite affine, contenue dans H , et supplémentaire à H' . Il y a donc un unique point d'intersection de D avec H' , soit b . Et enfin, $(H_0 \cap H'_0) + b = (H_0 + b) \cap (H'_0 + b) = H \cap H'$ est un sous-espace affine de dimension $n - 2$. \square

Exercice 1.5.41 (Sous-espaces supplémentaires). Soit un espace vectoriel V de dimension n . Montrer que deux sous-espaces affines $A, B \subseteq V$ sont supplémentaires (c'est à dire, de directions supplémentaires au sens de sous-espaces vectoriels) si et seulement si leurs dimensions

sont de somme n et ils s'intersectent en un seul point.



(Ce résultat sera utile pour définir les projections affines plus tard.)

Solution. Supposons que $A_0 \oplus B_0 = V$; déjà, la somme des dimensions de A et B est donc la dimension de V . Pour $a \in A$ et $b \in B$ (un sous-espace affine n'est jamais vide!), on peut trouver $x \in A_0$ et $y \in B_0$ tel que $a - b = x + y$, et donc $-x + a = y + b \in (A_0 + a) \cap (B_0 + b) = A \cap B$, montrant que cette intersection n'est jamais vide. Notons maintenant $c \in A \cap B$, alors par bijectivité de la translation t_{-c} on a que $(A \cap B) - c = (A - c) \cap (B - c) = A_0 \cap B_0 = \{0\}$, ce qui montre que $\{c\} = A \cap B$. L'intersection est donc bel et bien un seul point.

Réciproquement, si $A \cap B = \{c\}$ alors $A_0 \cap B_0 = (A - c) \cap (B - c) = (A \cap B) - c = \{0\}$; et parce que la somme des dimensions de A et B (c'est à dire, de A_0 et B_0) est la dimension de V , il suit par la formule "vectorielle"

$$\dim(A_0 + B_0) + \dim(A_0 \cap B_0) = \dim(A_0) + \dim(B_0)$$

que $A_0 \oplus B_0 = V$. Ainsi A et B sont des sous-espaces affines supplémentaires. \square

2. Applications affines

2.1. Le groupe linéaire

Une application $f: V \rightarrow W$ entre deux espaces vectoriels (sur le même corps K) est linéaire si elle préserve toute combinaison linéaire. Bien sûr, des applications linéaires $f: V \rightarrow W$ et $g: W \rightarrow Z$ se composent en une application linéaire $gf: V \rightarrow Z$, cette composition est associative, et à les applications identité pour neutres ; autrement dit, il y a une catégorie Vec_K d'espaces vectoriels et applications linéaires. Une application linéaire $f: V \rightarrow W$ est complètement déterminée par (sa linéarité et) son action sur une base de V . Si on choisit des bases (finies) de V et W , on peut représenter $f: V \rightarrow W$ par une unique matrice. Pour tout sous-espace vectoriel $E \subseteq V$, l'image par f est un sous-espace vectoriel $f(E)$ de W ; et pour tout sous-espace vectoriel $F \subseteq W$, l'image réciproque par f est un sous-espace vectoriel $f^{-1}(F) \subseteq V$. L'image $\text{im}(f) = f(V)$ et le noyau $\ker(f) = f^{-1}\{0\}$ de $f: V \rightarrow W$ sont liés par le Théorème du Rang : $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(V)$.

Lorsqu'on veut étudier les "symétries" d'un espace vectoriel, il est naturel de considérer :

Définition 2.1.1. *Soit un espace vectoriel V . Un automorphisme linéaire $f: V \rightarrow V$ est une application linéaire bijective.*

Si une application linéaire $f: V \rightarrow W$ est bijective, alors son inverse ensembliste $f^{-1}: W \rightarrow V$ est aussi linéaire. Ainsi on obtient :

Proposition 2.1.2. *L'ensemble $GL(V)$ des automorphismes linéaires d'un espace vectoriel V est un sous-groupe de $\text{Bij}(V)$; on l'appelle le groupe général linéaire, ou tout simplement le groupe linéaire, de V .*

Par le Théorème du Rang on a immédiatement qu'une application linéaire $f: V \rightarrow V$ est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$, si et seulement si $\text{im}(f) = V$. Rappelons aussi que les éléments de $GL(V)$ peuvent être vus comme les "changements de base" dans V :

Proposition 2.1.3. *Soit un espace vectoriel V . Une application linéaire $f: V \rightarrow V$ est un automorphisme linéaire si et seulement si f envoie une (et alors toute) base sur une base.*

Pour montrer les capacités "géométriques" du groupe $GL(V)$, prenons acte de :

Proposition 2.1.4. *Tout automorphisme linéaire $f: V \rightarrow V$ envoie un sous-espace vectoriel $E \subseteq V$ sur un sous-espace vectoriel de même dimension. Pour deux sous-espaces vectoriels de même dimension, $E, E' \subseteq V$, il existe au moins un automorphisme linéaire $f: V \rightarrow V$ tel que $f(E) = E'$.*

Ajoutons que, par sa bijectivité, tout $f \in GL(V)$ préserve (et réfléchit, par l'application inverse f^{-1}) toute *incidence géométrique de sous-espaces vectoriels* : si une configuration de sous-espaces de V satisfait à des conditions exprimées à l'aide de leurs inclusions, réunions, intersections et/ou sommes, alors tout $f \in GL(V)$ l'envoie sur une configuration de sous-espaces de mêmes dimensions, satisfaisant aux mêmes conditions. Pour terminer ce premier paragraphe de rappels, faisons le lien avec le calcul matriciel :

Lemme 2.1.5. *Pour tout corps K et tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble*

$$GL(n, K) = \{M \in K^{n \times n} \mid M \text{ inversible}\}$$

est un groupe pour le produit matriciel¹.

Proposition 2.1.6. *Soit un espace vectoriel V de dimension n sur un corps K . Pour tout choix de base de V , il y a un isomorphisme de groupes $GL(V) \cong GL(n, K)$ identifiant $f \in GL(V)$ à sa matrice par rapport à la base choisie.*

On va maintenant décrire un premier sous-groupe important de $GL(V)$. Pour cela, rappelons que $f: V \rightarrow V$ est inversible si et seulement si $\det(f) \neq 0$. (Pour définir $\det(f)$ on utilise une base de V ; mais on montre ensuite que le choix de base est sans importance, et que donc $\det(f)$ est bien un invariant numérique canonique de $f: V \rightarrow V$.) On a donc une application $\det: GL(V) \rightarrow K^\times = K \setminus \{0\}$. Mais le domaine de cette application est le groupe linéaire de V , et le codomaine est le groupe multiplicatif $(K^\times, \cdot, 1)$ du corps K . Il vient en fait que :

Théorème 2.1.7. *Soit un espace vectoriel V de dimension $n \geq 1$. L'application $\det: GL(V) \rightarrow K^\times: f \mapsto \det(A)$ est un homomorphisme surjectif de groupes. Son noyau, noté $SL(V)$, est appelé le groupe linéaire spécial de V . On a ainsi une suite exacte courte*

$$SL(V) \hookrightarrow GL(V) \xrightarrow{\det} K^\times$$

d'homomorphismes de groupes, et il suit notamment que $GL(V)/SL(V) \cong K^\times$.

Démonstration. Par multiplicativité du déterminant, l'application \det est un homomorphisme de groupes. Pour voir la surjectivité de \det , on peut choisir une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V puis observer que, pour tout $\alpha \in K^\times$, l'automorphisme linéaire $f \in GL(V)$ déterminé par $fe_1 = \alpha e_1$ et $fe_i = e_i$ pour $i \neq 1$, est de déterminant α : car cela revient à définir $f: V \rightarrow V$ par rapport à la base choisie par la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(remplie avec des 0). □

1. Si $n = 0$ alors "la matrice sans éléments" est l'unique élément de $GL(n, K)$, qui est donc trivialement un groupe. Du point de vue du calcul matriciel, cela est totalement sans intérêt ; mais du point de vue de l'algèbre, l'espace nul $\{0\}$, et le groupe trivial $GL(\{0\}) = \{\text{id}\}$, ont certainement leurs *raisons d'être* !

Pour tout choix de base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , on a un isomorphisme $GL(V) \cong GL(n, K)$, sous lequel $SL(V)$ est donc identifié avec les matrices de déterminant égal à 1 :

$$SL(n, K) = \{M \in K^{n \times n} \mid \det(M) = 1\}.$$

On peut résumer ainsi : pour tout choix de base de V on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} SL(V) & \hookrightarrow & GL(V) & \xrightarrow{\det} & K^\times \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ SL(n, K) & \hookrightarrow & GL(n, K) & \xrightarrow{\det} & K^\times \end{array}$$

d'homomorphismes de groupes, dont les lignes horizontales sont des suites exactes courtes, et les flèches verticales sont les isomorphismes déterminés par la base choisie de V . Ainsi on a que $GL(V)/SL(V) \cong K^\times$, et de même au niveau matriciel. (Ces suites exactes courtes sont scindées, mais pas de façon canonique ; c'est pourquoi on ne le détaille pas ici.)

Nous poursuivons l'étude du groupe $GL(V)$ par le calcul de son centre² : cela donnera un sous-groupe normal important. Avec l'avantage du recul, on définit :

Définition 2.1.8. *Soit un espace vectoriel V et $\lambda \in K^\times$. L'application $\lambda \text{id} : V \rightarrow V : x \mapsto \lambda x$ est un automorphisme linéaire, appelée homothétie linéaire de rapport λ .*

Il est évident que :

Proposition 2.1.9. *Soit un espace vectoriel V de dimension $n \geq 1$. L'ensemble $H(V)$ des homothéties linéaires d'un espace vectoriel V de dimension $n \geq 1$ est un sous-groupe de $GL(V)$, isomorphe à $(K^\times, \cdot, 1)$. Il suit que ce groupe est commutatif.*

Si on considère l'isomorphisme de groupes $GL(V) \cong GL(n, L)$ déterminé par une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , alors le sous-groupe $H(V) \subseteq GL(V)$ est identifié aux matrices scalaires non-nulles :

$$H(n, K) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in K^\times \right\}.$$

Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(V) & \hookrightarrow & GL(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(n, K) & \hookrightarrow & G(n, K) \end{array}$$

de groupes et d'homomorphismes, dont les flèches verticales sont des isomorphismes déterminés par une base choisie de V . (En fait, l'isomorphisme $H(V) \cong H(n, K)$ ne dépend *pas* de la base choisie : c'est un isomorphisme canonique.)

2. Le centre d'un groupe G est le sous-groupe des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G ; on le note $Z(G)$. C'est toujours un sous-groupe normal.

près, un groupe de matrices de déterminant non-nul (pour le produit matriciel) ; on dit parfois aussi que G est un groupe *matriciel*. Bien sûr, $GL(n, K)$ est lui-même un groupe linéaire, ainsi que le sous-groupe des homothéties (matrices scalaires non-nulles) et le sous-groupe spécial (matrices de déterminant 1). On verra d'autres exemples de groupes linéaires dans les sections qui suivent !

2.2. Le groupe affine

Nous souhaitons désormais étudier les bijections d'un espace vectoriel qui préservent les "figures affines" (et leurs "propriétés affines") dans cet espace. Pour cela, nous étudions l'interaction entre translations et applications linéaires (et, en particulier, automorphismes linéaires).

La situation générale d'abord :

Proposition 2.2.1. *Soient des espaces vectoriels V et W .*

1. *Soit une application linéaire $f: V \rightarrow W$, alors pour tout $t \in T(V)$ il existe $t' \in T(W)$ tel que $ft = t'f$.*
2. *Si $tf = t'f'$ pour des applications linéaires $f, f': V \rightarrow W$ et des translations $t, t': W \rightarrow W$, alors $t = t'$ et $f = f'$.*

Démonstration. (1) Soit $t = t_a: V \rightarrow V$, alors pour toute application linéaire $f: V \rightarrow W$ et tout $x \in V$ on voit facilement que $f(t_ax) = f(x + a) = fx + fa = t_{fa}(fx)$, c'est à dire, on pose $t' = t_{fa} \in T(W)$. (2) En effet, $tf = t'f'$ implique $t0 = t(f0) = t'(f'0) = t'0$ d'où $t = t'$; et de là on a $tf = t'f'$ ce qui implique $f = f'$ par bijectivité de t . \square

Par conséquent, toute composition de translations t_i et d'applications linéaires f_i , p.e.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 U & \xrightarrow{t_1} & U & \xrightarrow{f_1} & V & \xrightarrow{t_2} & V & \xrightarrow{t_3} & V & \xrightarrow{f_2} & W & \xrightarrow{f_3} & X & \xrightarrow{t_4} & X \\
 & & & & & & & & & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & & & & & & & & & t_4 f_3 f_2 t_3 t_2 f_1 t_1
 \end{array}$$

s'écrit de manière unique comme la composée d'une application linéaire suivie d'une translation :

$$U \xrightarrow{f} X \xrightarrow{t} X$$

(et on peut explicitement calculer f et t si l'on veut). Cela justifie la définition suivante :

Définition 2.2.2. *Une application $g: V \rightarrow W$ entre espaces vectoriels est affine si $g = tf$ avec $f: V \rightarrow W$ une (unique) application linéaire et $t: W \rightarrow W$ une (unique) translation.*

Par ce qui précède, la composée de deux applications affines est une application affine ; et bien sûr l'application identité, $\text{id}: V \rightarrow V: x \mapsto x$, est affine. Comme la composition d'applications est bien associative, avec neutre donné par id , on obtient une catégorie Aff_K des espaces vectoriels (sur le corps K) avec les applications affines.

Notons tout de suite une sorte de "5e Postulat d'Euclide" pour les applications affines :

Proposition 2.2.3. *Soit des espaces vectoriels V et W . Une application affine $g: V \rightarrow W$ est complètement déterminé par sa partie linéaire et l'image d'un point.*

Démonstration. On sait que $g = tf$ pour une unique application linéaire $f: V \rightarrow W$ (supposée connue) et une unique translation $t: W \rightarrow W$ (qu'on cherche à déterminer). Ecrivant $t = t_b$ pour $b \in W$, on a donc $gx = fx + b$. Si on connaît l'image ga_0 d'un point (quelconque) $a_0 \in V$, alors $ga_0 = fa_0 + b$ implique que $b = ga_0 - fa_0$, et ainsi t est déterminé. \square

Le rôle du calcul barycentrique pour la géométrie affine est encore souligné par :

Proposition 2.2.4. *Une application $g: V \rightarrow W$ entre espaces vectoriels est affine si et seulement si g préserve les barycentres, i.e. pour tout $a_0, \dots, a_k \in V$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in K$ tel que $\sum_i \alpha_i = 1$ on a $g(\sum_i \alpha_i a_i) = \sum_i \alpha_i ga_i$.*

Démonstration. On montre facilement que toute application linéaire $f: V \rightarrow W$ et toute translation $t: W \rightarrow W$ préserve les barycentres; cela implique que toute composée $g = tf$ fait ainsi.

Réciproquement, soit une application $g: V \rightarrow W$ préservant les barycentres. Si $g0 = 0$ alors g est linéaire, car toute combinaison linéaire des vecteurs a_1, \dots, a_k peut être vu comme un barycentre des points $0, a_1, \dots, a_k$; et toute application linéaire est aussi affine. Si $g0 = a \neq 0$ alors $t_{-a}g0 = 0$, et $f = t_{-a}g$ est une application linéaire selon l'argument précédent. Mais alors $g = t_a f$ est une application affine. \square

Corollaire 2.2.5. *Toute application affine $g: V \rightarrow W$ entre espaces vectoriels est entièrement déterminée par l'image d'un repère affine $\{a_0, \dots, a_n\}$ de V .*

Corollaire 2.2.6. *Soit une application affine $g: V \rightarrow W$ entre espaces vectoriels. Pour tout sous-espace affine $A \subseteq V$, l'image par g est un sous-espace affine $g(A) \subseteq W$. Pour tout sous-espace affine $B \subseteq W$, l'image inverse par g est soit vide, soit un sous-espace affine $g^{-1}(B) \subseteq V$.*

Corollaire 2.2.7. *Soit un espace vectoriel V . Un sous-ensemble $A \subseteq V$ est un sous-espace affine si et seulement si A est l'image d'une application affine injective.*

Démonstration. Etant donné un sous-espace affine $A \subseteq V$, et fixant $a \in A$, la composée de l'inclusion linéaire $i: A_0 \rightarrow V: x \mapsto x$ avec la translation (bijective) $t_a: V \rightarrow V: x \mapsto x + a$ est une application affine injective $g: A_0 \rightarrow V: x \mapsto x + a$ dont l'image est exactement A . Réciproquement, le corollaire précédent s'applique. \square

Une application affine $g = tf: V \rightarrow W$ est injective (surjective, bijective) si et seulement sa partie linéaire f l'est, parce que la translation t est toujours bijective. Ainsi, en particulier, l'inverse (ensembliste) d'une application affine bijective est $g^{-1} = (tf)^{-1} = f^{-1}t^{-1} = t'f^{-1}$ pour une unique $t' \in T(V)$ (que l'on peut facilement calculer avec la Proposition 2.2.1), et avec $f^{-1} \in GL(V)$. Ceci montre que g^{-1} est aussi une application affine. En toute logique on pose :

Définition 2.2.8. *Soit un espace vectoriel V . Un automorphisme affine $g: V \rightarrow V$ est une application affine bijective.*

Ce qui précède montre immédiatement :

Proposition 2.2.9. *Soit un espace vectoriel V . L'ensemble $GA(V)$ des automorphismes affines de V est un sous-groupe de $\text{Bij}(V)$, appelé le groupe affine de V .*

Tout comme les $f \in GL(V)$ sont les “changements de base (vectorielle)”, les $g \in GA(V)$ sont les “changements de repère affine” :

Proposition 2.2.10. *Soit un espace vectoriel V . Une application affine $g: V \rightarrow V$ est un automorphisme affine si et seulement si g envoie un (et alors tout) repère affine de V sur un repère affine de V .*

Démonstration. Une application affine $g = tf$ est injective, surjective ou bijective si et seulement si sa partie linéaire f l'est. Ainsi, une application affine $g: V \rightarrow V$ (V de dimension finie) est un automorphisme si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Supposons d'abord que l'application affine g est injective. Etant donné un repère affine $\{a_0, \dots, a_n\}$ de V , si un élément $ga_{i_0} \in \{ga_0, \dots, ga_n\}$ serait un barycentre des autres éléments de cet ensemble, alors il serait de même pour $a_{i_0} \in \{a_0, \dots, a_n\}$, contredisant ainsi que $\{a_0, \dots, a_n\}$ est affinement libre. Ainsi $\{ga_0, \dots, ga_n\}$ est affinement libre dans V , et donc un repère affine (car comptant le “bon nombre” d'éléments).

Réciproquement, supposons que l'application affine g envoie un repère affine $\{a_0, \dots, a_n\}$ sur un repère affine $\{ga_0, \dots, ga_n\}$. Tout $y = \sum_i \alpha_i ga_i \in V$ (avec $\sum_i \alpha_i = 1$) est alors l'image par g de $x = \sum_i \alpha_i a_i$. Ceci montre la surjectivité de g . \square

Regardons maintenant de plus près le groupe $GA(V)$ et sa relation avec les groupes déjà rencontrés. Sans doute le résultat le plus important est :

Théorème 2.2.11. *Soit un espace vectoriel V . L'application $GA(V) \rightarrow GL(V)$, envoyant une application affine $g = tf$ sur sa partie linéaire f , est un homomorphisme surjectif de groupes, dont $T(V)$ est le noyau ; il suit que $GL(V) \cong GA(V)/T(V)$. De plus, la suite exacte courte*

$$T(V) \hookrightarrow GA(V) \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} GL(V)$$

est scindée par l'inclusion de $GL(V)$ dans $GA(V)$; il suit que $GA(V) = T(V) \rtimes GL(V)$.

Démonstration. Notons, pour cette démonstration,

$$\delta: GA(V) \rightarrow GL(V): g = tf \mapsto f$$

l'application (bien définie, voir plus haut!) envoyant un automorphisme affine sur sa partie linéaire. Pour tout $g, g' \in GA(V)$ il suit que $\delta(g'g) = \delta(t'f'tf) = \delta(t't''f'f) = f'f = \delta(g')\delta(g)$; ainsi δ est un homomorphisme de groupes. Sa surjectivité suit du fait que, pour tout $f \in GL(V)$, on peut poser $g = \text{id}_V f$ (donc on prend la translation “identité”, $t = \text{id}_V = t_0$) pour voir que $\delta(\text{id}_V f) = f$. C'est à dire, la surjection $\delta: GA(V) \rightarrow GL(V)$ est scindée par l'inclusion $GL(V) \rightarrow GA(V): f \mapsto f$ (et cette inclusion est aussi un homomorphisme). Finalement, il est immédiat que $\ker \delta = \{g = tf \in GA(V) \mid f = \text{id}_V\} = T(V)$. \square

On sait que le groupe des translations $T(V)$ est isomorphe au groupe $(V, +, 0)$, l'isomorphisme étant donné par $t \mapsto t0$, avec inverse $a \mapsto t_a$. Ainsi on a un diagramme commutatif de groupes et homomorphismes,

$$\begin{array}{ccccc} T(V) & \hookrightarrow & GA(V) & \xleftarrow{\quad} & GL(V) \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ V & \hookrightarrow & GA(V) & \xleftarrow{\quad} & GL(V) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes. Cela montre que la suite exacte courte scindée à la première ligne peut être remplacé par la suite exacte courte scindée à la deuxième ligne, et permet d'écrire aussi $GA(V) = V \rtimes GL(V)$. Par ailleurs, identifiant ces suites exactes courtes scindées par des actions de groupes⁴, l'action correspondant à la première suite est la *conjugaison*,

$$T(V) \times GL(V) \rightarrow T(V): (t, f) \mapsto ftf^{-1},$$

alors que l'action correspondant à la deuxième suite est l'*action standard*,

$$V \times GL(V) \rightarrow V: (a, f) \mapsto fa,$$

chose tout à fait naturel puisque $GL(V) \subseteq \text{Bij}(V)$. (Et ces deux actions sont isomorphes!)

Ayant décrit le groupe des automorphismes affines, il est important de comprendre comment les "figures affines" dans un espace vectoriel sont transformées.

Proposition 2.2.12. *Soit un espace vectoriel V et $g \in GA(V)$. Pour tout sous-espace affine $A \subseteq V$, l'image $g(A)$ est un sous-espace affine de même dimension que A . Si $B \subseteq V$ est un autre sous-espace affine, alors on a $A \parallel B$ si et seulement si $g(A) \parallel g(B)$. Et si $A, A' \subseteq V$ sont deux sous-espaces affines de même dimension, alors il existe (au moins) un $g \in GA(V)$ envoyant A sur A' .*

Démonstration. Puisque $g = tf$ avec $t \in T(V)$ et $f \in GL(V)$, il suffit de démontrer les propriétés énoncées pour toute translation et toute automorphisme linéaire.

Soit d'abord $t_c \in T(V)$. Pour $a \in A$ on voit que $t_c(A) = t_c(A_0 + a) = A_0 + (a + c) = t_{a+c}(A_0)$ est un sous-espace affine de même dimension que A . Ensuite, supposant que $b \in B$, on a aussi $t_c(B) = t_{b+c}(B_0)$, ce qui montre que $A \parallel B$ si et seulement si $A_0 = B_0$, si et seulement si $t_c(A) \parallel t_c(B)$.

Soit maintenant $f \in GL(V)$. Toujours pour $a \in A$, on a que $f(A) = f(t_a(A_0)) = t_{fa}(f(A_0))$ et puisque $f(A_0)$ est un sous-espace vectoriel de même dimension que A_0 , $f(A)$ est un sous-espace affine de même dimension que A (bien que de direction différente). De même, si maintenant $B = t_b(B_0)$ alors $f(B) = f(t_b(B_0)) = t_{fb}(f(B_0))$, et donc $A \parallel B$ si et seulement si $A_0 = B_0$, si et seulement si $f(A_0) = f(B_0)$, si et seulement si $f(A) \parallel f(B)$.

Finalement, il suffit d'observer que, pour $A = A_0 + a$ et $A' = A'_0 + a'$ avec A_0 et A'_0 de même dimension, on peut toujours trouver (au moins) un automorphisme linéaire $f \in GL(V)$ tel que $f(A_0) = A'_0$, puis l'application affine $g = t_{a'}ft_{-a}$ envoie A sur A' . \square

4. La suite exacte courte scindée $N \xrightarrow{j} G \xleftarrow[p]{s} Q$ equivaut l'action $j(N) \times s(Q) \rightarrow j(N)$ "par conjugaison".

Ajoutons au résultat précédent que, par sa bijectivité, tout $g \in GA(V)$ préserve aussi toute relation d'incidence entre sous-espaces affines. Ainsi, tout automorphisme affine de V envoie points sur points, droites sur droites, plans sur plans, etc., et préserve (et reflète) toute incidence et tout parallélisme entre points, droites, plans, etc. Bref, le groupe affine détecte (ou décrit) exactement le caractère affine de figures dans V .

D'un autre point de vue, on peut aussi voir les éléments de $GA(V)$ comme les *changements de repère affine*. Ainsi le résultat ci-dessus implique que le choix de repère affine est sans importance lorsqu'on s'en sert pour démontrer des résultats "affines" (par un calcul barycentrique, p.e.).

Par ailleurs, le résultat montre aussi la transitivité du groupe $GA(V)$ sur tous les ensembles de sous-espaces affines de même dimension—et notamment sur les points de V ! Ainsi, il atteste que, vu par le groupe $GA(V)$, l'espace V est *homogène* (ce qu'il n'était pas pour le groupe $GL(V)$: car 0 est un point fixe de tous les éléments de $GL(V)$).

2.3. Le groupe des dilatations

Un sous-groupe important de $GL(V)$ est son centre, le groupe des homothéties linéaires $H(V)$. Un automorphisme affine quelconque $g \in GA(V)$ est toujours la composée d'une translation $t \in T(V)$ avec un automorphisme linéaire $f \in GL(V)$. Se limitant aux automorphismes linéaires qui se trouvent dans le centre $H(V) = \mathcal{Z}(GL(V))$, on définit :

Définition 2.3.1. Une dilatation⁵ est un automorphisme affine dont la partie linéaire est une homothétie linéaire.

Explicitement on peut écrire une dilatation comme $d: V \rightarrow V: x \mapsto \lambda x + a$, pour $\lambda \in K^\times$ et $a \in V$. Autrement dit, $g \in GA(V)$ est une dilatation si et seulement si son image par l'homomorphisme surjectif $GA(V) \rightarrow GL(V)$ est dans le sous-groupe normal $H(V) \subseteq GL(V)$. Ainsi il vient de suite :

Proposition 2.3.2. L'ensemble $D(V)$ des dilatations d'un espace vectoriel V est l'image réciproque par l'homomorphisme surjectif $GA(V) \rightarrow GL(V)$ du sous-groupe normal $H(V) \subseteq GL(V)$. Ainsi $D(V)$ est un sous-groupe normal de $GA(V)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D(V) & \longrightarrow & H(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ GA(V) & \longrightarrow & GL(V) \end{array}$$

de groupes et homomorphismes, dont les flèches verticales sont des inclusions.

On obtient immédiatement une "sous-suite" exacte courte scindée (par l'inclusion)

$$\begin{array}{ccccc} T(V) & \hookrightarrow & D(V) & \overset{\leftarrow}{\twoheadrightarrow} & H(V) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ T(V) & \hookrightarrow & GA(V) & \overset{\leftarrow}{\twoheadrightarrow} & GL(V) \end{array}$$

5. Attention, ce terme ne signifie pas toujours la même chose dans les références !

montrant que $D(V) = T(V) \rtimes H(V)$. (On peut remarquer que $H(V)$ et $T(V)$ sont des groupes commutatifs, mais que $D(V)$ ne l'est pas nécessairement : un produit semi-direct de groupes commutatifs n'est donc pas toujours commutatif!)

La particularité des dilatations est tout à fait géométrique :

Proposition 2.3.3. *Un automorphisme affine $g: V \rightarrow V$ d'un espace vectoriel est une dilatation si et seulement si g envoie chaque droite affine dans V sur une droite affine parallèle.*

Démonstration. Soit une dilatation $g = th$, avec $t \in T(V)$ et $h \in H(V)$, et une droite affine $t_a(Kx)$ (pour $x \neq 0$). On a alors que $g(t_a(Kx)) = tht_a(Kx) = t'h(Kx)$ (et on peut explicitement calculer $t' \in T(V)$ si l'on souhaite). Mais toute homothétie $h = \lambda \text{id}: V \rightarrow V$ ($\lambda \neq 0$) envoie toute droite sur elle-même, donc $t'h(Kx) = t'(Kx)$, qui est par définition parallèle à $t_a(Kx)$. Réciproquement, supposons qu'un automorphisme $g = tf \in GA(V)$ envoie toute droite affine sur une droite affine parallèle ; alors sûrement la même chose est vraie pour l'application linéaire $f = t^{-1}g$ (puisque toute translation fait ainsi). Mais f envoie donc toute droite vectorielle sur elle-même, et nous avons déjà vu (dans la démonstration de $\mathcal{Z}(GL(V)) = H(V)$) qu'un tel $f \in GL(V)$ est nécessairement une homothétie (linéaire). Ainsi g est la composée d'une translation avec une homothétie linéaire. \square

Proposition 2.3.4 (Classification des dilatations). *Pour chaque dilatation $d \in D(V)$, une et une seule des trois possibilités suivantes est satisfaite :*

- d ne fixe aucun point : d est une translation par un vecteur $v \neq 0$,
- d fixe exactement un point : d est une homothétie affine de rapport $\lambda \neq 1$ et de centre le point fixe,
- d fixe tous les points : d est l'application identité.

Démonstration. Posons $d = t_a h_\lambda$ avec $t_a x = x + a$ et $h_\lambda x = \lambda x$ ($\lambda \in K^\times$). Si $\lambda = 1$ alors $d = t_a$, et soit $a = 0$ et alors $d = \text{id}$ fixe tous les points, soit $a \neq 0$ et alors $d = t_a$ ne fixe aucun point. Si $\lambda \neq 1$ (et donc $1 - \lambda \in K^\times$) alors $dx = x$ si et seulement si $\lambda x + a = x$, si et seulement si $x = (1 - \lambda)^{-1}a$; c'est à dire, d a un unique point fixe, $c := (1 - \lambda)^{-1}a$. Dans ce cas on peut réécrire

$$dx = t_a h_\lambda x = \lambda x + a = \lambda(x - c) + c = t_c h_\lambda t_{-c} x,$$

et ceci montre comment $d: V \rightarrow V$ est une homothétie affine de centre c (= le point fixe) et de rapport λ . \square

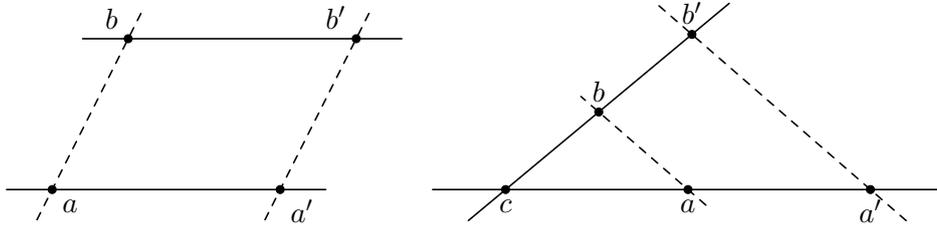
Corollaire 2.3.5. *Toute dilatation $d \in D(V)$ est complètement déterminé par l'image de deux points distincts de V . (Et rappelons que pour une translation un seul point suffit.)*

Démonstration. Si $d_1 a = d_2 a$ et $d_1 b = d_2 b$ pour $a \neq b$ alors $d_1 d_2^{-1} a = a$ et $d_1 d_2^{-1} b = b$ donc $d_1 d_2^{-1} = \text{id}$ par la classification des dilatations, d'où $d_1 = d_2$. (Si $t: V \rightarrow V: x \mapsto x + b$ envoie a sur a' , alors $a' = ta = a + b$ donc nécessairement $b = a' - a$.) \square

Corollaire 2.3.6. *Soit une dilatation $d \in D(V)$, notons $a' = da$ et $b' = db$ pour $a, b \in V$, et supposons que ces quatre points sont distincts et non alignés trois à trois. Si d est une translation alors $aa' \parallel bb'$; et si d est une homothétie affine alors aa' et bb' sont concourantes au centre de l'homothétie. (Et rappelons que $ab \parallel a'b'$ dans tous les cas.)*

Démonstration. Par hypothèse, d n'est pas l'identité (car $da = a' \neq a$). Si d est une translation, notons $d: V \rightarrow V: x \mapsto x+v$ (de vecteur $v \neq 0$), alors on a $a' = a+v$ et donc $aa' = K(a'-a)+a = Kv + a$ pour tout a ; ainsi il suit que $aa' \parallel bb'$ pour tout $a \neq b$. Si d est une homothétie affine, notons $d: V \rightarrow V: x \mapsto \lambda(x-c)+c$ (de centre $c \in V$ et rapport $\lambda \neq 1$), alors on a $a' = \lambda(a-c)+c$ et donc $aa' = K(a'-a) + a = K((1-\lambda)(c-a)) + a = K(c-a) + a = ac$ pour tout a ; ainsi il suit que $c \in aa' \cap bb'$, et puisque l'intersection de deux droites affines distinctes est au plus un point, on a bien $\{c\} = aa' \cap bb'$. \square

Dans la situation de l'énoncé, on a les images suivantes dans le plan affine contenant a, a', b, b' :



On voit ainsi que les dilatations (i.e. translations et homothéties) “unifient” deux situations importantes en géométrie affine :

Proposition 2.3.7 (Lemme du parallélogramme). *Soient deux droites distinctes et parallèles aa' et bb' . Alors on a $ab \parallel a'b'$ (c'est à dire, le quadrilatère $abb'a'$ est un parallélogramme) si et seulement s'il existe une (unique) translation $t: V \rightarrow V$ telle que $a' = ta$ et $b' = tb$.*

Démonstration. Il nous reste à montrer une implication. Soit l'unique translation $t: V \rightarrow V$ tel que $ta = a'$. Notant $x = tb$, on cherche à montrer que $x = b'$. On a $ab \parallel a'x$ (par ce qui précède) et $ab \parallel a'b'$ (par hypothèse), donc $a'x \parallel a'b'$, donc $a'x = a'b'$ (car ils ont le point a' en commun). De même, on a $aa' \parallel bx$ (par ce qui précède) et $aa' \parallel bb'$ (par hypothèse), donc $bx = bb'$ (car ils ont le point b en commun). Ainsi $\{x\} = a'x \cap bx = a'b' \cap bb' = \{b'\}$, d'où $x = b'$ comme voulu. \square

L'énoncé suivant honore Thales⁶ de Milet (ca. -600).

Proposition 2.3.8 (Théorème de Thales). *Soient deux droites distinctes aa' et bb' concourantes en un cinquième point c . Alors on a $ab \parallel a'b'$ si et seulement s'il existe une (unique) homothétie affine $h: V \rightarrow V$ de centre c telle que $a' = ha$ et $b' = hb$.*

Démonstration. Il nous reste à montrer une implication. Soit $h: V \rightarrow V$ l'unique homothétie affine telle que $hc = c$ et $ha = a'$. Notant $x = hb$, on cherche à montrer que $x = b'$. On a $c \in bx$ (par ce qui précède) et $c \in bb'$ (par hypothèse), donc $bx = bb'$. On a $ab \parallel a'x$ (par ce qui précède) et $ab \parallel a'b'$ (par hypothèse), donc $a'x = a'b'$ (car ils ont un point en commun). Ainsi $\{x\} = bx \cap a'x = bb' \cap a'b' = \{b'\}$ et on a $x = b'$ comme voulu. \square

6. En grec : $\Theta\alpha\lambda\eta\varsigma$; par ailleurs, en français, on dit Milet pour l'ancienne cité grecque $M\acute{\iota}\lambda\eta\tau\omicron\varsigma$.

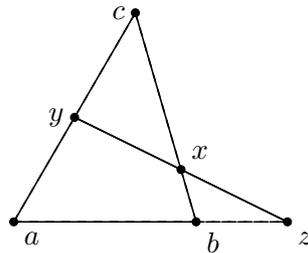
2.4. Encore quelques résultats géométriques

Nous avons déjà démontré le résultat suivant à l'aide des barycentres ; mais voici une démonstration (plus élégante et plus courte !) par les dilatations :

Proposition 2.4.1 (Théorème de Menelaos—avec homothéties). *Soit un triangle abc , et $x \in bc$, $y \in ca$ et $z \in ab$ trois points distincts des sommets du triangle. Notons les homothéties h_1 , h_2 et h_3 déterminées par*

$$h_1x = x \text{ et } h_1b = c, \quad h_2y = y \text{ et } h_2c = a, \quad h_3z = z \text{ et } h_3a = b$$

et de rapports λ_1 , λ_2 et λ_3 . Alors les points x , y et z sont alignés si et seulement si $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.



Démonstration. Notons que $h_i \neq \text{id}$ (pour tout i), car a , b et c sont distincts. La composée de ces trois homothéties, soit $h = h_3h_2h_1$, est une dilatation ayant b pour point fixe : c'est donc l'homothétie de centre b et rapport $\lambda = \lambda_3\lambda_2\lambda_1$. On a toujours que $h_1(xy) = xy = h_2(xy)$ (car xy est une droite passant par le centre de h_1 , resp. h_2), et donc $h_2h_1(xy) = xy$. Aussi, $h_3(xy) = xy$ si et seulement si $z \in xy$ (car z est le centre de h_3 , et seules les droites passant par le centre de l'homothétie sont envoyées sur elles-mêmes). Ainsi $z \in xy$ si et seulement si $h(xy) = xy$, et puisque xy ne contient pas le point b (= le centre de h), ceci est encore équivalent à $h = \text{id}$, c'est à dire $\lambda = 1$. \square

L'énoncé ci-dessus semble, à première vue, différent de l'énoncé du théorème que nous avons démontré à l'aide des barycentres : là-bas c'était $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\beta_1\beta_2\beta_3$, et ici c'est $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Cette différence s'explique par le fait que, pour $a_0 \in a_1a_2$ (et $a_1 \neq a_2$), on a d'un côté l'unique homothétie h de centre a_0 et rapport λ telle que $ha_1 = a_2$, et de l'autre côté l'unique barycentre $a_0 = \alpha a_1 + \beta a_2$ (donc $\alpha + \beta = 1$) : en comparant les deux expressions on trouve que $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$; et ceci explique cela. Ainsi, en faisant un "faux" calcul à partir de $\lambda(a_1 - a_0) + a_0 = a_2$, pour les trois points colinéaires a_0, a_1, a_2 on définit leur *rapport*

$$\frac{a_2 - a_0}{a_1 - a_0} := \lambda \in K.$$

Attention, cette "fraction" n'est qu'un *symbole*, et non pas une vraie proportion ! Ainsi on peut reformuler le résultat précédent comme suit :

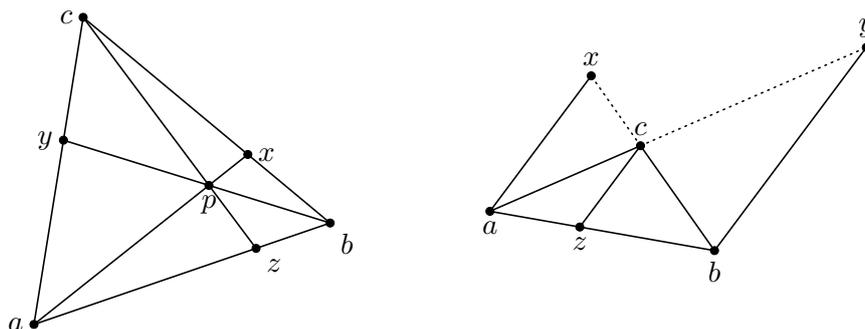
Corollaire 2.4.2 (Théorème de Menelaos—avec rapports). *Soit un triangle abc , et $x \in bc$, $y \in ca$ et $z \in ab$ trois points distincts des sommets du triangle. Alors les points x , y et z sont alignés si et seulement si*

$$\frac{c-x}{b-x} \cdot \frac{a-y}{c-y} \cdot \frac{b-z}{a-z} = 1.$$

Aussi le résultat suivant, dont nous avons déjà donné une démonstration à l'aide de barycentres, peut être énoncé avec des rapports :

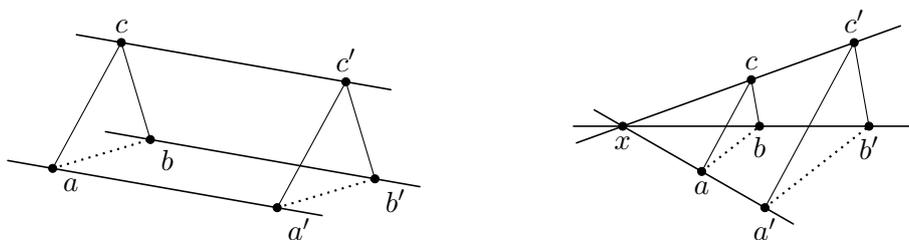
Corollaire 2.4.3 (Théorème de Ceva—avec rapports). *Soit un triangle abc , et $x \in bc$, $y \in ca$ et $z \in ab$ trois points distincts des sommets du triangle. Alors les droites ax , by et cz sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\frac{c-x}{b-x} \cdot \frac{a-y}{c-y} \cdot \frac{b-z}{a-z} = -1.$$



Pour illustrer encore l'importance des dilatations (et la “dichotomie” créée par translations et homothéties), démontrons un résultat fameux que l'on doit au français Girard Desargues (1591–1661), architecte et fondateur de la *géométrie projective* :

Proposition 2.4.4 (Axiome de Desargues—affine). *Soient deux triangles disjoints abc et $a'b'c'$ tels que aa' , bb' et cc' sont soit parallèles, soit concourantes. Si $ac \parallel a'c'$ et $bc \parallel b'c'$ alors aussi $ab \parallel a'b'$.*

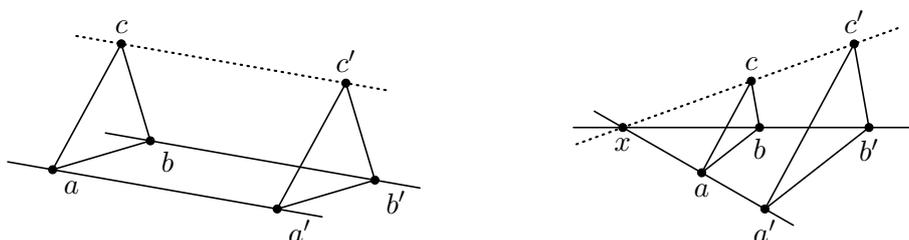


Démonstration. Supposons d'abord que les trois droites aa' , bb' et cc' sont parallèles. Soit alors l'unique translation $t: V \rightarrow V$ envoyant a sur a' . Par le Lemme du parallélogramme (justifié par les hypothèses $ac \parallel a'c'$ et $bc \parallel b'c'$), on a d'abord $tc = c'$, et ensuite aussi $tb = b'$; ainsi $ab \parallel a'b'$. Si les droites aa' , bb' et cc' sont concourantes, alors on a “la même démonstration” mais avec des homothéties (et le théorème de Thales)! \square

Le résultat ci-dessus n'est pas un “axiome” dans le cadre de la géométrie affine *linéaire* (que nous pratiquons dans ce cours)—c'est tout simplement un théorème, et nous venons d'en donner la démonstration! Mais dans une approche *axiomatique* de la géométrie affine, dépourvue de toute algèbre linéaire, on définit un *plan affine (abstrait)* comme la donnée d'un ensemble P de “points” et un ensemble D de “droites”, satisfaisant aux axiomes d'incidence suivants : (i) deux points

distincts sont contenus dans une unique droite, (ii) il existe trois points non-colinéaires, et (iii) pour toute droite et tout point en dehors de cette droite, il existe une unique autre droite passant par ce point et disjointe de la droite donnée (5e Postulat d'Euclide). Il existe de tels plans affines dans lesquels le résultat ci-dessus n'est pas satisfait – le plus célèbre est le *plan de Moulton*, voir [Forest Ray Moulton, *A Simple Non-Desarguesian Plane Geometry*, Transactions of the AMS, 1902, pp. 192–195] – et on peut alors l'ajouter comme un axiome, auquel cas on parle d'un *plan affine arguésien*.

Proposition 2.4.5 (Desargues—affine, réciproque). *Soient deux triangles disjoints abc et $a'b'c'$ tels que $ab \parallel a'b'$, $ac \parallel a'c'$ et $bc \parallel b'c'$. Alors les droites aa' , bb' et cc' sont soit parallèles, soit concourantes.*

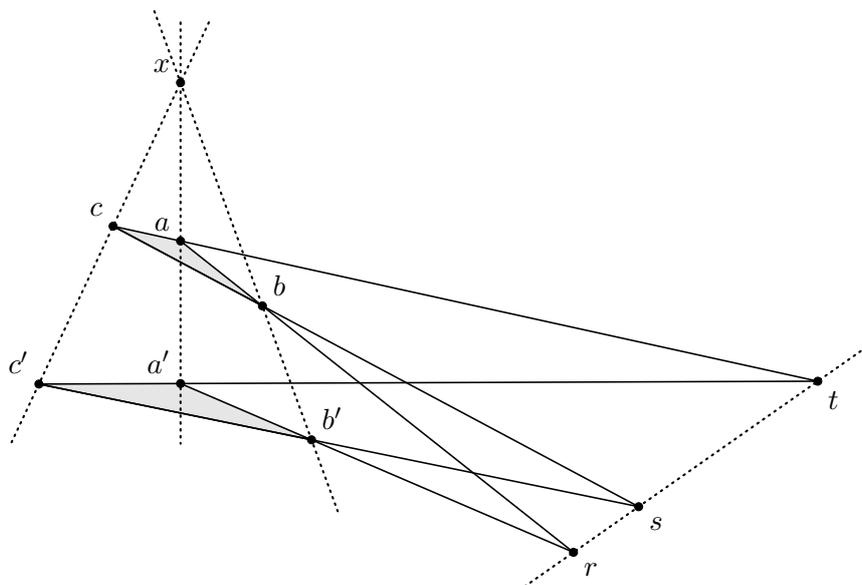


Démonstration. Supposons que aa' et bb' s'intersectent en un point x . Par le théorème de Thales, il existe une unique homothétie affine h de centre x et envoyant a sur a' , et b sur b' . Soit le point $c'' := hc$. La droite $a'c''$ est nécessairement parallèle à ac et passant par a' : elle est (par les hypothèses et le “5e Postulat”) égale à $a'c'$. De même, la droite $b'c''$ est nécessairement parallèle à bc et passant par b' : elle est égale à $b'c'$. Puisque $\{c''\} = a'c'' \cap b'c'' = a'c' \cap b'c' = \{c'\}$, on a $hc = c'' = c'$; ce point est donc sur la droite xc , ce qui montre qu'aussi cc' passe par x . \square

Remarquons que les hypothèses des énoncés ci-dessus impliquent le parallélisme des deux plans $\langle a, b, c \rangle$ et $\langle a', b', c' \rangle$, ces plans étant identiques lorsque abc et $a'b'c'$ sont coplanaires. On peut donc voir les dessins ci-dessus “dans le plan” ou “dans l'espace” ! Par ailleurs, le résultat suivant est évident lorsqu'on le “voit” dans l'espace (réel) à trois dimensions, mais nécessite une démonstration lorsqu'on le considère dans un plan :

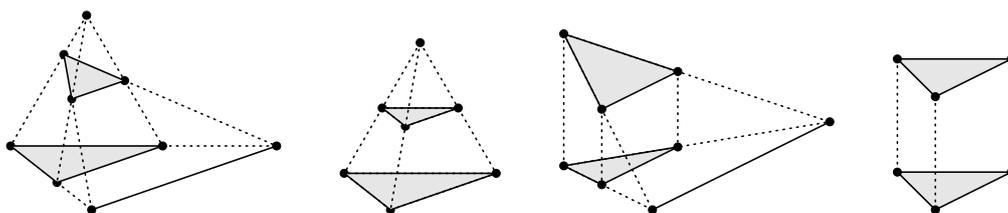
Théorème 2.4.6 (Théorème de Desargues). *Soient deux triangles disjoints abc et $a'b'c'$ tels que $ab \cap a'b' = \{r\}$, $bc \cap b'c' = \{s\}$ et $ca \cap c'a' = \{t\}$. Si aa' , bb' et cc' sont concourantes (en x disons) alors les points r , s et t sont alignés. (“Si les sommets de deux triangles sont en*

perspective centrale alors leurs côtés sont en perspective axiale”.)



Le dessin ci-dessus montre une *configuration de Desargues* : il est donné par 10 points et 10 droites qui, vus dans l'espace, sont complètement déterminés par 5 plans (“en position générale”). Une démonstration peut être donnée par applications répétées du Théorème de Menelaos. Pour une démonstration élémentaire dans un plan affine arguésien abstrait (et donc parfaitement valable dans un plan affine linéaire!), qui consiste à appliquer plusieurs fois l’Axiome de Desargues, voir [M. Prazmowska, *A proof of the projective desargues axiom in the desarguesian affine plane*, Demonstratio Mathematica 37, 2004, pp. 921–924].

Il y a un sens très précis dans lequel le Théorème de Desargues ci-dessus implique l’Axiome de Desargues. Intuitivement, travaillant dans un plan affine, on peut accepter que *deux droites sont parallèles si et seulement si elles s’intersectent “à l’infini”*. Ainsi, si on ajoute au plan affine des points “à l’infini”, alors deux droites distinctes ont toujours un et un seul point en commun : soit un point “affine”, soit un point “à l’infini”. On obtient alors ce qu’on appelle un *plan projectif*. Si, dans le dessin ci-dessus, on s’imagine les points r , s et t “à l’infini”, alors on a $ab \parallel a'b'$, $ac \parallel a'c'$ et $bc \parallel b'c'$; et on récupère exactement l’énoncé “central” de l’Axiome de Desargues. Si, de plus, on s’imagine le point x “à l’infini”, alors on retrouve l’énoncé “parallèle” dudit résultat. Par ailleurs, avec x “à l’infini” ou pas, on peut aussi s’imaginer seulement r “à l’infini” : dans ce cas, $ab \parallel a'b'$, et la droite st n’aura pas de point “affine” en commun avec ab ou $a'b'$, mais bien un point “à l’infini”, donc on trouve que $st \parallel ab$. Ainsi, le Théorème de Desargues ci-dessus implique quatre versions affines “avec parallélisme” :

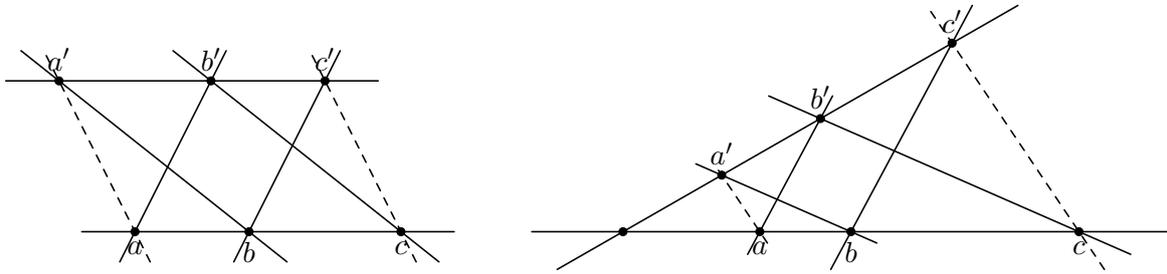


Cette observation a mené Jean-Victor Poncelet (1788–1867) à écrire son *Traité des propriétés*

projectives des figures lorsqu'il était prisonnier de guerre en Russie en 1812 (en tant que polytechnicien à la Grande Armée de Napoléon). Ajoutons qu'un autre "bonus" de la géométrie plane projective, est qu'elle est *autoduale* : lorsqu'on échange "points" et "droites" dans l'énoncé d'un théorème, et on garde les relations d'incidence, alors on obtient un autre théorème valide. C'est le cas pour le Théorème de Desargues, et il suit que la condition nécessaire de l'énoncé ci-dessus *implique* la condition suffisante ! C'est pourquoi, en géométrie affine, l'Axiome de Desargues implique sa réciproque, comme nous avons démontré.

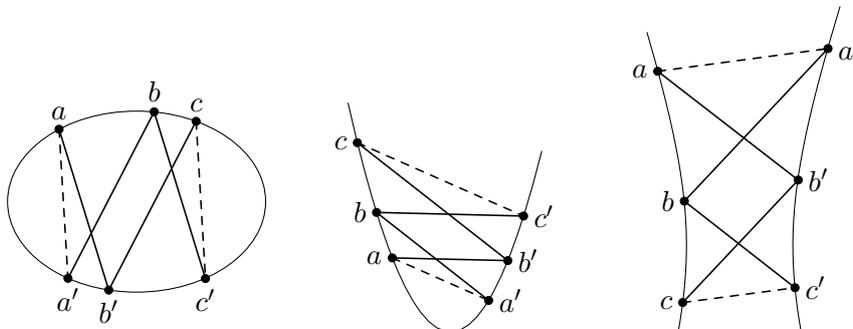
Pour clore ce chapitre, voici encore un autre grand classique de la géométrie affine, cette fois portant le nom de Pappus⁷ d'Alexandrie (ca. 290–350) :

Proposition 2.4.7 (Théorème de Pappus—affine). *Soit deux droites distinctes coplanaires, et trois points distincts sur chaque droite, disons a, b, c et a', b', c' , qui sont aussi distincts de l'éventuel point d'intersection des deux droites. Si $ab' \parallel bc'$ et $a'b \parallel b'c$ alors $aa' \parallel cc'$.*



Démonstration. Les droites coplanaires ab (contenant c) et $a'b'$ (contenant c') sont soit parallèles, soit sécantes (en un point d , disons). Dans le premier cas on démontre le résultat avec des translations ("deux fois le lemme du parallélogramme"), dans le deuxième cas avec des homothéties ("deux fois le théorème de Thalès"). Attention : on devra utiliser que deux translations, resp. deux homothéties de même centre, commutent. Pour les translations, cela revient à dire que $(V, +, 0)$ est un groupe commutatif ; pour deux homothéties de centre $c \in V$, cela revient à dire que $(K^\times, \cdot, 1)$ est un groupe commutatif. \square

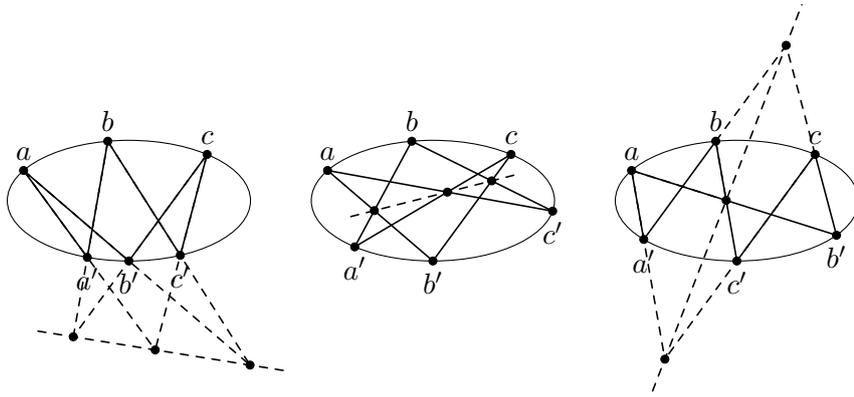
Deux droites distinctes dans le plan (parallèles ou sécantes en un point) sont des cas "dégénérés" de sections de coniques. Et en effet, le résultat ci-dessus est toujours valable lorsque les six points a, b, c, a', b', c' se trouvent sur une ellipse, une parabole ou une hyperbole :



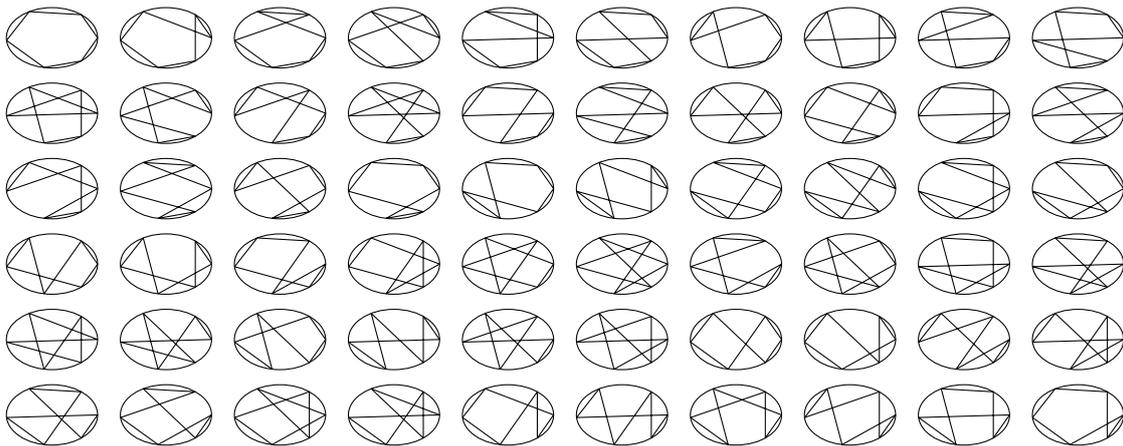
7. En grec : "Πάππος"; en lettres latines on devrait écrire plutôt "Pappos", mais "Pappus" est la norme.

Mieux encore, lorsqu'on ajoute des points "à l'infini" au plan affine, et on passe donc au plan projectif, non-seulement aura-t-on que deux droites distinctes s'intersectent toujours en un unique point, mais il est aussi vrai que *toutes les sections de coniques se réduisent à une ellipse*. Ainsi, avec une définition adéquate pour 'section de conique' en géométrie projective, le théorème de Pappus ci-dessus devient :

Théorème 2.4.8 (Théorème de Pascal). *Dans un plan projectif linéaire, un hexagone est inscrit dans une ellipse si et seulement si ses côtés opposés (prolongés en droites) se coupent en 3 points alignés.*



Un très jeune Blaise Pascal (1623–1662) a formulé ce théorème dans son *Essay pour les coniques* datant de 1640. La droite contenant les 3 points d'intersections des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique s'appelle aujourd'hui la *droite de Pascal*. Six points sur une conique définissent 60 hexagones distincts, donc 60 droites de Pascal distinctes—et ces 60 droites ont des propriétés d'incidence remarquables. Voir les références !

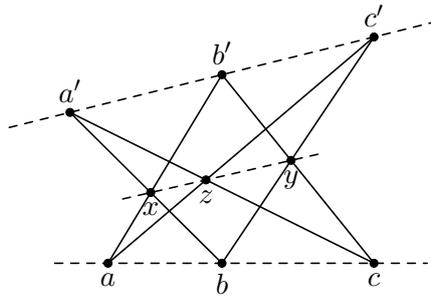


La démonstration de ce résultat est hors portée de ce cours—faute de temps pour introduire en détail la géométrie projective⁸. Néanmoins, on peut donner une conséquence affine de ce résultat projectif, en remplaçant à nouveau l'ellipse par une paire de droites distinctes (on

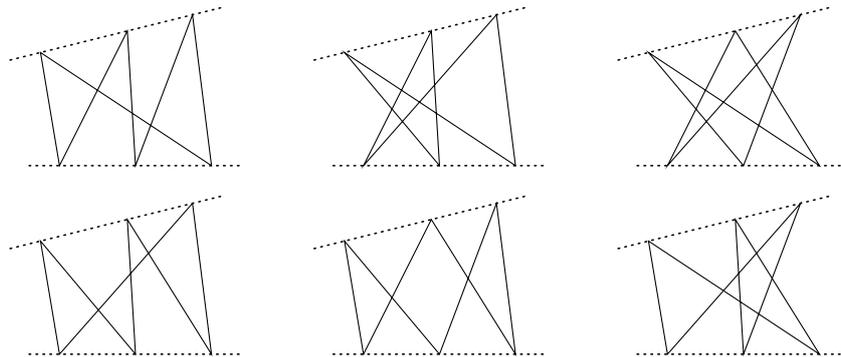
8. Et on peut faire mieux encore ! Le résultat de Pascal se déduit d'un théorème de Cayley–Bacharach à propos des courbes algébriques planes de degré 3. Et là on entre dans le domaine de la *géométrie algébrique*. Voir [D. Eisenbud, M. Green, et J. Harris, *Cayley–Bacharach Theorems and Conjectures*, Bull. AMS **33** (1996), 295–324].

“dégénère” l’ellipse) et en considérant un hexagone dont les sommets “alternent” entre ces deux droites⁹ :

Corollaire 2.4.9 (Théorème de Pappus—hexagonal). *Soit deux droites distinctes coplanaires, et trois points distincts sur chaque droite, disons a, b, c et a', b', c' , qui sont aussi distincts de l’éventuelle intersection des deux droites. Si $ab' \cap a'b = \{x\}$, $bc' \cap b'c = \{y\}$, et $ac' \cap a'c = \{z\}$, alors x, y et z sont alignés.*



La droite contenant les 3 points d’intersections ci-dessus s’appelle la *droite de Pappus*. Remarquons que cette droite est bien définie pour chacune des six façons pour dessiner un hexagone alternant entre deux droites :



Par ailleurs, l’énoncé (projectif) ci-dessus implique aussi des situations de “parallélisme” dans un plan affine. Par exemple, si x est “à l’infini” alors l’énoncé dit que $ab' \parallel a'b \parallel yz$ (et de même si soit y , soit z est “à l’infini”). Ou encore, si x et y sont “à l’infini”, alors l’énoncé dit que $ab' \parallel a'b$ et $bc' \parallel b'c$ implique qu’aussi $ac' \parallel a'c$ (et de même si soit x et z , soit y et z sont “à l’infini”). Et c’est ainsi qu’on retrouve, finalement, le Théorème de Pappus (“affine”) qui était le point de départ de cette discussion !

2.5. Exercices

Exercice 2.5.1 (Homomorphisme de groupes). Soient deux groupes G et H . Montrer que toute application $h: G \rightarrow H$ respectant l’opération binaire de G , respecte aussi l’opération nulle et l’opération unaire de G ; il s’agit donc d’un homomorphisme de groupes.

9. On peut parfaitement considérer des hexagones dont les sommets sont placés n’importe comment sur deux droites, mais on s’aperçoit vite que l’on n’obtient que des cas triviaux.

Exercice 2.5.2 (Sous-groupe normal). Montrer qu'un sous-groupe N d'un groupe G est normal si et seulement si $N = \ker(f)$ pour un homomorphisme de groupes $f: G \rightarrow H$. Indication : étant donné $N \trianglelefteq G$, on peut considérer le quotient $q: G \rightarrow G/N$. (Que se passe-t-il pour un sous-groupe "non-normal"?)

Exercice 2.5.3 (Suite exacte de groupes). On dit qu'une suite (éventuellement infini) d'homomorphismes entre groupes, disons

$$\dots \xrightarrow{f_{k-1}} G_{k-1} \xrightarrow{f_k} G_k \xrightarrow{f_{k+1}} G_{k+1} \xrightarrow{f_{k+2}} \dots$$

est *exacte* si $\ker(f_{i+1}) = \text{im}(f_i)$ (pour tout i). Notons 1 pour le groupe trivial. Montrer que les suites

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \qquad G \xrightarrow{g} H \longrightarrow 1 \qquad 1 \longrightarrow G \xrightarrow{h} H \longrightarrow 1$$

sont exactes si et seulement si f est injectif, g est surjectif, et h est bijectif; pour simplifier ces diagrammes on les note souvent

$$G \xrightarrow{f} H \qquad G \xrightarrow{g} \twoheadrightarrow H \qquad G \xrightarrow{h} \twoheadrightarrow H$$

Exercice 2.5.4 (Suite exacte courte de groupes). Montrer que la donnée d'une suite exacte courte de groupes, soit une suite exacte

$$N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \twoheadrightarrow Q,$$

est "la même chose" que la donnée d'un sous-groupe normal $i(N) \trianglelefteq G$ et le quotient $G/i(N)$. Attention, les groupes N et Q ne déterminent pas le groupe G ! Pour voir cela, montrer que les suites

$$\mathbb{Z}/(4) \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(2) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Z}/(4) \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z}/(8) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(2)$$

(où on a $\mathbb{Z}/(4) \rightarrow \mathbb{Z}/(8): x \mapsto 2x$ et sinon les homomorphismes évidents) sont exactes.

Exercice 2.5.5 (Suite exacte courte scindée et produit semidirect de groupes). Soit $N \trianglelefteq G$ un sous-groupe normal et $H \leq G$ un sous-groupe quelconque d'un groupe $G = (G, \cdot, 1)$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

- (1) $N \cap H = \{1\}$ et $G = NH = \{nh \mid n \in N, h \in H\}$,
- (2) la composée de l'inclusion $H \hookrightarrow G$ avec le quotient $G \twoheadrightarrow G/N$ est un isomorphisme,
- (3) il existe un homomorphisme $f: G \rightarrow H$ qui est l'identité sur H et dont N est le noyau,
- (4) il y a une suite exacte courte scindée $N \xrightarrow{\quad} G \xrightarrow[\quad]{\quad} H$.

Dans ce cas, on dit que G est le produit semidirect de N et H , noté $G = N \rtimes H$. Montrer que, dans ce cas, l'application

$$\Phi: N \times H \rightarrow G: (n, h) \mapsto nh$$

est un isomorphisme de groupes pour la loi de groupe

$$(n, h) \cdot (n', h') := (n(hn'h^{-1}), hh')$$

("tordue par une conjugaison") sur son domaine. (Ainsi les extrémités d'une suite exacte courte scindée déterminent le groupe au milieu!)

Solution. Pour $N \trianglelefteq G$ et $H \leq G$, notons le quotient $q: G \rightarrow G/N: g \mapsto [g]$ et l'inclusion $i: H \hookrightarrow G: h \mapsto h$. Pour la composée $q \circ i: H \rightarrow G/N$ on a

$$\ker(q \circ i) = \{h \in H \mid [h] = [1]\} = N \cap H \quad \text{et} \quad \text{im}(q \circ i) = \{[h] \mid h \in H\}.$$

Ainsi, $q \circ i$ est injectif si et seulement si $N \cap H = \{1\}$; et $q \circ i$ est surjectif si et seulement si pour tout $g \in G$ il existe un $h \in H$ tel que $[g] = [h]$, si et seulement si $G = NH$. Cela démontre $(1 \Leftrightarrow 2)$. Supposons maintenant la validité de (2), et posons $f = (q \circ i)^{-1} \circ q: G \rightarrow H$, alors

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{g \in G \mid (q \circ i)^{-1}(q(g)) = 1\} = \{g \in G \mid q(g) = (q \circ i)(1)\} \\ &= \{g \in G \mid [g] = [1]\} = G \cap N = N. \end{aligned}$$

De plus, pour $h \in H$ on a $f(h) = (q \circ i)^{-1}(q(h)) = (q \circ i)^{-1}([h]) = h$. Ainsi f est l'homomorphisme demandé en (3). Réciproquement, un homomorphisme $f: G \rightarrow H$ de noyau $\ker(f) = N$ et tel que la composée $f \circ i: H \rightarrow H$ est l'identité, détermine un isomorphisme $\bar{f}: G/N \rightarrow \text{im}(f) = H$ satisfaisant à $\bar{f} \circ q = f$ (par la propriété universelle du quotient). On peut calculer que $\bar{f} \circ q \circ i = f \circ i = \text{id}_H$ donc $q \circ i = \bar{f}^{-1}$ est aussi un isomorphisme. Ainsi on obtient (2). L'équivalence $(3 \Leftrightarrow 4)$ est immédiate : c'est une question de terminologie. \square

Exercice 2.5.6 (Images directe et réciproque). Soit une application linéaire $f: V \rightarrow W$ entre espaces vectoriels. Montrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel de V est un sous-espace vectoriel de W ; et montrer que l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de W est un sous-espace vectoriel de V .

Exercice 2.5.7 (Espace isomorphe implique groupe linéaire isomorphe). Montrer que tout isomorphisme d'espaces vectoriels $V \cong W$ (sur un même corps, donc) induit un isomorphisme de groupes $GL(V) \cong GL(W)$.

Exercice 2.5.8 (Réciproque du précédent). Soit un espace vectoriel V de dimension $n \geq 1$. Montrer que, pour toute base x_1, \dots, x_n de V , il existe un *unique* $f \in GL(V)$ tel que $f(x_i) = x_i$ (et identifier cet unique élément). Montrer que, pour tout $x_1, \dots, x_k \in V$ avec $k < n$, il existe au moins deux $f, g \in GL(V)$ tels que $f(x_i) = x_i = g(x_i)$. Conclure que $GL(V)$ "connaît" $\dim(V)$, et détermine ainsi V à isomorphisme près (si le corps K est donné). (Sur le corps \mathbb{F}_2 , l'espace nul à le même groupe linéaire que la droite; mais bien sûr ces espaces ne sont pas isomorphes.)

Exercice 2.5.9 (Non-fonctorialité de GL). Montrer que $V \mapsto GL(V)$ ne peut pas être l'application d'objets d'un foncteur de la catégorie $\text{Vec}_{\mathbb{F}_2}$ à la catégorie des groupes. Indication : on cherche à associer, de manière fonctorielle, à toute application linéaire $f: V \rightarrow W$, un homomorphisme de groupes $GL(f): GL(V) \rightarrow GL(W)$. Mais alors la rétraction $r: \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2: (x, y) \mapsto x$ (de section $s = (x, 0)$) devrait induire une rétraction $GL(\mathbb{F}_2^2) \rightarrow GL(\mathbb{F}_2)$. Mais $GL(\mathbb{F}_2^2)$ n'a pas de sous-groupe normal non-trivial. (Plus généralement, pour tout K on peut montrer qu'il n'y a pas de foncteur possible.)

Exercice 2.5.10 (Non-fonctorialité de \mathcal{Z}). Montrer que $G \mapsto \mathcal{Z}(G)$ ne peut pas être l'application d'objets d'un foncteur de la catégorie des groupes à elle-même. Indication : si c'est un

foncteur, alors la composée $\langle x \rangle \rightarrow \langle y, z \rangle \rightarrow \langle x \rangle$ entre groupes libres, déterminée par $x \mapsto y$ et $y, z \mapsto x$, est l'identité, s'envoie sur une composée $\mathcal{Z}\langle x \rangle \rightarrow \mathcal{Z}\langle y, z \rangle \rightarrow \mathcal{Z}\langle x \rangle$ qui doit aussi être l'identité. Mais $\mathcal{Z}\langle x \rangle = \langle x \rangle$ et $\mathcal{Z}\langle y, z \rangle = \{1\}$, donc cette composée est l'homomorphisme nul, qui est différent de l'homomorphisme identité.

Exercice 2.5.11 (Groupes de matrices). Rappeler la “description matricielle” d’une application linéaire $f: V \rightarrow W$, et par conséquent les isomorphismes $GL(V) \cong GL(n, K)$, $SL(V) \cong SL(n, K)$ et $H(V) \cong H(n, K)$.

Exercice 2.5.12 (Le groupe symétrique est linéaire). Montrer que $\text{Bij}(X)$ est un groupe linéaire (sur un corps quelconque) quand X est un ensemble fini. Indication : représenter une bijection de $\{1, \dots, n\}$ par une matrice inversible $n \times n$ dont les éléments sont 0 ou 1.

Exercice 2.5.13 (Projection linéaire). Soit V un espace vectoriel. Montrer qu’un endomorphisme linéaire $p: V \rightarrow V$ satisfait à $p \circ p = p$ si et seulement s’il existe une décomposition $V = E \oplus F$ telle que $p(x) = x_E$ (où $x = x_E + x_F$ est l’unique façon d’écrire $x \in V$ comme une somme d’un élément de E et un élément de F). On dit alors que p est la *projection linéaire* sur E et de direction F . Que se passe-t-il si $E = \{0\}$? si $E = V$?

Exercice 2.5.14 (Symétrie linéaire). Soit V un espace vectoriel. Montrer qu’un endomorphisme linéaire $s: V \rightarrow V$ satisfait à $s \circ s = \text{id}_V$ si et seulement s’il existe une décomposition $V = E \oplus F$ telle que $s(x) = x_E - x_F$ (où $x = x_E + x_F$ est l’unique façon d’écrire $x \in V$ comme une somme d’un élément de E et un élément de F). On dit alors que s est la *symétrie linéaire* d’axe E et de direction F . Que se passe-t-il si $E = \{0\}$? si $E = V$?

Exercice 2.5.15 (Projection et symétrie linéaires). Soit V un espace vectoriel et supposons que $\text{car}(K) \neq 2$. Montrer : si p est une projection alors $s = 2p - \text{id}$ est une symétrie ; si s est une symétrie alors $p = \frac{1}{2}(s + \text{id})$ est une projection. Ainsi on a établi des bijections entre

$$\{\text{projections}\} \longleftrightarrow \{\text{symétries}\} \longleftrightarrow \{\text{décompositions}\}.$$

Montrer que toute symétrie est un élément de $GL(V)$. Est-ce un élément de $SL(V)$? Et les projections ? (Et que se passe-t-il en caractéristique 2 ?)

Exercice 2.5.16 (Matrices de projections et symétries linéaires). Montrer que $p: V \rightarrow V$ est une projection linéaire d’un espace vectoriel si et seulement s’il existe une base de V pour laquelle la matrice de P est une matrice diagonale n’ayant que des 1 et des 0 sur sa diagonale. Montrer que $s: V \rightarrow V$ est une symétrie linéaire si et seulement s’il existe une base de V pour laquelle la matrice de s est une matrice diagonale n’ayant que des 1 et des -1 sur sa diagonale.

Exercice 2.5.17 (Généralisation du précédent : affinités linéaires). Soit V un espace vectoriel. Montrer qu’une application linéaire $f: V \rightarrow V$ est diagonalisable ayant deux valeurs propres si et seulement s’il existe une décomposition $V = E \oplus F$ et des scalaires $\lambda, \mu \in K$ tel que $f(x) = \lambda x_E + \mu x_F$ (où $x = x_E + x_F$ est l’unique façon d’écrire $x \in V$ comme une somme d’un élément de E et un élément de F). Lorsque $\lambda = 1$, on dit que f est une *affinité linéaire* sur E (ou d’axe E , ou de base E), de direction F , et de rapport μ . Montrer que les projections, les symétries

et les homothéties sont des affinités linéaires. (Dans certaines références, le mot “dilatation” est utilisé pour une affinité linéaire dont la direction est de dimension 1. Ce n’est pas notre choix dans ce cours, une dilatation étant pour nous un élément du groupe $D(V) = T(V) \rtimes H(V)$.)

Exercice 2.5.18 (Scinder le déterminant). Ayant choisie une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ d’un espace vectoriel V , on peut définir $s: K^\times \rightarrow GL(V)$ par $s(\alpha)(e_1) = \alpha e_1$ et $s(e_i) = e_i$ pour $i \neq 1$. Au niveau matriciel, cela revient à définir $s': K^\times \rightarrow GL(n, K)$ en envoyant $\alpha \in K^\times$ à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(et on remplit avec des 0). Montrer qu’on a alors un diagramme commutatif des suite exactes courtes scindées de groupes,

$$\begin{array}{ccccc} SL(V) & \longrightarrow & GL(V) & \xleftarrow[\det]{s} & K^\times \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ SL(n, K) & \longrightarrow & GL(n, K) & \xleftarrow[\det]{s'} & K^\times \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes. Conclure que $GL(V) = SL(V) \rtimes s(K^\times)$ (pour toute section s) ; et de même au niveau matriciel.

Exercice 2.5.19 (Scindage d’une suite exacte courte). Soit V un espace vectoriel de dimension n et $H(V)$ son groupe d’homothéties. Par composition de l’homomorphisme surjectif $\det: GL(V) \rightarrow K^\times$ avec l’isomorphisme $\text{hom}: K^\times \rightarrow H(V) \rightarrow K^\times: \lambda \mapsto \lambda \text{id}$, on produit la suite exacte courte

$$SL(V) \longrightarrow GL(V) \xrightarrow{\text{hom} \circ \det} H(V).$$

Montrer que cette suite est scindée par l’inclusion de $H(V)$ dans $GL(V)$ si et seulement si l’application $K^\times \rightarrow K^\times: \alpha \mapsto \alpha^n$ est un homomorphisme de groupes. En déduire que, dans ce cas, $GL(V) = SL(V) \rtimes H(V)$. Est-ce le cas pour $K = \mathbb{R}$? $K = \mathbb{C}$? $K = \mathbb{F}_p$? (Répondre éventuellement par une condition sur la dimension de V .)

Exercice 2.5.20 (Centre du groupe linéaire spécial). Soit un espace vectoriel V de dimension n . Montrer que $\mathcal{Z}(SL(V)) = SL(V) \cap H(V)$ (observer que dans la démonstration pour déterminer $\mathcal{Z}(GL(V))$ on a utilisé des éléments de $SL(V)$). En déduire que $\mathcal{Z}(SL(V))$ est isomorphe au sous-groupe de K^\times des racines n -ièmes de l’unité.

Exercice 2.5.21 (Image d’un sous-espace affine engendré). Soit une application affine $g: V \rightarrow W$ entre espaces vectoriels. Montrer que, pour tout $\{a_0, \dots, a_k\}$, l’image par g de l’espace affine engendré $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ est l’espace affine engendré $\langle ga_0, \dots, ga_k \rangle$. En déduire une démonstration alternative pour la Proposition 2.2.10.

Exercice 2.5.22 (Linéaire parmi affine). Montrer que $g \in GA(V)$ est dans le sous-groupe $GL(V) \subseteq GA(V)$ si et seulement si $g0 = 0$.

Exercice 2.5.23 (Expression matricielle d'une application affine). Soient deux espaces vectoriels V et W , munis de bases vectorielles $\{e_1, \dots, e_n\}$, resp. $\{d_1, \dots, d_m\}$. Donner l'expression matricielle d'une application affine $g = tf: V \rightarrow W$ par rapport à ces bases. (Faire séparément la partie linéaire $f: V \rightarrow W$ et la translation $t = t_b: W \rightarrow W$, puis composer.)

Exercice 2.5.24 (Déterminer une application affine). Pour les applications suivantes, déterminer si ce sont des applications affines. Si c'est le cas, les écrire sous la forme $g = t \circ f$ avec t une translation et f une application linéaire. Identifier les automorphismes affines.

$$1. g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y + 1 \\ -2x - y + 2 \end{pmatrix}$$

$$2. g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x - 2y - 3 \\ -6x + 3y - 6 \end{pmatrix}$$

$$3. g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x - y + 2 \\ x - y - 1 \end{pmatrix}$$

$$4. g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y + 5 \\ 3x - 2 \end{pmatrix}$$

$$5. g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y + 5 \\ 3x - 2 \\ 3x + 1 \end{pmatrix}$$

$$6. g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x + y + z + 1 \\ x + y - 2z - 1 \end{pmatrix}$$

$$7. g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x + y + z + 1 \\ x - 2y + z + 1 \\ x + y - 2z - 1 \end{pmatrix}$$

$$8. g: V \rightarrow V: x \mapsto a, \text{ pour un point } a \in V \text{ fixé.}$$

$$9. g: V \rightarrow V: x \mapsto (\text{milieu de } ax), \text{ pour un point } a \in V \text{ fixé.}$$

$$10. g: V \rightarrow V: x \mapsto (\text{barycentre de } (a, \frac{1}{4}), (b, \frac{1}{2}), (x, \frac{1}{4})), \text{ pour deux points } a, b \in V \text{ fixés.}$$

Exercice 2.5.25 (Trouver une application affine). Les informations ci-dessous permettent-elles de déterminer une (unique) application affine $g = t \circ f$? Si oui, donner sa description matricielle.

$$1. g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(0, 1) = (0, 1) \text{ et } g \text{ n'a pas d'autre point fixe.}$$

$$2. g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(0, 1, 0) = (0, 2, 0) \text{ et } g \text{ n'a aucun point fixe.}$$

$$3. g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ les seuls points fixes de } g \text{ sont } (0, 0) \text{ et } (1, 1).$$

$$4. g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(0, 0) = (1, 3), g(1, 3) = (3, 1), g(3, 1) = (0, 0).$$

$$5. g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(0, 0, 0) = (1, 2, 3), g(0, 1, 2) = (1, 4, 6), g(1, 0, 2) = (1, 3, 5).$$

Exercice 2.5.26 (Le groupe affine—description matricielle). Soit un espace vectoriel V (sur un corps K) muni d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Utiliser les isomorphismes de groupes $GA(V) \cong$

$T(V) \rtimes GL(V) \cong V \rtimes GL(V)$ pour montrer l'isomorphisme de $GA(V)$ avec le groupe donné par l'ensemble

$$\{(A, b) \mid A \in GL(n, K), b \in K^{n \times 1}\}$$

muni de l'opération binaire $(A', b') * (A, b) = (A'A, A'b + b')$. On note ce groupe $GA(n, K)$.

Exercice 2.5.27 (Le groupe affine est linéaire). Montrer que l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & b \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

avec $A \in GL(n, K)$, $b \in K^{n \times 1}$, et $O = (0 \dots 0) \in K^{1 \times n}$, est un sous-groupe de $GL(n+1, K)$, isomorphe au groupe $GA(n, K)$ de l'exercice précédent. Ainsi on a des sous-groupes $GL(n, K) \leq GA(n, K) \leq GL(n+1, K)$.

Exercice 2.5.28 (Le groupe affine est linéaire—bis). Dans K^{n+1} , fixons l'hyperplan affine $H = \{(x_1, \dots, x_n, 1) \in K^{n+1}\}$. Soit l'isomorphisme $GL(K^{n+1}) \cong GL(n+1, K)$ déterminé par la base canonique de K^{n+1} . A quel sous-groupe de matrices s'identifie alors le sous-groupe laissant (globalement) invariant l'hyperplan H ? Indication : écrire $f \in GL(K^{n+1})$ comme

$$f \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + bx_{n+1} \\ cx + dx_{n+1} \end{pmatrix}$$

où $A \in K^{n \times n}$, $x \in K^{n \times 1}$, $b \in K^{n \times 1}$, $c \in K^{1 \times n}$ et $d \in K$. Exprimer que tout $(x_1, \dots, x_n, 1)$ est envoyé sur un $(y_1, \dots, y_n, 1)$, et en déduire que $c = O$ et $d = 1$.

Exercice 2.5.29 ($GA(n, K)$ est un sous-groupe de $PGL(n+1, K)$). On reprend le résultat d'un exercice précédent : on considère le groupe affine (“version matricielle”) $GA(n, K)$ comme sous-groupe de $GL(n+1, K)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & b \\ O & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'intersection avec le centre $H(n+1, K) = \mathcal{Z}(GL(n+1, K))$, et conclure que $GA(n, K)$ est aussi un sous-groupe du quotient $GL(n+1, K)/H(n+1, K)$. Ce dernier est la “version matricielle” du *groupe projectif linéaire général (en dimension $n+1$)*, noté $PGL(n+1, K)$.

Exercice 2.5.30 (Sous-groupes du groupe affine). Soit un espace vectoriel V et $G \leq GL(V)$ un sous-groupe donné (autrement dit, G est un groupe linéaire). Montrer que $T(V) \rtimes G := \{g = t \circ f \mid t \in T(V), f \in G\}$ est un sous-groupe de $GA(V) = T(V) \rtimes GL(V)$. Observer que l'on a une “sous-suite” exacte courte scindée (par l'inclusion évidente)

$$\begin{array}{ccccc} T(V) & \hookrightarrow & T(V) \rtimes G & \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \twoheadrightarrow \end{array} & G \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ T(V) & \hookrightarrow & GA(V) & \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \twoheadrightarrow \end{array} & GL(V) \end{array}$$

Observer que $T(V) \rtimes G$ est un groupe linéaire (attention aux dimensions!). Repérer les exemples de cette construction générale dans le cours (voir aussi les exercices ci-dessous).

Exercice 2.5.31 (Groupe affine spécial). Soit un espace vectoriel V de dimension n sur un corps K . Pour le groupe linéaire spécial $SL(V) \leq GL(V)$, décrire explicitement les éléments du *groupe affine spécial* de V , défini par $SA(V) := T(V) \rtimes SL(V)$. En donner une description par des matrices $n \times n$, ainsi qu'une description par des matrices $(n+1) \times (n+1)$.

Exercice 2.5.32 (Groupe des dilatations). Soit un espace vectoriel V de dimension n sur un corps K . Pour le groupe des homothéties $H(V) \leq GL(V)$, décrire explicitement les éléments du *groupe des dilatations* de V , défini par $D(V) := T(V) \rtimes H(V)$. En donner une description par des matrices $n \times n$, ainsi qu'une description par des matrices $(n+1) \times (n+1)$.

Exercice 2.5.33 (Groupe des symétries centrales affines). Soit un espace vectoriel V de dimension n sur un corps K de caractéristique $\neq 2$. Déterminer le sous-groupe $G \leq GL(V)$ engendré par la symétrie centrale linéaire $\sigma: V \rightarrow V: x \mapsto -x$. Montrer que c'est un sous-groupe du groupe $H(V)$ des homothéties linéaires. Est-ce un sous-groupe de $SL(V)$? Décrire ensuite explicitement les éléments du *groupe des symétries centrales affines* de V , défini par $T(V) \rtimes G$. En donner une description par des matrices $n \times n$, ainsi qu'une description par des matrices $(n+1) \times (n+1)$. Montrer que c'est un sous-groupe de $D(V)$. Est-ce un sous-groupe de $SA(V)$?

Exercice 2.5.34 (Points fixes (1)). Montrer que $a \in V$ est un point fixe d'un endomorphisme affine $g: V \rightarrow V$ si et seulement s'il existe un endomorphisme linéaire $f: V \rightarrow V$ tel que $g = t_a f t_{-a}$. Montrer que l'ensemble des automorphismes affines de V ayant $a \in V$ comme point fixe est un sous-groupe de $GA(V)$.

Exercice 2.5.35 (Points fixes (2)). Soit un endomorphisme affine $g: V \rightarrow V$. Montrer que l'ensemble des points fixes de $g = t \circ f$ est un sous-espace affine, dont la direction est l'ensemble des points fixes de f .

Exercice 2.5.36 (Conjugués et commutants d'une translation). Etant donné une translation $t \in T(V) \subseteq GA(V)$, décrire ses conjugués (gtg^{-1}) et ses commutants $(gt = tg)$ dans $GA(V)$.

Exercice 2.5.37 (Commutation de dilatations). Montrer que deux dilatations $g, g' \in D(V)$ commutent si et seulement si, soit l'une est l'identité, soit ce sont deux translations, soit ce sont deux homothéties affines de même centre.

Exercice 2.5.38 (Homothéties linéaires et affines). Montrer que $f \in GL(V)$ est une homothétie (linéaire) si et seulement si f envoie toute droite vectorielle sur elle-même. Montrer que $g \in GA(V)$ est une homothétie (affine) de centre c si et seulement si g fixe le point c et g envoie toute droite affine passant par c sur elle-même. (Si $\dim(V) \geq 2$ alors la condition que g fixe le point c suit de la condition que g envoie toute droite affine passant par c sur elle-même : il suffit de considérer deux droites distinctes passant par c .)

Exercice 2.5.39 (Homothéties affines de même centre). Montrer que l'ensemble des homothéties affines ayant un même centre est un sous-groupe commutatif de $D(V)$.

Exercice 2.5.40 (Groupe affine d'une droite). Montrer que, si V est un espace vectoriel de dimension 1, alors $GA(V) = D(V)$: les seuls automorphismes affines d'une droite sont les translations et les homothéties affines.

Exercice 2.5.41 (Déterminer une homothétie). Soient deux points $a \neq b$ dans un espace vectoriel V sur un corps K . Montrer que, pour tout $\kappa \in K \setminus \{0, 1\}$, il existe une et une seule homothétie affine de rapport κ envoyant a sur b , et déterminer son centre. (Quel est le problème pour $\kappa \in \{0, 1\}$?) Spécifier la situation lorsque $\kappa = -1$.

Exercice 2.5.42 (Centre du groupe affine). Montrer que, si $h: G \rightarrow H$ est un homomorphisme surjectif de groupes, alors $h(\mathcal{Z}(G)) = \mathcal{Z}(H)$. En déduire que, si $g \in \mathcal{Z}(GA(V))$ alors $g \in D(V)$; on peut donc écrire $gx = \lambda x + a$ pour $a \in V$ et $\lambda \in K^\times$. On suppose désormais que $K \neq \mathbb{F}_2$. Montrer qu'un tel g commute avec toutes les translations et toutes les homothéties si et seulement si $g = \text{id}$. Conclure que $\mathcal{Z}(GA(V)) = \{\text{id}\}$. (Que se passe-t-il pour $K = \mathbb{F}_2$?)

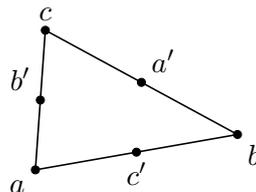
Solution. Soit $gx = \lambda x + a$ pour $a \in V$ et $\lambda \in K^\times$. Pour tout $b \in V$, on doit avoir $gt_b = t_b g$, donc en particulier $gt_b 0 = t_b g 0 = a + b$, mais aussi $gt_b 0 = gb = \lambda b + a$; il suit donc que $\lambda = 1$. Ensuite, supposant que $g = t_a \in T(V)$ commute avec une homothétie $h = \mu \text{id}$ (avec $\mu \neq 1$), on a en particulier $a = gh 0 = hg 0 = \mu a$, et donc $a = 0$. Ainsi $g = t_0 = \text{id}$. \square

Exercice 2.5.43 (Applications affines et rapports). Montrer qu'une application $g: V \rightarrow W$ entre espaces vectoriels sur un corps K est affine si et seulement si elle préserve l'alignement et le rapport de tout triplet de points.

Exercice 2.5.44 (Théorème fondamental de la géométrie affine réelle). On peut montrer que, si V est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps $K = \mathbb{R}$, alors une bijection $g: V \rightarrow V$ est un automorphisme affine si et seulement si g envoie tout triplet de points alignés sur un triplet de points alignés. Une démonstration (un peu longue mais élémentaire) se trouve dans les références.

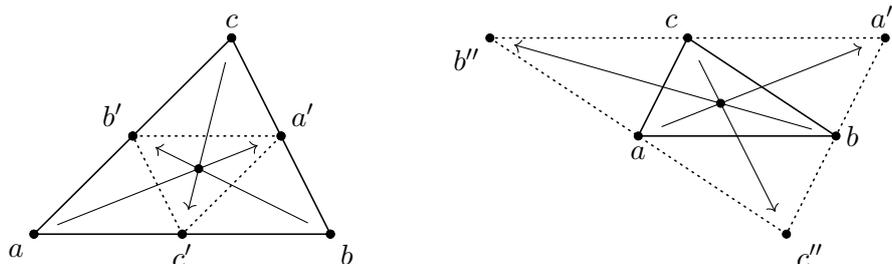
Exercice 2.5.45 (Image d'un parallélogramme). Montrer que l'image par une application affine injective d'un parallélogramme est toujours un parallélogramme. Et si l'application n'est pas injective? L'image d'un quadrilatère non-parallélogramme peut-elle être un parallélogramme?

Exercice 2.5.46 (Une composée de symétries centrales affines). Soit un triangle non-applati abc dans un espace affine sur un corps K tel que $\text{car}(K) \neq 2$, et notons les milieux a' de bc , b' de ac et c' de ab .

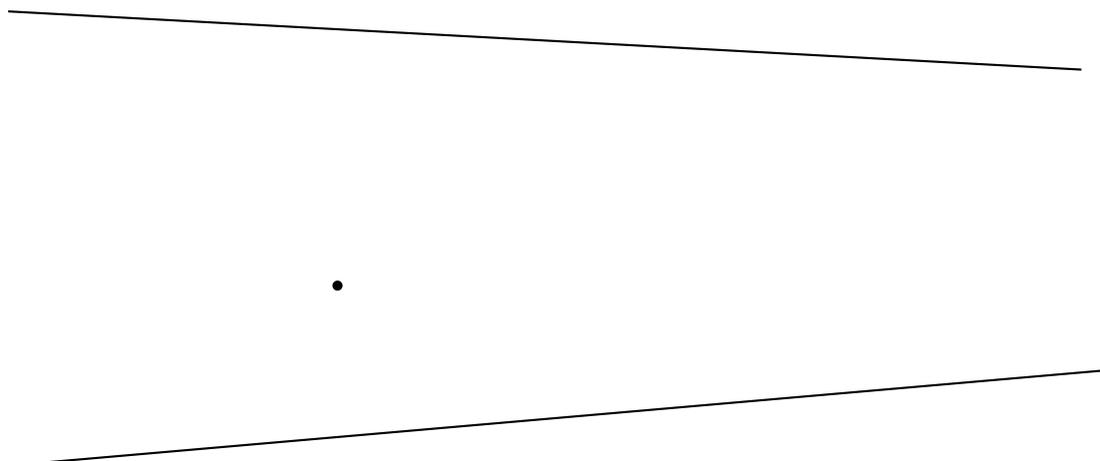


Notons par s_p la symétrie centrale affine de centre p , c'est à dire l'homothétie de centre p et rapport -1 . Déterminer alors $s_{b'} \circ s_{a'}$ et $s_{c'} \circ s_{b'} \circ s_{a'}$.

Exercice 2.5.47 (Retourner un triangle). Soit un triangle abc dans un plan affine sur un corps tel que $\text{car}(K) \notin \{2, 3\}$, et notons g son isobarycentre ; par un exercice précédent, g est donc aussi l’isobarycentre du triangle $a'b'c'$ dont les sommets sont les milieux des segments bc , ca et ab . Montrer que l’automorphisme affine déterminé par $abc \mapsto a'b'c'$ est l’homothétie de centre g et rapport $-\frac{1}{2}$. Montrer que, réciproquement, les sommets d’un triangle abc sont toujours les milieux des côtés d’un unique autre triangle $a''b''c''$. En déduire que les côtés des deux triangles ainsi emboîtés sont 2-à-2 parallèles.



Exercice 2.5.48 (Axiome de Desargues—application). Tracer ci-dessous la droite passant par le point donné et concourante avec les deux droites données (et bien sûr le point d’intersection de ces trois droites se trouve “en dehors” de la page) :

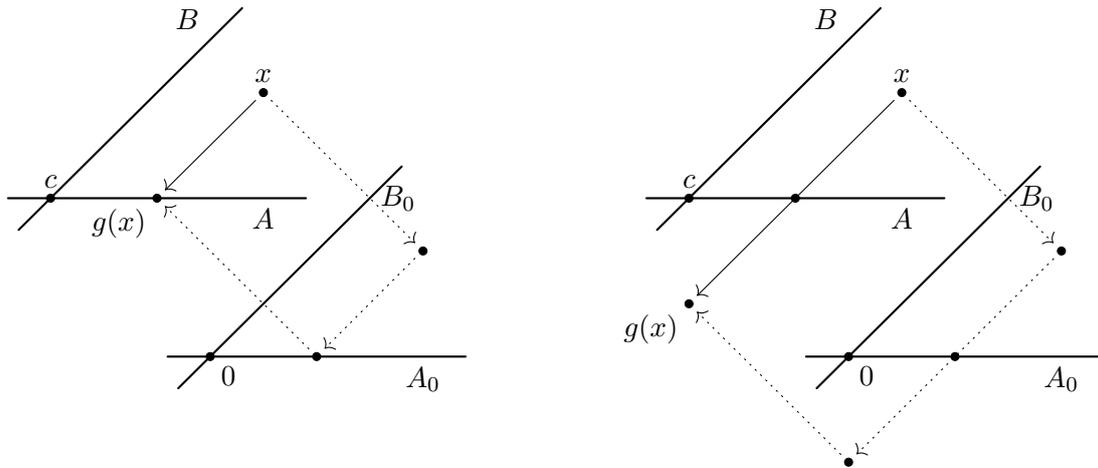


Exercice 2.5.49 (Projection et symétrie affines). Soit un espace vectoriel V , et $A, B \in V$ deux sous-espaces affines supplémentaires ; ainsi on a (par définition) que $V = A_0 \oplus B_0$, et l’intersection de A et B est (nécessairement) un singleton, soit $\{c\} = A \cap B$. On définit l’application affine

$$g = t_c \circ f \circ t_{-c}$$

où $f: V \rightarrow V$ est la projection, resp. la symétrie, linéaire d’axe A_0 et de direction B_0 (voir un exercice précédent). On dit alors que g est la *projection (resp. symétrie) affine* d’axe A et de direction B . Voici une illustration d’une projection affine et d’une symétrie affine dans un plan

affine :

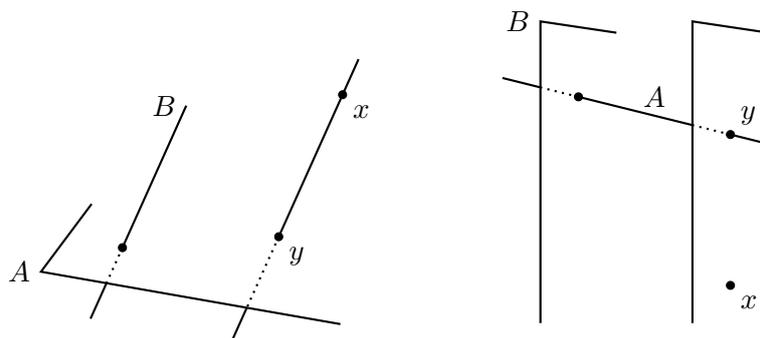


Montrer qu'une application affine $g: V \rightarrow V$ est une projection affine si et seulement si $g \circ g = g$, si et seulement si g admet au moins un point fixe et sa partie linéaire est une projection linéaire, si et seulement si $g = t_a \circ f$ avec $f \circ f = f$ et $fa = 0$ (et indiquer alors l'axe et la direction de g). Montrer qu'une application affine $g: V \rightarrow V$ est une symétrie affine si et seulement si $g \circ g = \text{id}$, si et seulement si g admet au moins un point fixe et sa partie linéaire est une symétrie linéaire, si et seulement si $g = ta \circ f$ avec $f \circ f = \text{id}$ et $fa = -a$ (et indiquer alors l'axe et la direction de g).

Solution. On donne l'argument pour les projections ; l'argument pour les symétries est similaire. Si on pose $g = t_c \circ f \circ t_{-c}$ avec f une projection linéaire, alors g est une application affine fixant le point c et telle que $g \circ g = (t_c \circ f \circ t_{-c}) \circ (t_c \circ f \circ t_{-c}) = t_c \circ f \circ f \circ t_{-c} = t_c \circ f \circ t_{-c} = g$ car $f \circ f = f$ (voir un exercice précédent). Réciproquement, pour une application affine $g = t_a \circ f$ on a $g \circ g = g$ si et seulement si $(t_a \circ f) \circ (t_a \circ f) = t_a \circ f$, si et seulement si $t_{a+fa} \circ (f \circ f) = t_a \circ f$, si et seulement si $a + fa = a$ et $f \circ f = f$, si et seulement si f est une projection linéaire (voir un exercice précédent) et $fa = 0$. On peut alors écrire $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$, montrant que g fixe le point a . L'axe et la direction de g sont alors $A = \text{im}(f) + a$ et $B = \text{ker}(f)$ (ou toute autre droite affine parallèle à B). \square

Exercice 2.5.50 (Projection affine—bis). Soit un espace vectoriel V , et $A, B \in V$ deux sous-espaces affines supplémentaires. Montrer que la projection affine sur A de direction B est exactement l'application $p: V \rightarrow V$ qui envoie $x \in V$ sur l'unique point d'intersection de A avec l'unique sous-espace affine parallèle à B et passant par x . (Noter que seule la direction du

sous-espace affine B est importante!)



Voici-dessus deux illustrations dans un espace (réel) à trois dimensions : on projète sur un plan parallèlement à une droite, ou on projète sur une droite parallèlement à un plan.

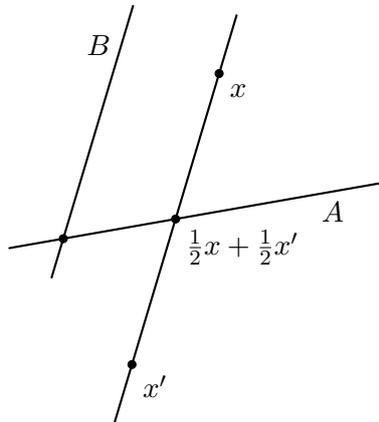
Solution. Supposons d'abord que A et B sont des sous-espaces *vectoriels* supplémentaires de V . Pour un point $x \in V$ on a donc une unique décomposition $x = x_A + x_B$ et la projection linéaire d'axe A et direction B est $p(x) = x_A$. Mais $x_A = x - x_B$ est à la fois un élément du sous-espace vectoriel A et du sous-espace affine $B + x$ (car $-x_B \in B$). Ainsi, x_A est également l'unique point d'intersection de A et $B + x$. Supposons maintenant que A et B sont des sous-espaces *affines* supplémentaires de V ; notons c leur unique point d'intersection, ainsi on a $B = B_0 + c$ et $A = A_0 + c$. Pour un point x on calcule maintenant l'intersection du sous-espace A avec le sous-espace parallèle à B et passant par x , en utilisant que la translation par c est bijective et preserve donc les intersections :

$$A \cap (B_0 + x) = (A_0 + c) \cap (B_0 + (x - c) + c) = (A_0 \cap (B_0 + (x - c))) + c.$$

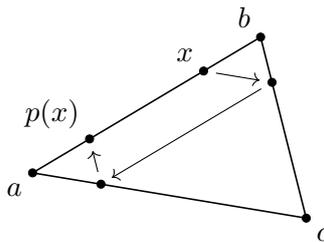
Ainsi on voit que cette intersection contient un unique point, à savoir $t_c(p_0(t_{-c}(x)))$ où p_0 est la projection linéaire d'axe A_0 et de direction B_0 . Autrement dit, $p = t_c \circ p_0 \circ t_{-c}$ est bel et bien la projection affine d'axe A et direction B . \square

Exercice 2.5.51 (Symétrie affine—bis). Soit un espace vectoriel V sur un corps K de caractéristique différent de 2, et $A, B \in V$ deux sous-espaces affines supplémentaires. Montrer que la symétrie affine d'axe A et de direction B est exactement l'application $s: V \rightarrow V$ qui envoie $x \in V$ sur l'unique point $x' \in V$ tel que la projection affine (sur A et de direction B) de x est le milieu de x et x' . Autrement dit, si $x \in A$ alors $x' = x$ et si $x \notin A$ alors l'unique point d'intersection de xx' avec A est le milieu de x et x' . (Ici aussi, seule la direction du sous-espace

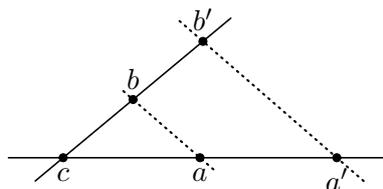
affine B est importante!) Voici une illustration dans le plan affine réel :



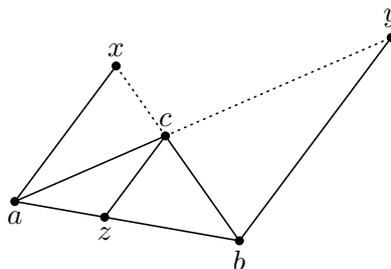
Exercice 2.5.52 (Projections dans un triangle). Soit un triangle non-aplati abc dans un plan affine, et notons p_1 la projection sur bc parallèlement à ca , p_2 la projection sur ca parallèlement à ab , et p_3 la projection sur ab parallèlement à bc . Pour $p = p_3 \circ p_2 \circ p_1$, calculer $p(a)$ et $p(b)$. Que peut-on alors dire de $p(x)$ et $(p \circ p)(x)$ pour $x \in ab$?



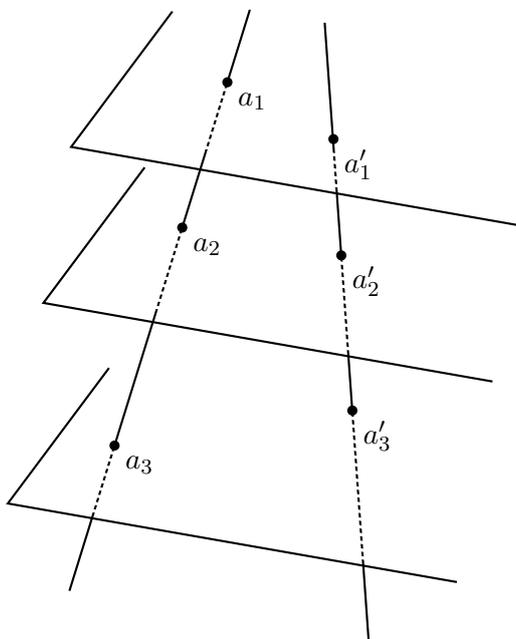
Exercice 2.5.53 (Thales—avec rapports). Reformuler et démontrer le Théorème de Thales dans le plan affine à l'aide de rapports et de la projection affine sur ca de direction ab .



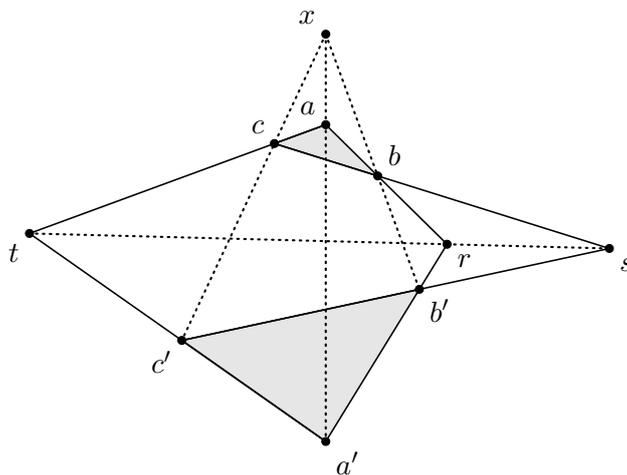
Exercice 2.5.54 (Ceva “parallèle”—avec rapports). Démontrer la partie “parallèle” du Théorème de Ceva dans le plan affine à l'aide de la projection affine sur ab de direction ax .



Exercice 2.5.55 (Théorème de Thalès—généralisation). Soient trois hyperplans parallèles H_1, H_2 et H_3 d'un espace vectoriel V , et deux droites D et D' intersectant ces hyperplans aux points a_1, a_2, a_3 , resp. a'_1, a'_2, a'_3 . Utiliser la projection affine sur D de direction H_1 pour formuler et démontrer une généralisation du Théorème de Thalès. (On retrouve le théorème usuel lorsqu'on suppose que $a_1 = a'_1$.)



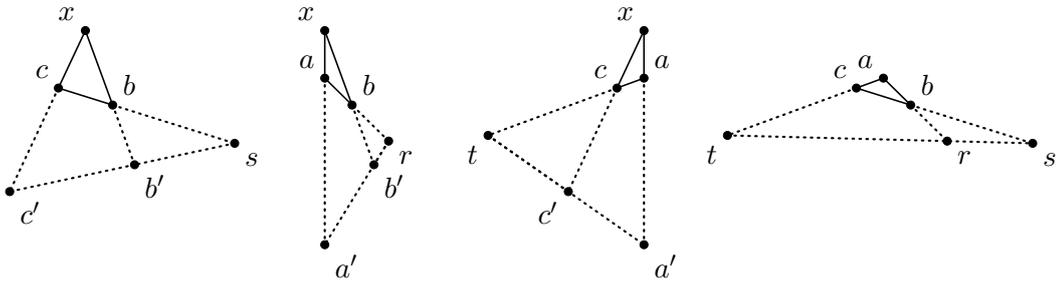
Exercice 2.5.56 (Démonstration du Théorème de Desargues). Pour démontrer le Théorème de Desargues dans un plan affine, dessinons la configuration de Desargues comme suit :



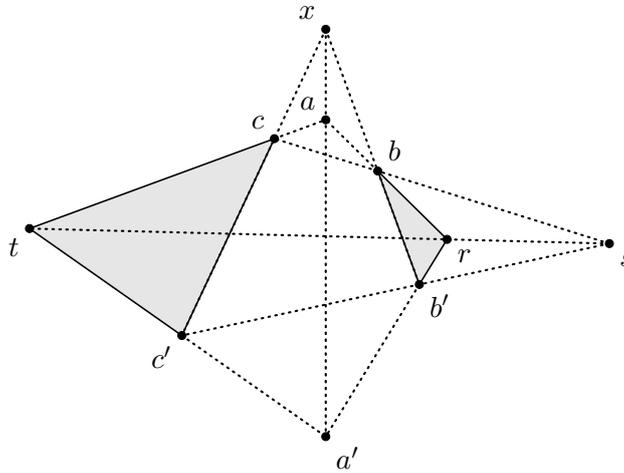
On veut montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ sont en perspective centrale ($aa' \cap bb' \cap cc' = \{x\}$) si et seulement s'ils sont en perspective axiale ($r \in st$). On le fera sous l'hypothèse supplémentaire que “rien n'est parallèle”, comme suit.

On suppose d'abord que les triangles abc et $a'b'c'$ sont en perspective centrale, et que les côtés respectifs s'intersectent en r, s et t (donc pas de parallélisme). Appliquer le Théorème de Menelaos (avec les rapports) aux trois premiers triangles ci-dessous pour conclure que $r \in st$

par le quatrième triangle :

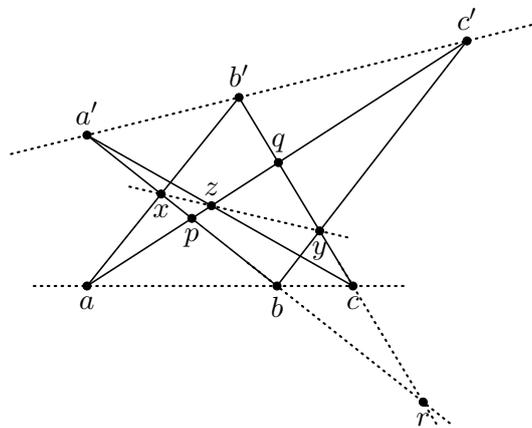


Réciproquement, supposons que abc et $a'b'c'$ sont en perspective axiale et que $bb' \cap cc' = \{x\}$ (donc pas de parallélisme). Considérer les triangles tcc' et rbb' , qui sont alors en perspective centrale (de s), et conclure par la première partie.

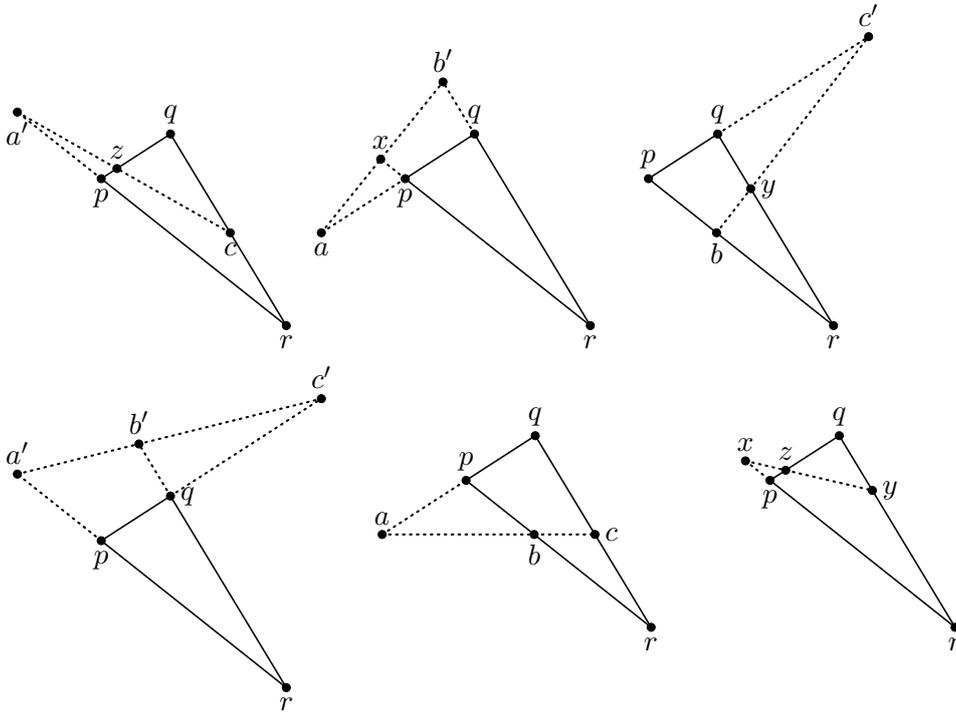


(Lorsqu'il y a parallélisme, on peut trouver une démonstration adaptée pour chaque situation.)

Exercice 2.5.57 (Démonstration du Théorème de Pappus—hexagonal). On va démontrer le Théorème de Pappus sous l'hypothèse supplémentaire "qu'il n'y a pas de parallélisme" entre les côtés de l'hexagone. C'est à dire, on considère un hexagone (avec les notations du Théorème 2.4.9) tel que, en plus, $\{p\} = a'b \cap b'c$, $\{q\} = ac' \cap b'c$ et $\{r\} = a'b \cap b'c$ existent :

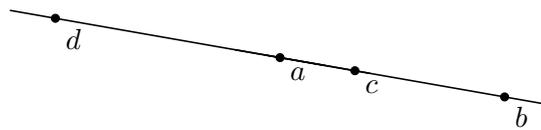


Appliquer le Théorème de Menelaos (avec rapports) cinq fois au triangle pqr , comme suggéré par les cinq premiers dessins



puis conclure que $x \in yz$ par le sixième triangle. (On peut donner des démonstrations adaptées lorsqu'il y a parallélisme de côtés.)

Exercice 2.5.58 (Division harmonique). Dans un espace affine, soit une droite ab et deux points $c, d \in ab$ qui ne sont pas le milieu de ab . Montrer que $\frac{a-c}{b-c} = -\frac{a-d}{b-d}$ si et seulement si, lorsque c est le barycentre de (a, α) et (b, β) , alors d est le barycentre de $(a, -\alpha)$ et (b, β) . (Pourquoi doit-on supposer que c et d ne sont pas le milieu de ab ?)



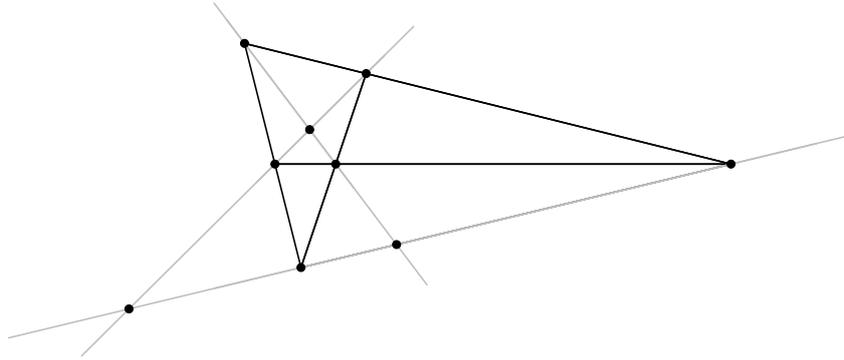
On dit alors que a, b, c, d sont en *division harmonique*, ou encore que c et d *divisent harmoniquement* le segment ab , ou encore que d est le *point conjugué harmonique* de c par rapport à ab . Ecrire cette définition en termes de homothéties (de centres c et d). Montrer que l'image d'une division harmonique par une application affine est toujours une division harmonique.

Exercice 2.5.59 (Birapport). Pour quatre points a, b, c, d d'un espace affine sur un corps K , on définit leur *birapport* (anglais : *cross-ratio*) comme le "rapport des rapports" :

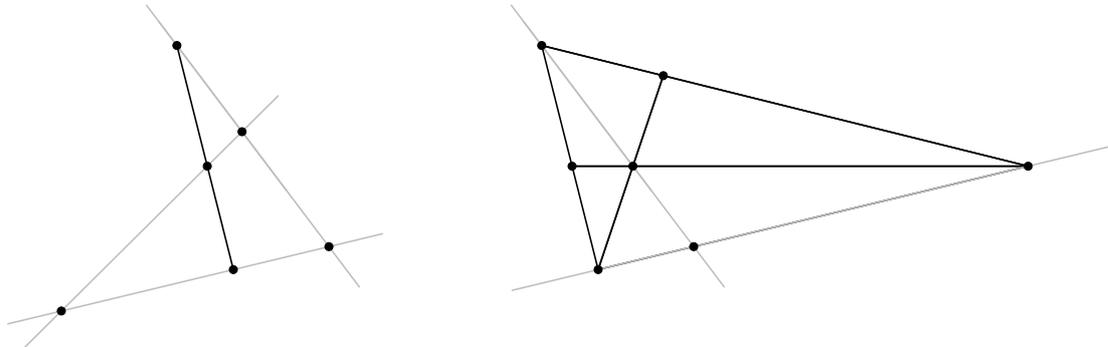
$$[a, b; c, d] := \frac{\frac{a-c}{b-c}}{\frac{a-d}{b-d}} \in K.$$

Ainsi, on a une division harmonique lorsque $[a, b; c, d] = -1$. Quand a-t-on que $[a, b; c, d] = 1$? Montrer que toute application affine préserve les birapports. Calculer le birapport quand on connaît les coordonnées barycentriques de c et d par rapport à $\{a, b\}$. Comment change le birapport sous les diverses permutations de a, b, c et d ?

Exercice 2.5.60 (Quadrilatère complet et division harmonique). Soit un quadrilatère complet dans un espace affine (que l'on considère comme la donnée de quatre droites et six sommets). Montrer que chaque diagonale coupe les deux autres diagonales et déduire des théorèmes de Menelaos et Ceva que les deux points d'intersection divisent harmoniquement le segment défini par les deux sommets de passage.

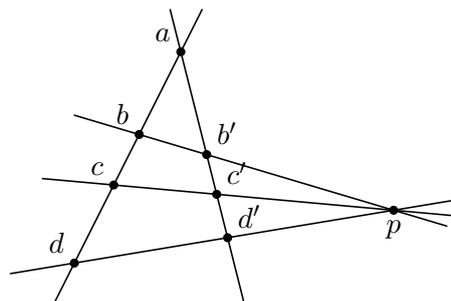


Indication : appliquer les théorèmes de Menelaos et Ceva dans les situations suivantes :



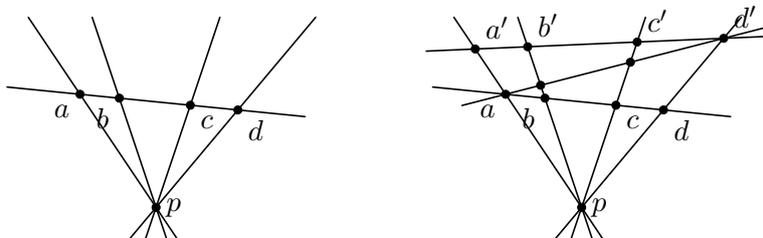
Par ailleurs, étant donné trois points sur un segment, on peut construire le quatrième point d'une division harmonique en construisant un quadrilatère complet adéquat.

Exercice 2.5.61 (Birapport—un lemme). Supposons que, dans un espace affine, deux droites concourantes coupent trois droites concourantes :



Appliquer deux fois le Théorème de Menelaos (et permuter au besoin les points dans les birapports) pour vérifier que $[a, b; c, d] = [a, b'; c', d']$.

Exercice 2.5.62 (Birapport de droites concourrantes). Montrer que, lorsque une droite affine coupe quatre droites affines concourrantes, alors le birapport des quatre points d'intersections ne dépend pas de la droite sécante choisie :



(Appliquer deux fois le résultat de l'exercice précédent, comme suggéré par le deuxième dessin.) Les birapports sont utilisés en géométrie projective, car (comme le suggère ce résultat) ils sont préservés par les *projections centrales* (qui ne préservent pas les rapports!). Ces résultats sont centraux dans les formidables livres de Pappos d'Alexandrie (290–350), voir aussi [Pappus of Alexandria, *Book 7 of the Collection*. Ed., with transl. and comment. by Alexander Jones, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences **8**, Springer-Verlag (1986)].

Exercice 2.5.63 (Convexité et demi-espaces). Soit V un espace affine réel. Pour deux points $a, b \in V$, on définit le *segment* $[ab] = \{\alpha a + \beta b \mid 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$, et on dit qu'un sous-ensemble $X \subseteq V$ est *convexe* si, pour tout $a, b \in X$, aussi $[ab] \subseteq X$. Soit maintenant un hyperplan affine $H \in V$; on peut supposer que, par rapport à une base e_1, \dots, e_n de V , l'hyperplan est d'équation cartésienne $x_n = t$. Toujours par rapport à cette base, définissons maintenant

$$H^+ = \{x \in V \mid x_n > t\} \quad \text{et} \quad H^- = \{x \in V \mid x_n < t\}.$$

Montrer que $V = H^+ \uplus H \uplus H^-$ est une partition (ensembliste) en parties convexes telle que, pour tout $a \in H^+$ et $b \in H^-$, le segment $[ab]$ contient exactement un point dans H . Ainsi on peut conclure que tout hyperplan affine H détermine des uniques *demi-espaces* H^+ et H^- .

Exercice 2.5.64 (Théorème de Pasch). Soit un triangle abc dans un plan affine réel V . Le *périmètre* de abc est, par définition, $[ab] \cup [bc] \cup [ca]$. Montrer que toute droite affine $D \subseteq V$ intersectant le périmètre de abc mais ne contenant aucun sommet de abc , intersecte le périmètre en exactement deux points. Indication : les hypothèses assurent que exactement deux sommets du triangle se trouvent dans un même demi-espace déterminé par D .

3. Isométries

3.1. Le groupe euclidien

L'espace vectoriel réel \mathbb{R}^2 est muni du produit scalaire "usuel",

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

qui permet d'exprimer la notion de *distance euclidienne* entre deux points :

$$\text{dist}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\| \quad \text{où} \quad \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)}.$$

C'est dans ce *plan euclidien* que nous avons démontré, dans le cours de géométrie en L2, plusieurs résultats classiques de la *géométrie euclidienne plane*. Pour situer ces notions dans le cadre plus général de la géométrie affine, définissons :

Définition 3.1.1. *Un espace euclidien est un espace vectoriel réel V , de dimension finie, muni d'un produit scalaire (= forme bilinéaire, symétrique, définie, positive).*

Dans un espace euclidien V , lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on écrira $x \cdot y$ pour le produit scalaire de $x, y \in V$. (Dans les références on peut rencontrer d'autres notations : $b(x, y)$, $\langle x|y \rangle$, ...)

Définition 3.1.2. *Dans un espace euclidien V on définit :*

- la norme de x : $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$,
- la distance de x à y : $\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$,
- l'angle (non-orienté¹) entre deux vecteurs non-nuls x et y : $\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}\right)$,
- l'orthogonalité de deux vecteurs x et y : $x \perp y$ si et seulement si $x \cdot y = 0$.

Rappelons que tout espace euclidien V admet (au moins) une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$, c'est à dire, une base dont chaque vecteur est de norme 1 et tout vecteur est orthogonal à tout autre vecteur. (On peut appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une base quelconque de V pour trouver une base orthonormale.) Rappelons aussi que deux sous-espaces vectoriels $E, F \subseteq V$ sont dits *orthogonaux* si $x \perp y$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$. Par ailleurs, tout sous-espace vectoriel $E \subseteq V$ a un unique orthocomplément E^\perp , et on a $E \oplus E^\perp = V$.

1. Rappelons qu'en effet $-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \leq 1$ pour tout x, y dans $V \setminus \{0\}$, donc θ est bien défini par la fonction $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel, il s'agit de l'angle formé par les demi-droites $\mathbb{R}^+ x$ et $\mathbb{R}^+ y$ au point $(0, 0)$. Le scalaire θ ne change pas lorsqu'on permute x et y , ce qui explique l'adjectif *non-orienté*. Voir aussi les exercices.

Puisqu'un espace euclidien V est un espace métrique pour la distance $\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$, il est naturel d'étudier les applications qui préservent les distances².

Définition 3.1.3. Soient des espaces vectoriels euclidiens V et W . Une application $g: V \rightarrow W$ est isométrique si pour tout $x, y \in V$ on a $\text{dist}(gx, gy) = \text{dist}(x, y)$.

Il est évident que la composée de deux applications isométriques $f: V \rightarrow W$ et $g: W \rightarrow Z$ est une application isométrique $gf: V \rightarrow Z$; cette composition est associative et les applications identité $\text{id}: V \rightarrow V$ en sont des neutres. Ainsi on obtient une catégorie **Eucl** ayant pour objets les espaces vectoriels euclidiens, et pour morphismes les applications isométriques.

Mine de rien, le fait de préserver toutes les distances est une condition très forte sur une application :

Lemme 3.1.4. Soient des espaces vectoriels euclidiens V et W . Toute application isométrique $g: V \rightarrow W$ est injective.

Démonstration. Si $gx = gy$ alors $0 = \|gx - gy\| = \|x - y\|$ donc $x = y$. □

Lemme 3.1.5. Soit V un espace euclidien. Toute translation $t: V \rightarrow V$ est isométrique.

Démonstration. Soit $tx = x + a$ alors on a $\|tx - ty\| = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\|$. □

Lemme 3.1.6. Soient V et W des espaces vectoriels euclidiens. Toute application isométrique $f: V \rightarrow W$ préservant le vecteur nul ($f0 = 0$) préserve aussi le produit scalaire (pour tout $x, y \in V$ on a $fx \cdot fy = x \cdot y$).

Démonstration. Avec les hypothèses on a $\|fx\| = \|fx - 0\| = \|fx - f0\| = \|x - 0\| = \|x\|$. Puis on vérifie que $\|fx - fy\|^2 = \|x - y\|^2$ implique $-2(fx \cdot fy) = -2(x \cdot y)$, d'où la conclusion. □

Lemme 3.1.7. Soient V et W des espaces vectoriels euclidiens. Toute application $f: V \rightarrow W$ préservant le produit scalaire est linéaire.

Démonstration. Avec l'hypothèse on vérifie que

$$\begin{aligned} & \|f(x + y) - (fx + fy)\|^2 \\ &= (f(x + y) - (fx + fy)) \cdot (f(x + y) - (fx + fy)) \\ &= f(x + y) \cdot f(x + y) + fx \cdot fx + fy \cdot fy - 2f(x + y) \cdot fx - 2f(x + y) \cdot fy + 2fx \cdot fy \\ &= (x + y) \cdot (x + y) + x \cdot x + y \cdot y - 2(x + y) \cdot x - 2(x + y) \cdot y + 2x \cdot y \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $f(x + y) = fx + fy$. De même, on a $\|f(\alpha x) - \alpha(fx)\|^2 = 0$, d'où $f(\alpha x) = \alpha(fx)$. □

Proposition 3.1.8. Soient V et W des espaces vectoriels euclidiens. Toute application isométrique $g: V \rightarrow W$ est une application affine injective.

2. A part les isométries, il y a d'autres classes d'applications "naturelles" entre espaces métriques—voir le cours de Topologie!

Démonstration. Notons $a = g0 \in W$, alors l'application $f = t_{-a}g: V \rightarrow W$ est isométrique (car c'est la composée de deux applications isométriques) et préserve 0; c'est donc une application linéaire (par les lemmes précédents), ce qui veut dire que $g = tf$ est une application affine. L'injectivité a été montré dans un lemme. \square

Autrement dit, Eucl est une sous-catégorie de $\text{Aff}_{\mathbb{R}}$ dont tous les morphismes sont des monomorphismes. (Mais, bien sûr, il existe des applications affines injectives qui ne sont pas isométriques!)

Nous savons déjà que toute application affine $g: V \rightarrow W$ s'écrit, de manière unique, comme la composée $g = t \circ f$ d'une application linéaire $f: V \rightarrow W$ et une translation $t: W \rightarrow W$. Clairement, si g est isométrique, alors aussi $f = t^{-1} \circ g$ l'est; et réciproquement, si f est isométrique, alors aussi $g = t \circ f$ l'est. Ainsi on obtient :

Théorème 3.1.9. *Soient V et W des espaces vectoriels euclidiens. Une application $g: V \rightarrow W$ est isométrique si et seulement s'il existe une unique application linéaire isométrique $f: V \rightarrow W$ et une unique translation $t: W \rightarrow W$ telles que $g = tf$.*

Pour éviter toute confusion dans la suite, et bien justifié par les résultats ci-dessus, on dira que $g: V \rightarrow W$ est une *isométrie affine* si c'est une application isométrique (nécessairement affine et injective), et que $f: V \rightarrow W$ est une *isométrie linéaire* si c'est une application linéaire isométrique (nécessairement injective). Si $V = W$ il suit par le Théorème du Rang que toute isométrie (affine/linéaire) est un automorphisme³ (affine/linéaire). De plus, pour $g = tf \in GA(V)$ avec $t \in T(V)$ et $f \in GL(V)$, le théorème ci-dessus implique que g est isométrique si et seulement si f l'est. Il suit maintenant de manière évidente que :

Théorème 3.1.10. *Soit un espace euclidien V . L'ensemble $E(V)$ des isométries affines de V est un sous-groupe de $GA(V)$, appelé le groupe euclidien de V . L'ensemble $O(V)$ des isométries linéaires de V est un sous-groupe de $GL(V)$, appelé le groupe orthogonal de V . On a le diagramme commutatif d'homomorphismes entre groupes*

$$\begin{array}{ccccc} T(V) & \hookrightarrow & E(V) & \xleftarrow{\cong} & O(V) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ T(V) & \hookrightarrow & GA(V) & \xleftarrow{\cong} & GL(V) \end{array}$$

montrant que la première ligne est une sous-suite exacte scindée de la deuxième ligne. Cela montre en particulier le produit semi-direct $E(V) = T(V) \rtimes O(V)$.

Démonstration. Il est toujours vrai que la composée de deux applications isométriques est une application isométrique, que l'application identité $\text{id}: V \rightarrow V$ est isométrique, et que l'inverse (ensembliste) de toute application bijective isométrique est isométrique. Ainsi le résultat suit du fait que les isométries (affines/linéaires) d'un espace euclidien V sont bijectives, donc des automorphismes (affines/linéaires). \square

3. Dans le cours de Géométrie en L2, une "isométrie de \mathbb{R}^2 " était, par définition, une *bijection* préservant les distances. Ici, par les résultats de l'Algèbre Linéaire, nous voyons que la bijectivité est en fait une *conséquence* de la préservation des distances.

Les isométries affines d'un espace euclidien V ont bien évidemment toutes les propriétés des automorphismes affines (voir les Propositions 2.2.4, 2.2.10 et 2.2.12), mais avec la qualité supplémentaire qu'elles préservent les distances (et toutes les notions géométriques que l'on peut exprimer à l'aide de la distance). La notation $E(V)$ pour le groupe euclidien n'est pas la seule utilisée dans les références; on y voit aussi $\text{Iso}(V)$ ou $\text{Eucl}(V)$. Par contre, la notation $O(V)$ pour le groupe orthogonal d'un espace euclidien V est standard (et est utilisée également dans le cadre plus général des *espaces quadratiques*). Dans certaines références, les éléments de $E(V)$ sont appelés les *transformations euclidiennes* de V , et ceux de $O(V)$ les *transformations orthogonales*.

3.2. Le groupe orthogonal

Vu son importance pour les isométries affines, on souhaite mieux comprendre le groupe orthogonal $O(V)$ des isométries linéaires d'un espace euclidien V . Avec les lemmes démontrés auparavant (et le Théorème du Rang) on vérifie facilement :

Proposition 3.2.1. *Soit un espace euclidien V et une application linéaire $f: V \rightarrow V$. Les conditions suivantes sont équivalentes, et chacune d'entre elles exprime que $f \in O(V)$ ⁴ :*

1. pour tout $x, y \in V$, $\|fx - fy\| = \|x - y\|$,
2. pour tout $x \in V$, $\|fx\| = \|x\|$,
3. pour tout $x, y \in V$, $x \cdot y = fx \cdot fy$.

Une isométrie linéaire préserve l'orthogonalité de vecteurs (si $x \cdot y = 0$ alors $fx \cdot fy = 0$) et de sous-espaces vectoriels. (Mais attention, il ne suffit pas de préserver l'orthogonalité pour être une isométrie : les homothéties – et plus généralement les similitudes – fournissent des contre-exemples. Voir les exercices.)

On sait (cf. Proposition 2.1.3) que $f \in GL(V)$ exactement quand $f: V \rightarrow V$ est une application linéaire envoyant une (et alors toute) base (quelconque) sur une base; on peaufine ce résultat pour les isométries linéaires :

Proposition 3.2.2. *Soit un espace euclidien V . Une application linéaire $f: V \rightarrow V$ est une isométrie si et seulement si f envoie une (et alors toute) base orthonormale⁵ de V sur une base orthonormale de V .*

Démonstration. Si $f: V \rightarrow V$ est une isométrie linéaire, alors f préserve le produit scalaire, et donc la norme et l'orthogonalité; ainsi il suit que f envoie toute base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ sur une base orthonormale $\{fe_1, \dots, fe_n\}$. Réciproquement, soit une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ telle qu'aussi $\{fe_1, \dots, fe_n\}$ est une base orthonormale. Pour tout $x \in V$ on a alors $x = \sum_i \alpha_i e_i$ et, par linéarité de f , aussi $fx = \sum_i \alpha_i fe_i$. Mais alors $\|x\|^2 = \sum_i \alpha_i^2 = \|fx\|^2$, montrant que f

4. Souvent on prend la troisième condition pour *définir* les éléments de $O(V)$; pour insister sur l'importance de la notion géométrique de *distance*, nous avons pris la première condition pour la définition.

5. Rappelons que, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale d'un espace euclidien V , alors – par bilinéarité du produit scalaire – on a pour tout $x = \sum_i \alpha_i e_i$ et tout $y = \sum_i \beta_i e_i$ que $x \cdot y = \sum_i \alpha_i \beta_i$.

présERVE la norme ; et il suit de manière évidente que $\|x - y\| = \|f(x - y)\| = \|fx - fy\|$, donc f est une isométrie. \square

Faisons ensuite le lien avec les représentations matricielles des applications linéaires. Nous savons déjà qu'en choisissant une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ (quelconque) d'un espace vectoriel V sur un corps K , on établit un isomorphisme de groupes $GL(V) \cong GL(n, K)$ envoyant un automorphisme linéaire $f: V \rightarrow V$ sur sa matrice par rapport à la base choisie. Lorsque V est un espace euclidien, et on choisit une base *orthonormale*, on peut faire mieux.

Lemme 3.2.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble*

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M^{-1} = M^t\}$$

est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$; ses éléments s'appellent les matrices orthogonales⁶.

Proposition 3.2.4. *Soit un espace euclidien V . Tout choix de base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V détermine un isomorphisme de groupes $O(V) \cong O(n)$. On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} O(V) & \xrightarrow{\quad} & GL(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ O(n) & \xrightarrow{\quad} & GL(n, \mathbb{R}) \end{array}$$

d'homomorphismes de groupes, dont les flèches horizontales sont des inclusions de groupes, et les flèches verticales sont des isomorphismes déterminés par le choix d'une base orthonormale.

Démonstration. Etant donné une base (quelconque) $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , un automorphisme linéaire $f \in GL(V)$ correspond avec une matrice inversible $M = (m_{ij})_{ij}$ (par rapport à cette base) si et seulement si $fe_j = \sum_i m_{ij}e_i$. Supposons maintenant que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien V ; on a alors que

$$fe_j \cdot fe_k = \begin{pmatrix} m_{1j} & \cdots & m_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1k} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{pmatrix}.$$

Ainsi f est une isométrie si et seulement si $\{fe_1, \dots, fe_n\}$ est une base orthonormale, si et seulement si $M^t M = I$, si et seulement si M est une matrice orthogonale. L'isomorphisme $GL(V) \cong GL(n, \mathbb{R})$, déterminé par la base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , se restreint donc aux sous-groupes respectifs, *viz.* $O(V) \cong O(n)$. \square

Pour tout $M \in O(n)$ on a $M^t M = I$ et donc $\det(M)^2 = 1$, d'où $\det(M) \in \{-1, +1\}$; ainsi pour tout $f \in O(V)$ on a aussi que $\det(f) \in \{-1, +1\}$. Notons que $\{-1, +1\} \subseteq \mathbb{R}^\times$ est un sous-groupe

6. Pour $n = 0$ il convient de dire que "la matrice vide" est une matrice orthogonale ; ainsi $O(0)$ est le groupe trivial, qui est bien isomorphe au groupe orthogonal $O(\{0\}) = \{\text{id}\}$.

multiplicatif (et, à isomorphisme près, le seul groupe à deux éléments). Cela fait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} O(V) & \xrightarrow{\det} & \{+1, -1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL(V) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R}^\times \end{array}$$

d'homomorphismes de groupes, dont les flèches verticales des injections; et si $\dim(V) \geq 1$, les flèches horizontales sont des surjections⁷. Tout comme le groupe linéaire spécial $SL(V)$ est, par définition, le noyau de la deuxième ligne de ce diagramme, ici on a :

Théorème 3.2.5. *Soit un espace euclidien V de dimension $n \geq 1$. Le noyau de $\det: O(V) \rightarrow \{-1, +1\}$ est noté $SO(V)$, et appelé le groupe orthogonal spécial de V . Ainsi on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} SO(V) & \hookrightarrow & O(V) & \xrightarrow{\det} & \{+1, -1\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ SL(V) & \hookrightarrow & GL(V) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R}^\times \end{array}$$

d'homomorphismes de groupes, dont la première ligne est une sous-suite exacte de la deuxième ligne. On a en particulier que $O(V)/SO(V) \cong \{-1, +1\}$.

Pour la “version matricielle” de $SO(V)$, on définit bien évidemment

$$SO(n) = \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$$

et il suit que, pour tout choix de base orthonormale de V (de dimension $n \geq 1$) on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} SO(V) & \hookrightarrow & O(V) & \xrightarrow{\det} & \{-1, +1\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ SO(n) & \hookrightarrow & O(n) & \xrightarrow{\det} & \{-1, +1\} \end{array}$$

d'homomorphismes de groupes, dont les lignes horizontales sont des suites exactes courtes, et les flèches verticales sont des isomorphismes (déterminés par le choix de base de V). Les éléments de $SO(V)$ sont appelés les *isométries linéaires directes* : ils ne changent pas l'*orientation* de l'espace (voir les exercices). Par ailleurs, ces suites exactes courtes sont scindées; voir les exercices pour une démonstration et des conséquences intéressantes.

Dans la suite, nous voulons étudier des générateurs pour les groupes $O(V)$ et $SO(V)$, ainsi que leurs centres. Pour cela nous adapterons d'abord la notion de symétrie linéaire (cf. les exercices du chapitre précédent) à la situation plus spécifique où l'espace V est euclidien :

7. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale de V , alors aussi $\{-e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale; et l'unique application linéaire envoyant l'une sur l'autre, est un élément de $O(V)$ dont le déterminant vaut -1 . Voir aussi les symétries orthogonales, et en particulier les réflexions, plus loin.

Proposition 3.2.6. Soit $E \subseteq V$ un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien, et notons $E^\perp \subseteq V$ son (unique) orthocomplément : $V = E \oplus E^\perp$; ainsi tout $x \in V$ admet une unique décomposition $x = x_E + x_{E^\perp}$. La symétrie linéaire

$$s_E : V \rightarrow V : x_E + x_{E^\perp} \mapsto x_E - x_{E^\perp}$$

est une isométrie (linéaire), appelée symétrie orthogonale (linéaire) d'axe E .

Démonstration. La linéarité de $s_E : V \rightarrow V$ suit d'un exercice du chapitre précédent. Si on choisit une base orthonormale de V qui est la concaténation de bases orthonormales de E et E^\perp , alors la matrice de s_E est

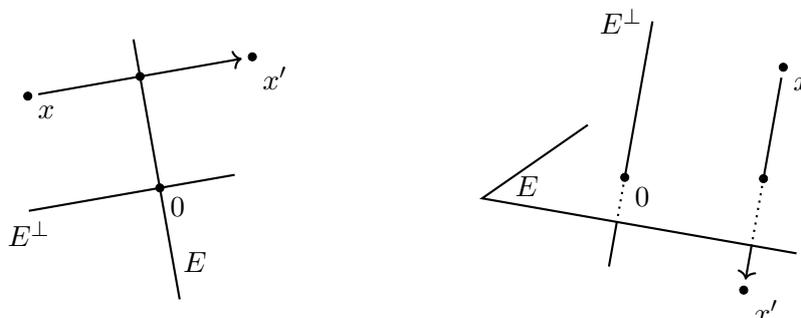
$$\begin{pmatrix} I_k & \\ & -I_l \end{pmatrix}$$

où $k = \dim(E)$, $l = \dim(E^\perp)$ (et donc $k + l = \dim(V)$), et I_r dénote la matrice unité $r \times r$. Il s'agit d'une matrice orthogonale, et donc s_E est une isométrie linéaire. \square

Pour $E = V$ on a $s_E = \text{id}$ (identité) et pour $E = \{0\}$ on a $s_E = -\text{id}$ (symétrie centrale). Introduisons aussi la terminologie classique suivante :

Définition 3.2.7. Une réflexion linéaire d'un espace euclidien V de dimension $n \geq 1$ est une symétrie orthogonale linéaire $s_E : V \rightarrow V$ telle que $\dim(E) = n - 1$ (donc E est un hyperplan vectoriel).

Clairement, si $n = 1$ alors l'unique réflexion est $-\text{id}$; voici des illustrations de réflexions lorsque $n = 2$ et $n = 3$:

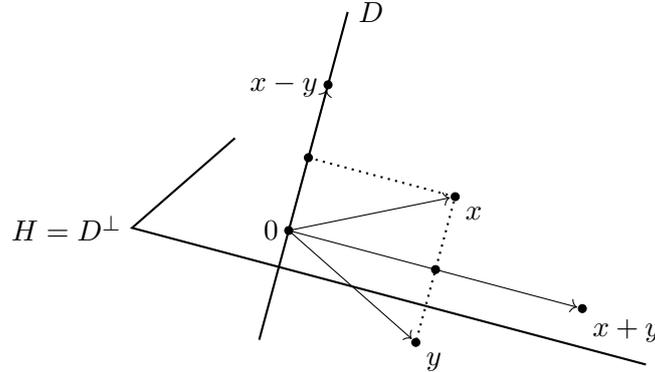


Lemme 3.2.8. Soit un espace euclidien V de dimension $n \geq 1$, et $x, y \in V$. On a $\|x\| = \|y\|$ si et seulement s'il existe une réflexion linéaire $s : V \rightarrow V$ telle que $sx = y$.

Démonstration. S'il existe une réflexion envoyant x sur y , alors – puisque c'est une isométrie linéaire – on a égalité des normes. Réciproquement, si $\|x\| = \|y\|$ alors pour n'importe quel hyperplan vectoriel $H \subseteq V$ contenant x , la réflexion s_H fixe x , et envoie donc x sur y . Si $x \neq y$ alors $x - y \neq 0$ et $D = \mathbb{R}(x - y)$ est une droite vectorielle dans V ; son orthocomplément est un hyperplan, soit H . Puisque

$$(x - y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

(on utilise que x et y sont de même norme), on voit que $x + y \in H = D^\perp$, d'où l'unique décomposition $x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y) \in H \oplus D$.



Il suit que $s_H(x) = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y) = y$, comme voulu. □

Théorème 3.2.9 (Cas particulier du Théorème de Cartan-Dieudonné). *Soit un espace euclidien V de dimension $n \geq 1$. Toute isométrie linéaire $f \in O(V)$ est la composée de au plus n réflexions linéaires⁸ (lorsqu'on considère que la composée de zéro réflexions est l'identité).*

Démonstration. On fait une preuve par induction sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ on a $O(V) = \{\text{id}, -\text{id}\}$ et tout est presque trivial : $H = \{0\}$ est un hyperplan, et $s_H = -\text{id}$.

Supposons maintenant que $n \geq 2$. Si $f \neq \text{id}$, alors il existe $x_0 \in V$ tel que $fx_0 \neq x_0$. Comme $\|fx_0\| = \|x_0\|$, le lemme précédent implique qu'il existe une réflexion $s : V \rightarrow V$ tel que $s(fx_0) = x_0$. L'isométrie $g := s \circ f : V \rightarrow V$ fixe alors le vecteur x_0 , et donc aussi tout élément de la droite $D = \mathbb{R}x_0$. Mais g préserve l'orthogonalité (comme toute isométrie linéaire), et donc $g(H) = H$ pour $H = D^\perp$. Ainsi, l'isométrie $g : V \rightarrow V$ est la somme des deux isométries

$$g_D : D \rightarrow D : x \mapsto x \quad \text{et} \quad g_H : H \rightarrow H : x \mapsto gx.$$

Puisque $\dim(H) = n - 1$, l'hypothèse de l'induction s'applique : $g_H = s_k \circ \dots \circ s_1$ est la composée de $k \leq n - 1$ réflexions $s_i : H \rightarrow H$. Mais chaque réflexion s_i détermine un hyperplan $H_i \subseteq H$; et l'hyperplan $H'_i := D \oplus H_i \subseteq D \oplus H = V$ détermine à son tour une réflexion $s'_i : V \rightarrow V$. Explicitement, pour $x = x_D + x_H \in D \oplus H$ on a $s'_i(x) = x_D + s_i(x_H) \in D \oplus H$, ce qui permet de déduire, pour tout $x = x_D + x_H \in D \oplus H = V$, que

$$(s'_k \circ \dots \circ s'_1)(x) = x_D + (s_k \circ \dots \circ s_1)(x_H) = gx_D + gx_H = g(x_D + x_H) = gx.$$

Il suit que $f = s_H \circ g = s \circ s'_k \circ \dots \circ s'_1$ est la composée de $k + 1 \leq n$ réflexions. □

Pour une réflexion $s : V \rightarrow V : x_H + x_D \mapsto x_H - x_D$ (donc H est un hyperplan et D est son orthocomplément), on peut toujours trouver une base orthonormale de V par rapport à laquelle la matrice de s est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Le nombre minimal de réflexions nécessaires est en fait $n - \dim(\ker(f - \text{id}))$; voir les références.

Cela montre en particulier que $\det(s) = -1$.

Corollaire 3.2.10. *Soit un espace euclidien V . Alors $f \in SO(V)$ si et seulement si f est la composée d'un nombre paire de réflexions.*

Par ailleurs, les symétries orthogonales sont aussi utiles pour démontrer que :

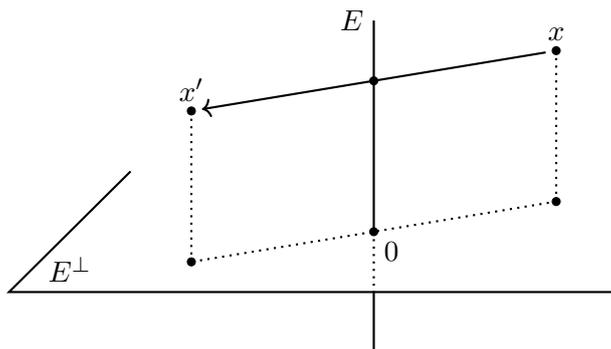
Proposition 3.2.11. *Le centre de $O(V)$ est $\mathcal{Z}(O(V)) = \{\text{id}, -\text{id}\}$.*

Démonstration. Une inclusion est triviale. Pour l'autre, soit $f \in \mathcal{Z}(O(V))$, alors pour toute symétrie orthogonale $s: V \rightarrow V$ on doit avoir $fs = sf$. En particulier, pour tout $0 \neq x \in V$ on peut considérer $E = \mathbb{R}x$; alors la symétrie $s_E: V \rightarrow V$ fixe exactement les éléments de la droite E (et envoie les éléments de l'orthocomplément E^\perp sur leurs opposés). En copiant l'argument donné pour le calcul du centre de $GL(V)$, on trouve que $f = \lambda \text{id}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais la contrainte supplémentaire que $\det(f) = \pm 1$ implique que $\lambda = \pm 1$ (dans $K = \mathbb{R}$); et on trouve que $f \in \{\text{id}, -\text{id}\}$. \square

Lorsque $\dim(V) \in \{0, 1\}$, le groupe orthogonal spécial $SO(V)$ est trivial; il est donc égal à son centre. Pour $\dim(V) = 2$ on voit sans grande difficulté que $SO(V)$ est commutatif; il est donc aussi égal à son centre. Par contre, pour $\dim(V) \geq 3$ la situation est plus intéressante, et pour calculer le centre de $SO(V)$ il est utile d'introduire :

Définition 3.2.12. *Un retournement (aussi appelé renversement ou demi-tour) d'un espace euclidien V de dimension $n \geq 2$ est une symétrie orthogonale $s_E: V \rightarrow V$ telle que $\dim(E) = n - 2$.*

Autrement dit, les points fixes d'un retournement forment un sous-espace de dimension $n - 2$ de V . Bien évidemment, cette définition n'a pas de sens pour $n \in \{0, 1\}$, et pour $n = 2$ l'unique retournement est $-\text{id}$. Ainsi, c'est pour $n \geq 3$ que cette notion s'avère utile. Voici une illustration pour $n = 3$, où un retournement est donc exactement une rotation d'angle π , ce qui explique la terminologie :



Par ailleurs, on peut toujours trouver une base de V par rapport à laquelle la matrice d'un retournement est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui montre en particulier que tout retournement est un élément de $SO(V)$.

Proposition 3.2.13. *Soit un espace euclidien V de dimension $n \geq 3$, alors*

$$\mathcal{Z}(SO(V)) = \begin{cases} \{\text{id}, -\text{id}\} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \{\text{id}\} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Démonstration. Les inclusions $\{\text{id}, -\text{id}\} \subseteq \mathcal{Z}(SO(V))$ (pour n pair) et $\{\text{id}\} \subseteq \mathcal{Z}(SO(V))$ (pour n impair) sont évidentes. Réciproquement, tout $f \in \mathcal{Z}(SO(V))$ doit commuter avec tous les retournements. Notamment, pour tout plan $P \subseteq V$, si on note son orthocomplément $E = P^\perp$, on doit avoir $f s_E = s_E f$, et donc pour tout $x \in P$ on a $s_E(fx) = f s_E(x) = f(-x) = -fx$; mais donc $fx \in P$. Ainsi on voit que $f(P) = P$ pour tout plan $P \subseteq V$; et toute droite étant l'intersection de deux plans, et f préservant toutes les intersections, il suit que $f(D) = D$ pour toute droite $D \subseteq V$. Comme dans le calcul du centre de $GL(V)$ et de $O(V)$, on trouve déjà que $f = \pm \text{id}$. Mais ici on doit avoir $1 = \det(f) = (\pm 1)^n$, donc selon la parité de n on trouve l'inclusion annoncée. \square

Incidentement, les retournements engendrent tout $SO(V)$:

Proposition 3.2.14. *Soit un espace euclidien V de dimension $n \geq 3$. Toute composée de deux réflexions est la composée de deux retournements. Par conséquent, tout $f \in SO(V)$ est la composée de au plus n retournements.*

Démonstration. Si on compose une réflexion $s: V \rightarrow V$ avec elle-même, alors $s \circ s = \text{id}$ est évidemment la composée d'un retournement (au choix) avec lui-même; le résultat est donc trivial. Prenons donc deux réflexions distinctes, déterminées par deux décompositions distinctes $H \oplus D = V = H' \oplus D'$ (en "hyperplan plus droite"), soient

$$s: V \rightarrow V: x_H + x_D \mapsto x_H - x_D \quad \text{et} \quad s': V \rightarrow V: x_{H'} + x_{D'} \mapsto x_{H'} - x_{D'}.$$

Puisque $\dim(V) = n \geq 3$, l'intersection $H \cap H'$ (de dimension $n - 2$) contient une droite, disons D'' , dont l'orthocomplément est un hyperplan $H'' = (D'')^\perp$, qui détermine à son tour une réflexion $s'': V \rightarrow V$. On a trivialement

$$s' \circ s = s' \circ (s'' \circ s'') \circ s = (s' \circ s'') \circ (s'' \circ s),$$

et on va montrer que $r := s'' \circ s$ et $r' := s' \circ s''$ sont des retournements. En effet, puisque $D'' \subseteq H \cap H' \subseteq H$, on peut considérer l'orthocomplément de D'' dans H , soit H_1 , puis en déduire la décomposition orthogonale $V = H \oplus D = H_1 \oplus D'' \oplus D$. Écrivant maintenant $x = x_{H_1} + x_{D''} + x_D \in H_1 \oplus D'' \oplus D$ on peut calculer que

$$rx = (s''(s(x_{H_1} + x_{D''} + x_D))) = s''(x_{H_1} + x_{D''} - x_D) = x_{H_1} - x_{D''} - x_D$$

ce qui montre que r laisse fixe l'espace H_1 de dimension $n - 2$ et envoie tout élément du plan $D \oplus D''$ sur son opposé : c'est donc un retournement. Même type de calcul pour $r' = s' \circ s''$. \square

On termine cette section avec une expression explicite pour tous les éléments de $O(V)$.

Théorème 3.2.15. Soit un espace euclidien V . Pour tout $f \in O(V)$ il existe une base orthonormale de V telle que la matrice de f est l'assemblage diagonale de matrices carrées

$$\begin{pmatrix} I_k & & & & \\ & -I_l & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_t} \end{pmatrix}$$

où I_k et I_l sont des matrices unités (de genre $k \times k$ et $l \times l$), et chaque R_{θ_i} est la matrice 2×2 d'une rotation plane d'angle θ_i , soit⁹

$$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

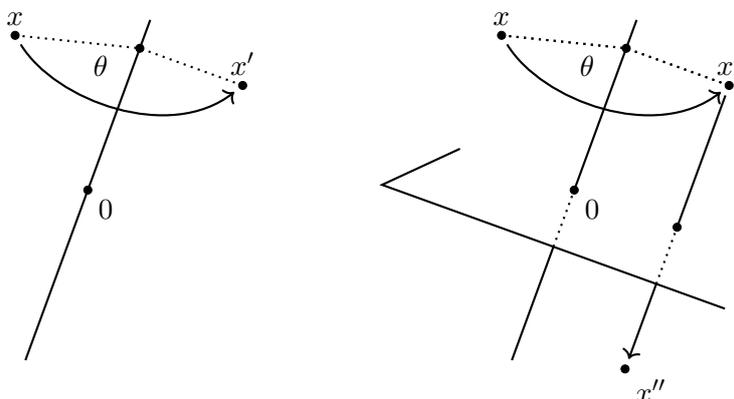
(On a $k, l, t \geq 0$ et $k + l + 2t = \dim(V)$.)

On ne fera pas la démonstration de ce théorème en dimension quelconque, mais seulement en dimension 3 (où la démonstration est plus simple, mais présente tout de même l'essentiel du cas général). Les dimensions $n \in \{0, 1, 2\}$ sont laissées en exercice.

Théorème 3.2.16. Soit un espace euclidien V de dimension 3. Pour tout $f \in O(V)$ il existe une base orthonormale de V telle que la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas on dit que f est une rotation, et dans le deuxième cas f est une rotaflexion, c'est à dire, la composée (dans n'importe quel ordre) d'une rotation et d'une réflexion, l'axe de la rotation étant orthogonal à l'hyperplan fixe de la réflexion :



Démonstration. S'il existe $0 \neq x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $fx = \lambda x$, alors on voit facilement que $\|x\| = \|fx\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, et donc $\lambda = \pm 1$; autrement dit, les seules valeurs propres réelles

9. Ce sont exactement les éléments de $SO(2)$; voir les exercices.

possibles pour $f \in O(V)$ sont ± 1 . En général il est possible que f n'ait aucune valeur propre réelle, mais pour $\dim(V) = 3$ le polynôme caractéristique de f est de degré 3 et à coefficients réels, donc admet au moins une racine réelle¹⁰. Ainsi il y a toujours une droite $D \subseteq V$ engendré par un vecteur propre – que ce soit pour la valeur propre $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ – telle que $f(D) = D$; et puisque f préserve l'orthogonalité, on a aussi $f(H) = H$ pour $H = D^\perp$. Ainsi l'isométrie $f: V \rightarrow V$ est la somme des deux isométries

$$f_D: D \rightarrow D: x \mapsto \lambda x \quad \text{et} \quad f_H: H \rightarrow H: x \mapsto fx,$$

où $\dim(D) = 1$ et $\dim(H) = 2$. Pour toute base orthonormale de la droite D , la matrice de f_D est $(\lambda) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$. Puisque H est un plan, f_H est soit une réflexion, soit une rotation (= composée de deux réflexions), et on peut donc trouver une base orthonormale de H pour laquelle la matrice de f_H est

$$\text{soit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Par concaténation de ces bases orthonormales de D et de H , on obtient une base orthonormale de $V = D \oplus H$; et la matrice de $f = f_D \oplus f_H$ par rapport à cette base est

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Mais la première matrice est en fait un cas particulier de la deuxième (à permutation des vecteurs de base près) pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$; donc le résultat suit. \square

Ce théorème permet de classer les éléments de $O(3)$ (et donc les isométries linéaires en dimension 3) à l'aide du déterminant, la trace et les espaces propres.

3.3. Classification des isométries affines

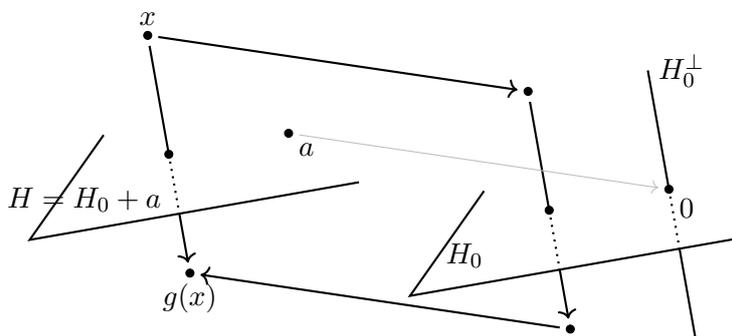
Pour un espace euclidien V donné, le groupe euclidien $E(V)$ contient exactement les automorphismes affines $g = t \circ f$ avec $f \in O(V)$. Le groupe $O(V)$ étant engendré par les réflexions linéaires, il est naturel de voir comment on peut engendrer le groupe $E(V)$. D'abord on définit "par conjugaison" la notion naturelle de réflexion affine (voir aussi les exercices du chapitre précédent) :

Définition 3.3.1. *Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Une réflexion affine de V est une isométrie affine $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ où f est une réflexion linéaire et $a \in V$.*

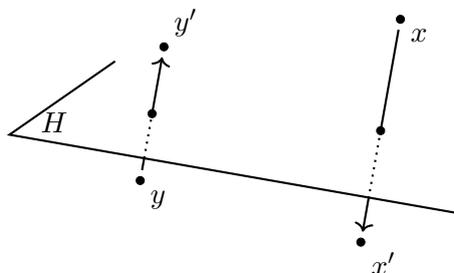
Ainsi, si H_0 est l'axe de la réflexion linéaire f , alors l'hyperplan affine $H = H_0 + a$ est l'axe de $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$. Réciproquement, tout hyperplan affine $H \subseteq V$ est l'axe d'une unique réflexion

10. Le graphe d'une fonction polynomiale de degré 3 à toujours pour limites (lorsque $x \rightarrow \pm\infty$) les valeurs $+\infty$ et $-\infty$, et "coupe" donc l'axe X à au moins un endroit : c'est une racine réelle du polynôme en question.

affine $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ où f est la réflexion linéaire d'axe $H_0 = H - a$ et a est un point (quelconque) de H . Voici une illustration pour $n = 3$:



Géométriquement parlant, la réflexion affine d'axe H envoie tout point x sur un point x' de telle manière que la droite xx' soit orthogonale à H et que H contienne le milieu de x et x' (voir aussi les exercices du chapitre précédent) :



(Par ce même procédé de conjugaison, on peut donner une définition naturelle de “symétrie orthogonale affine”, dont la réflexion affine est alors un cas particulier.)

Voici maintenant l’analogue “affine” du Théorème de Cartan-Dieudonné (Théorème 3.2.9) :

Théorème 3.3.2 (Décomposition d’une isométrie en réflexions affines). *Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Toute isométrie affine $g \in E(V)$ est la composée de au plus $n + 2$ réflexions affines¹¹.*

Il est utile de montrer d’abord un lemme.

Lemme 3.3.3. *Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Toute translation $t \in T(V)$ est la composée de deux réflexions affines.*

Démonstration. Si $t = \text{id}$ alors $t = s \circ s$ pour n’importe quelle réflexion s . Si $t = t_a$ avec $a \neq 0$, alors l’hyperplan (vectoriel¹²) $H = (\mathbb{R}a)^\perp$ détermine la réflexion (linéaire) s_H avec laquelle on peut maintenant calculer que

$$t_a = t_{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} \circ \text{id} = t_{\frac{a}{2}} \circ t_{\frac{a}{2}} \circ s_H \circ s_H = t_{\frac{a}{2}} \circ s_H \circ t_{-\frac{a}{2}} \circ s_H,$$

ce qui montre que t_a est la composée des réflexions s_H (linéaire) et $(t_{\frac{a}{2}} \circ s_H \circ t_{-\frac{a}{2}})$ (affine). \square

11. On peut préciser le nombre de réflexions affines nécessaires; voir les références.

12. On peut en fait prendre n’importe quel hyperplan affine orthogonal à la droite vectorielle $\mathbb{R}a$.

Démonstration du Théorème. Supposons d'abord que $g \in E(V)$ a un point fixe, soit $ga = a$. Alors $f = t_{-a} \circ g \circ t_a$ est une isométrie fixant 0, c'est à dire $f \in O(V)$. Il suit par le Théorème 3.2.9 que $f = s_k \circ \dots \circ s_1$ pour $k \leq n$ réflexions linéaires, et donc

$$g = t_a \circ f \circ t_{-a} = t_a \circ (s_k \circ \dots \circ s_1) \circ t_{-a} = (t_a \circ s_k \circ t_{-a}) \circ \dots \circ (t_a \circ s_1 \circ t_{-a}).$$

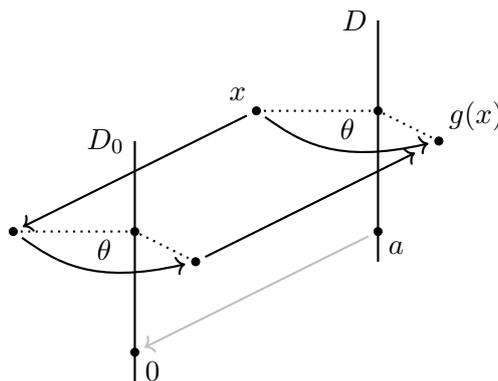
Chacun des $(t_a \circ s_i \circ t_{-a})$ est (par définition) une réflexion affine.

Supposons maintenant que $g \in E(V)$ est sans points fixes. Pour un point $a \in V$ au choix, $g' = t_{a-ga} \circ g \in E(V)$ fixe a , et s'écrit (par l'argument précédent) comme une composée de $k \leq n$ réflexions affines. Par le lemme, toute translation s'écrit comme une composée de deux réflexions affines. Ainsi $g = t_{ga-a} \circ g'$ s'écrit comme la composée de $k + 2 \leq n + 2$ réflexions affines. \square

Les résultats ci-dessus s'appliquent aux espaces euclidiens *de dimension quelconque*; mais pour la suite de cette section, on se limitera¹³ aux espaces euclidiens de dimension 3. Par le Théorème 3.2.16, les éléments de $O(V)$ sont alors exactement les rotations et les rotaxions (linéaires); et une rotaxion est exactement la composée (dans n'importe quel ordre) d'une rotation avec une réflexion d'axes perpendiculaires. Pour décrire les éléments de $E(V)$, on définit d'abord "par conjugaison" les rotations affines :

Définition 3.3.4. Soit V un espace euclidien de dimension 3. Une rotation affine est une isométrie de la forme $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ où f est une rotation linéaire.

Si $f: V \rightarrow V$ est la rotation linéaire d'axe D_0 et d'angle θ , alors la rotation affine $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ est d'axe $D = D_0 + a$ et d'angle θ . Réciproquement, toute droite affine D et angle θ déterminent une (unique¹⁴) rotation affine $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ où f est la rotation linéaire d'axe $D_0 = D + a$ et a est un point (quelconque) de D . Voici une illustration :



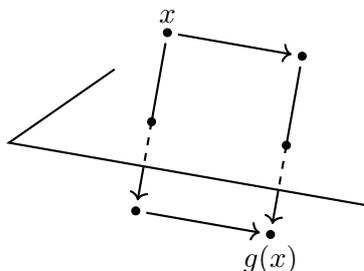
Ainsi, parmi les éléments de $E(V)$ il y a les translations, les réflexions affines et les rotations affines. Le résultat suivant dit que toute isométrie affine $g \in E(V)$ peut être décrite en termes de composées "bien choisies" de translations, réflexions et rotations, et donne alors une interprétation géométrique des éléments de $E(V)$.

13. Pour $\dim(V) \in \{0, 1\}$ tout est trivial, et pour $\dim(V) = 2$ on peut consulter le cours de géométrie de L2. Voir aussi les exercices.

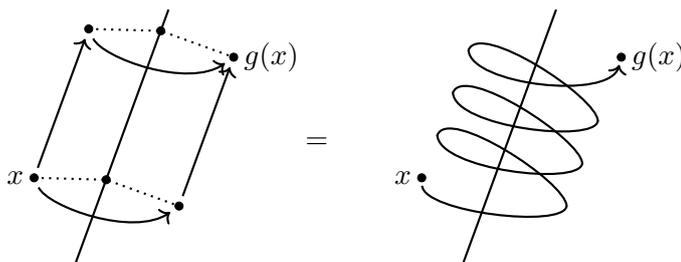
14. Si on travaille dans un espace orienté, voir les exercices.

Théorème 3.3.5 (Classification des isométries en dimension 3). *Toute isométrie affine $g = t \circ f \in E(V)$ d'un espace euclidien V de dimension 3 est l'un des quatre cas suivants :*

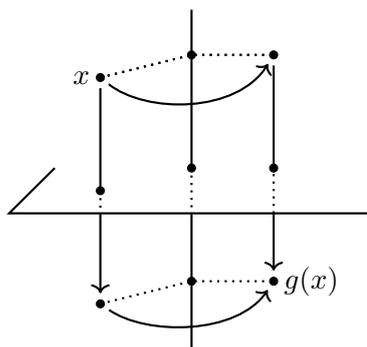
1. *Si f est l'identité, alors g est une translation.*
2. *Si f est une réflexion, alors g est une réflexion glissée : une composée (dans n'importe quel ordre) d'une réflexion affine avec une translation par un vecteur dans la direction de l'axe de la réflexion.*



3. *Si f est une rotation d'angle $\theta \neq 0$, alors g est un vissage : la composée (dans n'importe quel ordre) d'une rotation affine avec une translation par un vecteur dans la direction de l'axe de la rotation.*



4. *Si f est une rotaxion d'angle $\theta \neq 0$, alors g est une rotaxion affine : la composée (dans n'importe quel ordre) d'une rotation affine avec une réflexion affine par un plan orthogonal à l'axe de la rotation.*



Démonstration. Pour fixer les notations, posons $g = t_a \circ f$ avec $a \in V$ et $f \in O(V)$. Ainsi f est soit l'identité (rotation d'angle $\theta = 0$), soit une réflexion (rotaxion d'angle $\theta = 0$), soit une rotation d'angle $\theta \neq 0$, soit une rotaxion d'angle $\theta \neq 0$.

(1) Si f est l'identité, alors tout est trivial.

(2) Si f est une réflexion d'axe H_0 , alors la restriction de f à H_0 est id_{H_0} et sa restriction à $D_0 = H_0^\perp$ est $-\text{id}_{D_0}$. Notons $a = a_{D_0} + a_{H_0}$ pour l'unique décomposition de $a \in V = D_0 \oplus H_0$.

On peut alors calculer que

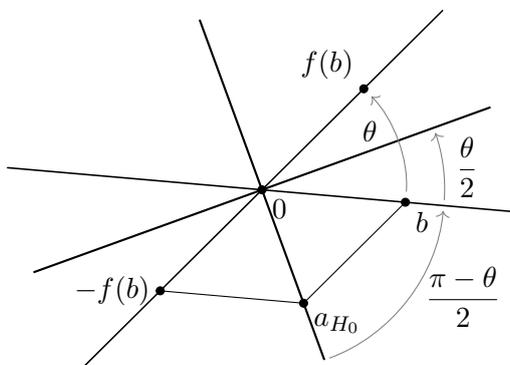
$$g = t_a \circ f = t_{a_{H_0}} \circ t_{a_{D_0}} \circ f = t_{a_{H_0}} \circ (t_{\frac{a_{D_0}}{2}} \circ f \circ t_{-\frac{a_{D_0}}{2}})$$

mais aussi (puisque f fixe les éléments de H_0)

$$g = t_a \circ f = t_{a_{D_0}} \circ t_{a_{H_0}} \circ f = t_{a_{D_0}} \circ f \circ t_{a_{H_0}} = (t_{\frac{a_{D_0}}{2}} \circ f \circ t_{-\frac{a_{D_0}}{2}}) \circ t_{a_{H_0}}.$$

Ainsi g est la composée, dans n'importe quel ordre, de la réflexion affine d'axe $H = H_0 + \frac{a_{D_0}}{2}$ avec la translation par a_{H_0} , un vecteur de la direction de l'axe de la réflexion.

(3 et 4) Si f est soit une rotation, soit une rotaflexion (composée de rotation et réflexion), notons D_0 l'axe et $\theta \neq 0$ l'angle de la rotation (et donc $H_0 = D_0^\perp$ est l'axe de la réflexion, le cas échéant). Notons toujours $a = a_{D_0} + a_{H_0}$ pour l'unique décomposition de $a \in V = D_0 \oplus H_0$. Que f soit une rotation ou une rotaflexion, sa restriction à H_0 est une rotation d'angle θ (en dimension 2). Pour $a = a_{D_0} + a_{H_0}$ il est alors toujours possible de trouver¹⁵ un (unique) $b \in H_0$ tel que $a_{H_0} = b - f(b)$, comme indiqué dans ce dessin dans le plan H_0 :



Il suit que

$$g = t_a \circ f = t_{a_{D_0}} \circ t_{a_{H_0}} \circ f = t_{a_{D_0}} \circ (t_b \circ f \circ t_{-b}).$$

On considère maintenant deux cas :

(3) Si f est une rotation, alors $t_b \circ f \circ t_{-b}$ est la rotation affine d'axe $D = D_0 + b$ et d'angle θ . Par ailleurs, puisque la restriction de f à D_0 est id_{D_0} (f fixe les éléments de D_0), et puisque $a_{D_0} \in D_0$ on peut calculer (par commutativité des translations) que

$$g = t_{a_{D_0}} \circ (t_b \circ f \circ t_{-b}) = t_b \circ (t_{a_{D_0}} \circ f) \circ t_{-b} = t_b \circ (f \circ t_{a_{D_0}}) \circ t_{-b} = (t_b \circ f \circ t_{-b}) \circ t_{a_{D_0}}.$$

Ainsi g est la composée, dans n'importe quel ordre, de la rotation affine d'axe $D = D_0 + b$ et d'angle θ , avec la translation par le vecteur a_{D_0} (un élément de la direction de l'axe de la rotation).

(4) Si f est une rotaflexion, alors la restriction de f à D_0 est $-\text{id}_{D_0}$ (f envoie les éléments de D_0 à leurs opposés), et puisque $a_{D_0} \in D_0$ on peut calculer (par commutativité des translations) que

$$g = t_{a_{D_0}} \circ (t_b \circ f \circ t_{-b}) = t_b \circ t_{a_{D_0}} \circ f \circ t_{-b} = t_b \circ (t_{\frac{a_{D_0}}{2}} \circ f \circ t_{-\frac{a_{D_0}}{2}}) \circ t_{-b} = t_c \circ f \circ t_{-c}$$

15. Plus algébriquement : $\ker(\text{id}_{H_0} - f_{H_0}) = \{0\}$ car f_{H_0} n'a pas de points fixes, donc $\text{im}(\text{id}_{H_0} - f_{H_0}) = H_0$; c'est à dire, tout élément de H_0 est dans l'image de $\text{id}_{H_0} - f_{H_0}$.

pour $c = b + \frac{aD_0}{2}$. De plus, lorsqu'on écrit $f = f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$ pour la décomposition de la rotaflexion f en réflexion f_1 (d'axe H_0) et rotation f_2 (d'axe $D_0 = H_0^\perp$ et angle θ), il suit aussi que

$$g = t_c \circ f \circ t_{-c} = (t_c \circ f_2 \circ t_{-c}) \circ (t_c \circ f_1 \circ t_{-c}) = (t_c \circ f_1 \circ t_{-c}) \circ (t_c \circ f_2 \circ t_{-c}).$$

Ainsi g est la composée, dans n'importe quel ordre, d'une rotation affine d'axe $D = D_0 + c$ et d'angle θ , et d'une réflexion affine d'axe $H = H_0 + c$. \square

Remarquons que, dans cette démonstration, les "éléments géométriques" (vecteur de translation, plan de réflexion, axe et angle de rotation) d'une isométrie affine quelconque $g \in E(V)$ sont explicitement calculés. Par ailleurs, on peut (presque) reconnaître une isométrie affine par ses points fixes :

Corollaire 3.3.6 (Points fixes des isométries affines). *Soit une isométrie affine $g = t \circ f$ d'un espace euclidien V de dimension 3. Selon les points fixes de g et le détermininant de f , on a la classification suivante :*

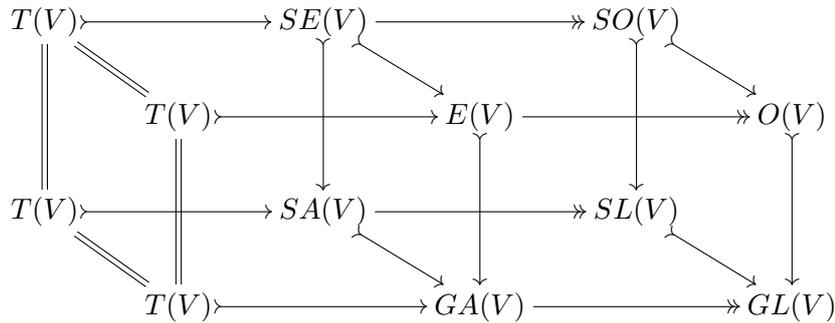
points fixes	$\det(f) = 1$	$\det(f) = -1$
<i>aucun</i>	<i>translation, vissage</i>	<i>réflexion glissée</i>
<i>singleton</i>	<i>n'existe pas</i>	<i>rotaflexion</i>
<i>droite</i>	<i>rotation</i>	<i>n'existe pas</i>
<i>plan</i>	<i>n'existe pas</i>	<i>réflexion</i>
<i>espace</i>	<i>identité</i>	<i>n'existe pas</i>

Notons qu'une translation peut être considérée comme un vissage d'angle $\theta = 0$, et qu'une rotaflexion d'angle $\theta = 0$ est tout simplement une réflexion. Une rotation d'angle $\theta = \pi$ est exactement un retournement, alors qu'une rotaflexion d'angle $\theta = \pi$ est une symétrie centrale.

Sans surprise, pour un espace euclidien V , on définit le *groupe euclidien spécial* $SE(V)$ comme le produit semidirect $SE(V) = T(V) \rtimes SO(V)$. De manière équivalente, $SE(V)$ est le sous-groupe de $E(V)$ des isométries (affines) dont la partie linéaire est dans $SO(V)$ (c'est à dire, de déterminant 1). Ou encore, $SE(V)$ est le sous-groupe des isométries dans $SA(V)$. Les éléments de $SE(V)$ ne changent pas l'orientation de l'espace (voir les exercices pour plus de détails), et sont appelés les *mouvements rigides*¹⁶. En effet, en mécanique classique, ces mouvements rigides sont considérés comme les seuls déplacements possibles d'un solide dans l'espace, sans déformer ce solide. Nous pouvons situer ce groupe parmi tous les autres groupes rencontrés dans ce cours

16. Aussi utilisé : *déplacement, mouvement euclidien, isométrie positive* (ou *directe*), etc. Attention : la terminologie peut être différente dans certaines références.

à l'aide du diagramme



dans lequel les lignes horizontales sont des suites exactes courtes scindées (et donc le groupe “au milieu” est le produit semi-direct du groupe “à sa gauche” avec le groupe “à sa droite”), et les homomorphismes non-horizontales sont des inclusions. Voici un résultat qui suit directement du Théorème 3.3.2 et le Corollaire 3.2.10 :

Corollaire 3.3.7 (Décomposition d’un mouvement rigide en réflexions affines). *Tout mouvement rigide d’un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ est la composée d’un nombre paire de réflexions orthogonales affines.*

Ensuite, la classification des isométries affines du Théorème 3.3.5 implique ce résultat – dû à l’astronome et mathématicien italien Giulio Mozzi (1730–1813) et redémontré par le géomètre français Michel Chasles (1793–1880) – de très grande importance en mécanique et cinématique :

Corollaire 3.3.8 (Théorème de Mozzi-Chasles). *Tout mouvement rigide d’un espace euclidien de dimension 3 est un vissage (éventuellement d’angle 0, c’est à dire, une translation).*

Et voici, pour terminer en beauté cette section, une conséquence simple mais surprenante, démontrée par le swiss Leonhard Euler (1707–1783), de la classification des isométries par leurs points fixes :

Corollaire 3.3.9 (Théorème de la Rotation d’Euler). *Lorsqu’on tourne une sphère (dans un espace euclidien de dimension 3) autour de son centre¹⁷, il y a toujours un diamètre qui est fixé (et, dans les faits, on a effectué une rotation autour de ce diamètre).*

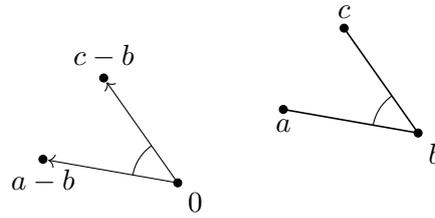
Démonstration. En “tournant la sphère autour de son centre”, on effectue un mouvement rigide ayant (au moins) un point fixe (à savoir le centre de la sphère). Selon le Corollaire 3.3.6 cela ne peut être qu’une rotation affine. L’axe de cette rotation est la droite affine des points fixes, et passe donc par le centre : ainsi il y a un diamètre de la sphère qui est fixé. \square

3.4. De nouveau quelques résultats géométriques

Le produit scalaire d’un espace euclidien V permet d’y mesurer la distance entre toute paire de *points*. Par contre, la notion d’angle ne s’applique a priori qu’aux *vecteurs*. Remédions à cela :

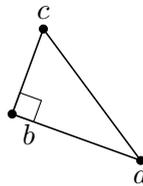
17. Dans la pratique : prenez un ballon de foot entre les mains, et tournez-le comme bon vous semble !

Définition 3.4.1. Soient trois points a , b et c . L'angle $\angle abc$ est l'angle entre les vecteurs $a - b$ et $c - b$.



Soulignons qu'il s'agit ici de l'angle *non-orienté*, qui est un nombre $\theta \in [0, \pi]$; cela implique que l'unique *angle droit* est $\frac{\pi}{2}$. Le résultat le plus emblématique de la géométrie euclidienne est sans doute :

Proposition 3.4.2 (Théorème de Pythagoras¹⁸). Un (vrai) triangle abc est rectangle en b si et seulement si $\text{dist}(a, b)^2 + \text{dist}(b, c)^2 = \text{dist}(a, c)^2$.



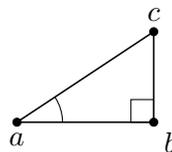
Démonstration. Le résultat suit de

$$\begin{aligned} \|c - a\|^2 &= (c - a) \cdot (c - a) \\ &= ((c - b) + (b - a)) \cdot ((c - b) + (b - a)) \\ &= \|c - b\|^2 + 2(c - b) \cdot (b - a) + \|b - a\|^2 \end{aligned}$$

et du fait que $(c - b) \cdot (b - a) = 0$ si et seulement si $(c - b) \cdot (a - b) = 0$. □

Par ailleurs, on retrouve la “définition géométrique” du cosinus d'un angle (voir le cours de géométrie en L2) comme suit :

Proposition 3.4.3. Dans un triangle abc , rectangle en b , on a $\cos \angle cab = \frac{\text{dist}(a, b)}{\text{dist}(a, c)}$.



Démonstration. On utilise $(c - b) \cdot (a - b) = 0$ pour vérifier que

$$\cos \angle cab = \frac{(c - a) \cdot (b - a)}{\|c - a\| \|b - a\|} = \frac{((c - b) + (b - a)) \cdot (b - a)}{\|c - a\| \|b - a\|} = \frac{(b - a) \cdot (b - a)}{\|c - a\| \|b - a\|} = \frac{\|b - a\|}{\|c - a\|}.$$

□

18. Πυθαγόρας (en grec) vivait de -570 à -495 et a fait ses travaux principalement à Crotona, aujourd'hui dans la région de Calabre, en Italie.

Quant à la “compatibilité” des ces notions géométriques (incidence, parallélisme, distance, angle) avec les isométries affines, nous savons déjà que tout $g \in E(V)$ préserve (et reflète) l’incidence et le parallélisme entre sous-espaces affines (comme tout automorphisme affine), et les distances entre les points (par définition même d’isométrie). Concernant les angles (et donc l’orthogonalité), on peut ajouter que :

Proposition 3.4.4. *Toute isométrie affine $g \in E(V)$ préserve (et reflète) les angles : si $a' = ga$, $b' = gb$ et $c' = gc$ alors $\angle abc = \angle a'b'c'$.*

Démonstration. Toute isométrie linéaire $f: V \rightarrow V$ préserve le produit scalaire; si on note $a' = fa$, $b' = fb$ et $c' = fc$, alors

$$(a - b) \cdot (c - b) = f(a - b) \cdot f(c - b) = (fa - fb) \cdot (fc - fb) = (c' - b') \cdot (a' - b')$$

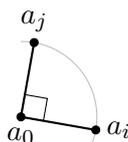
implique que $\angle abc = \angle a'b'c'$. Toute translation $t: V \rightarrow V: x \mapsto x + v$ est une isométrie affine; si on note $a' = ta$, $b' = tb$ et $c' = tc$, alors

$$(a - b) \cdot (c - b) = (a + v - v - b) \cdot (c + v - v - b) = (ta - tb) \cdot (tc - tb) = (a' - b') \cdot (c' - b')$$

implique que $\angle abc = \angle a'b'c'$. Puisque $g \in E(V)$ s’écrit comme $g = tf$ avec $t \in T(V)$ et $f \in O(V)$, le résultat suit par composition. \square

On peut maintenant élégamment exprimer qu’une isométrie affine est un “changement de repère affine orthonormal” :

Définition 3.4.5. *Dans un espace euclidien V , un repère affine $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ est appelé orthonormal si $\text{dist}(a_0, a_i) = 1$ (pour tout $i \neq 0$) et $\angle a_i a_0 a_j = \frac{\pi}{2}$ (pour tout $0 \neq i \neq j \neq 0$).*



Avec le produit scalaire sur V , cela s’écrit comme

$$(a_i - a_0) \cdot (a_j - a_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \neq i = j \\ 0 & \text{si } 0 \neq i \neq j \neq 0 \end{cases}$$

c’est à dire, $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ est une suite orthonormale dans V .

Proposition 3.4.6. *Une application affine $g: V \rightarrow V$ est une isométrie affine si et seulement si g envoie un (et alors tout) repère affine orthonormal de V sur un repère affine orthonormal de V .*

Démonstration. Si g est une isométrie affine et $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ est un repère affine orthonormal de V , alors $\{ga_0, ga_1, \dots, ga_n\}$ est un repère affine orthonormal de V , par les Propositions 2.2.10 et 3.4.4. Réciproquement, si g est une application affine envoyant un repère affine orthonormal

$\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ sur un repère affine orthonormal $\{ga_0, ga_1, \dots, ga_n\}$, alors en écrivant $g = tf$ avec translation $t: V \rightarrow V$ et application linéaire $f: V \rightarrow V$, le calcul

$$ga_i - ga_0 = tfa_i - tfa_0 = fa_i - fa_0 = f(a_i - a_0),$$

montre que f envoie la base orthonormale $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ de V sur la base orthonormale $\{ga_1 - ga_0, \dots, ga_n - ga_0\} = \{f(a_1 - a_0), \dots, f(a_n - a_0)\}$ de V : par la Proposition 3.2.2 on obtient $f \in O(V)$, comme voulu. \square

Les quelques résultats ci-dessus indiquent bien comment tous les résultats que nous avons démontrés dans le cours de géométrie en L2, pour le plan cartésien \mathbb{R}^2 , sont en fait des résultats de la géométrie affine euclidienne. Notamment, la notion de “changement de repère cartésien”, utilisée maintes fois dans le cours de L2, est identique à la notion d’“isométrie affine” développée ici. Ainsi on peut parfaitement importer les résultats concernant les triangles congruents, les cercles circonscrits et inscrits, etc. aux espaces euclidiens. Cependant, le cadre ici est tout de même plus général, ne fut-ce que par l’admission de dimension quelconque pour l’espace euclidien considéré—et dans la suite cela a des jolies conséquences.

Dans le cours de géométrie en L2, nous avons montré en détail que toute équation polynomiale

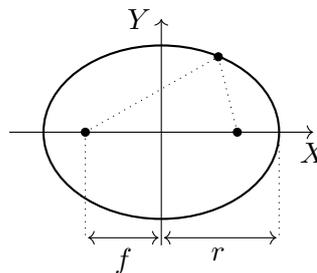
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

(en deux variables, à coefficients réels, de degré 2) se réduit “par changement de repère (affine orthonormal)”, à une des *équations réduites* suivantes :

- $ax^2 + by^2 = 1$,
- $ax^2 + by^2 = 0$,
- $y = ax^2$,

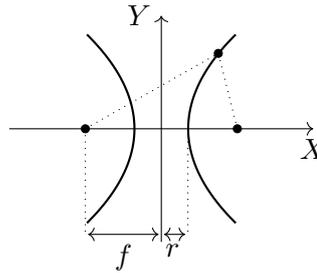
où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Écrivant ci-dessous $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, alors selon les valeurs de ces paramètres, le *locus* d’une telle équation est l’une des figures suivantes dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 :

- ellipse : $ax^2 + by^2 = 1$,



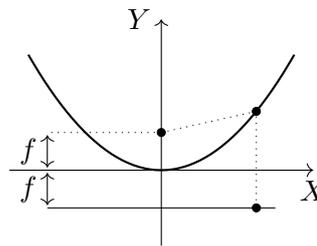
$$\frac{1}{r^2}x^2 + \frac{1}{r^2 - f^2}y^2 = 1$$

– hyperbole : $ax^2 - by^2 = 1$,



$$\frac{1}{r^2}x^2 - \frac{1}{f^2 - r^2}y^2 = 1$$

– parabole : $y = ax^2$,



$$y = \frac{1}{4f}x^2$$

– cas dégénérés : le vide, un point, une droite, deux droites sécantes, deux droites parallèles.

Et bien sûr nous avons découvert certaines propriétés “géométriques” de ces figures—notamment le fait qu’il s’agit de *sections de coniques*.

Plus généralement, on peut considérer une équation polynomiale, toujours à coefficients réels et de degré 2, mais maintenant en n variables x_1, \dots, x_n :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0, \quad (3.1)$$

avec au moins un $a_{ij} \neq 0$. On peut écrire cette équation sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c = 0,$$

c’est à dire,

$$X^t A X + B^t X + C = 0$$

où X est la matrice colonne contenant les variables, et $A \neq O$. Quitte à remplacer la matrice A par $\frac{1}{2}(A + A^t)$, on peut supposer que A est symétrique ($A = A^t$). Ainsi, par le Théorème Spectral, il existe une matrice orthogonale $M \in O(n)$ et une matrice diagonale non-nulle D (unique à permutation de ses éléments près) telle que $A = M^t D M$. On a alors

$$X^t A X + B X + C = 0 \iff X^t (M^t D M) X + B^t (M^t M) X + C = 0$$

$$\iff (MX)^t D(MX) + (MB)^t(MX) + C = 0.$$

Autrement dit, par l'isométrie linéaire $X \mapsto MX$, l'équation donnée s'écrit (lorsqu'on renomme adéquatement les variables et les coefficients) comme

$$\sum_{i=1}^n (a_i x_i^2 + b_i x_i) + c = 0$$

avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. Maintenant, pour chaque $a_i \neq 0$ on peut réécrire

$$a_i x_i^2 + b_i x_i = a_i \left(x_i + \frac{b_i}{2a_i} \right)^2 - a_i \left(\frac{b_i}{2a_i} \right)^2,$$

c'est à dire, par la translation

$$x_i \mapsto \begin{cases} x_i + \frac{b_i}{2a_i} & \text{si } a_i \neq 0 \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}$$

on peut simplifier l'équation pour que chaque variable n'apparaisse qu'une seule fois : soit dans un terme de degré 2, soit dans un terme de degré 1. Puis, par une permutation des variables s'il le faut, et en renommant adéquatement les coefficients, on peut réécrire l'équation donnée comme

$$\sum_{i=1}^k a_i x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n b_i x_i + c = 0, \quad (3.2)$$

avec $1 \leq k \leq n$ et $a_1 \neq 0$.

Si tous les b_i 's sont nuls, alors – selon le cas où $c = 0$ ou $c \neq 0$ – cette équation se décline en deux formes :

$$\text{“quadrique de type 1” : } \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = 1, \quad (3.3)$$

$$\text{“quadrique de type 2” : } \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = 0. \quad (3.4)$$

S'il existe un $b_i \neq 0$, alors l'équation (3.2) contient le terme linéaire $b_i x_i + c = b_i \left(x_i + \frac{c}{b_i} \right)$, donc par la translation $x_i \mapsto x_i + \frac{c}{b_i}$ (et $x_j \mapsto x_j$ pour $j \neq i$) on peut faire disparaître le coefficient constant c . L'équation prend alors la forme

$$\sum_{i=1}^k a_i x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n b_i x_i = 0 \quad (3.5)$$

(en ayant renommé adéquatement les coefficients, comme d'habitude), toujours avec $b_i \neq 0$. Mais puisque $\kappa := \|(0, \dots, 0, -b_{k+1}, \dots, -b_n)\| \neq 0$, le vecteur $(0, \dots, 0, \frac{b_{k+1}}{\kappa}, \dots, \frac{b_n}{\kappa})$ est de norme 1. On peut donc trouver des vecteurs e_{k+1}, \dots, e_{n-1} pour faire une base orthonormale

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_k &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \\ e_{k+1} &, \\ &\vdots \\ e_{n-1} &, \\ e_n &= (0, \dots, 0, \frac{b_{k+1}}{\kappa}, \dots, \frac{b_n}{\kappa}). \end{aligned}$$

Par l'isométrie linéaire $X \mapsto MX$, où M est la matrice contenant les coordonnées des vecteurs $(e_i)_i$ comme colonnes, on transforme l'équation (3.5) ayant $n-k$ termes linéaires en une équation n'ayant qu'un seul terme linéaire, que l'on peut alors réécrire (en reparamétrant, une fois de plus, les coefficients) comme :

$$\text{“quadrique de type 3”} : \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2 = x_n. \quad (3.6)$$

Bref, nous avons montré :

Théorème 3.4.7. *A isométrie affine près, toute équation quadratique (à coefficients réels) s'écrit comme une des trois formes réduites suivantes :*

- type 1 : $a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 1$,
- type 2 : $a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0$,
- type 3 : $a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 = x_n$,

avec $a_1 \neq 0$.

En fonction des valeurs (positives, négatives ou nulles) des coefficients, on peut étudier le *locus* d'une telle équation. Soulignons que, pour passer de l'équation (3.1) à l'une des trois équations réduites (3.3)–(3.4)–(3.6), nous avons effectué uniquement des changements de variables *isométriques*. Géométriquement parlant, cela veut dire que le locus de l'équation (3.1) donnée est *isométrique* au locus de l'équation réduite correspondant. (On peut même faire en sorte que l'isométrie soit *directe*, c'est à dire, ne change pas l'orientation de l'espace lors des changements de variables.)

Détaillons le cas $n = 3$; on parle alors d'équations quadratiques en trois variables x, y, z , et le locus d'une telle équation s'appelle une *quadrique*. L'équation de départ est donc

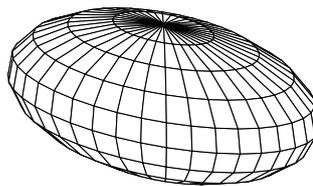
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

mais par une isométrie affine on peut la réécrire comme une des trois formes suivantes :

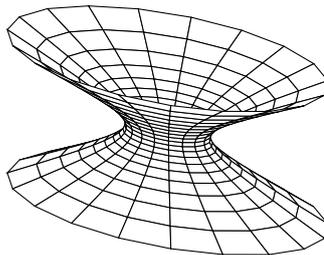
- type 1 : $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$,
- type 2 : $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$,
- type 3 : $ax^2 + by^2 = z$,

avec $a \neq 0$. En écrivant ci-dessous $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$, alors selon les valeurs de ces paramètres le *locus* d'une telle équation est l'une des figures suivantes dans l'espace \mathbb{R}^3 :

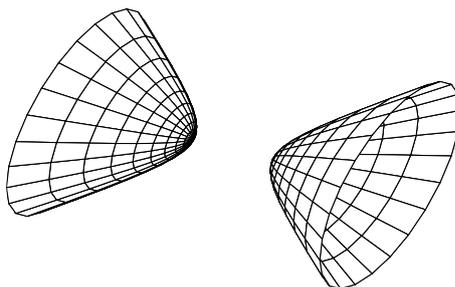
1. ellipsoïde : $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$,



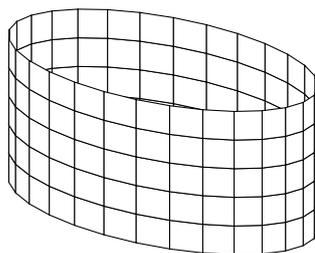
2. hyperboloïde à une nappe : $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$



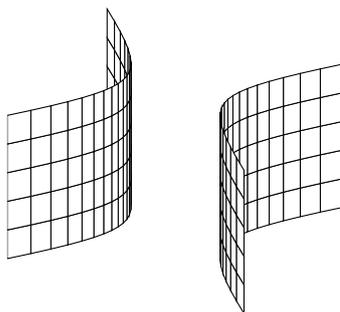
3. hyperboloïde à deux nappes : $ax^2 - by^2 - cz^2 = 1$



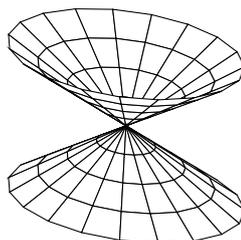
4. cylindre elliptique : $ax^2 + by^2 = 1$



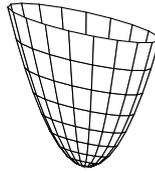
5. cylindre hyperbolique : $ax^2 - by^2 = 1$



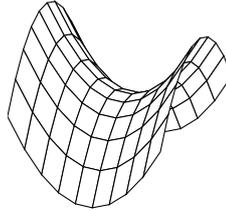
6. cône elliptique : $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$



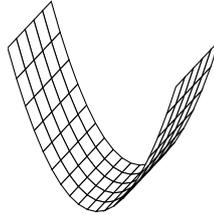
7. parabolôïde elliptique : $ax^2 + by^2 = z$,



8. parabolôïde hyperbolique : $ax^2 - by^2 = z$,



9. cylindre parabolique : $ax^2 = z$



10. cas dégénérés : le vide, un point, une droite, un plan, deux plans sécants, deux plans parallèles.

L'intersection d'une quadrique avec un plan est toujours une section de conique ; les noms des quadriques reflètent les sections de conique ainsi obtenues.

De nombreuses propriétés géométriques – parfois bien remarquables ! – des quadriques dans \mathbb{R}^3 sont connues. Notamment, on peut décrire leurs *symétries*, i.e. les symétries orthogonales envoyant une quadrique sur elle-même¹⁹ ; on peut montrer que certaines quadriques sont des *surfaces de révolution*, i.e. la surface est obtenue par rotation d'une section conique plane ; les cônes, les cylindres, les hyperboloïdes à une nappe et les parabolôïdes hyperboliques sont des *surfaces (doublement) réglées*, i.e. des réunions de (deux familles de) droites ; et les cônes et les cylindres sont même des *surfaces développables*, i.e. on peut les former “en roulant un plan” ! Voir les références pour les détails, pour des beaux dessins, et pour des applications réelles (p.e. en architecture, en mécanique, en astronomie, ...).

3.5. Exercices

Exercice 3.5.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit V un espace euclidien. Montrer que $(x \cdot y)^2 \leq \|x\| \|y\|$ pour tout x, y dans V , et conclure que l'angle non-orienté entre deux vecteurs

19. En fait, une quadrique est de type 1 si et seulement si elle a une symétrie centrale dont le centre n'appartient pas à la quadrique ; de type 2 si et seulement si elle a une symétrie centrale dont le centre appartient à la quadrique ; et de type 3 si et seulement si elle n'a pas de symétrie centrale.

non-nuls est bien défini ; notons-le par θ_{xy} . Montrer que, pour tout $x' = \alpha x$ et $y' = \beta y$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$, on a $\theta_{xy} = \theta_{x'y'}$; ainsi ce scalaire est en fait associé aux demi-droites engendrés par x et y (plutôt qu'aux vecteurs eux-mêmes). Montrer que $\mathbb{R}x = \mathbb{R}y$ si et seulement si $\theta_{xy} \in \{0, \pi\}$. Dans \mathbb{R}^2 muni du produit usuel, calculer les angles non-orientés de $x = (1, 0)$ avec $y_1 = (1, 1)$, $y_2 = (-1, 1)$, $y_3 = (-1, -1)$ et $y_4 = (1, -1)$; cela montre bien que l'angle est en effet *non-orienté* !

Exercice 3.5.2 (Inégalité de Minkowski). Soit V un espace euclidien. Montrer que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in V$, et en déduire que la fonction $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance au sens de la Topologie. Quand a-t-on $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$?

Exercice 3.5.3 (Une distance non-euclidienne). Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note $\|x\|_\infty := \max_i |x_i|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme qui n'est pas induite par un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . Ainsi la fonction $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$ est une distance *non-euclidienne* sur \mathbb{R}^n .

Exercice 3.5.4 (Procédé de Gram-Schmidt). Rappeler que tout espace euclidien V admet (au moins) une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$, c'est à dire, une base dont chaque vecteur est de norme 1 et tout vecteur est orthogonal à tout autre vecteur. (On peut appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.)

Exercice 3.5.5 (Base orthonormale). Montrer que l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel est euclidien, et que la base canonique est alors orthonormale. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale d'un espace euclidien V , montrer que l'unique application linéaire $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoyant e_i au i -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n est une isométrie linéaire. Observer par ailleurs que $x_i = x \cdot e_i$, et que donc $x = \sum_i (x \cdot e_i) e_i$. (Autrement dit, pour la base duale (e_1^*, \dots, e_n^*) de l'espace dual $V^* = \text{Lin}(V, \mathbb{R})$ on a que $e_i^*(x) = x \cdot e_i$.)

Exercice 3.5.6 (Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n). Soit un espace euclidien V muni d'une base orthonormale e_1, \dots, e_n . Montrer que l'application

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto (x_1, \dots, x_n) \quad \text{où} \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

est un isomorphisme faisant correspondre le produit scalaire de V avec le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n . Ainsi, tous les résultats démontrés dans \mathbb{R}^n avec le produit scalaire usuel et les notions dérivées (distance, angle, isométrie, etc.) sont vrais pour tout espace euclidien de dimension n .

Exercice 3.5.7 (Un drôle de cercle). Dans \mathbb{R}^2 , déterminer un produit scalaire pour lequel $(1, 1), (0, \frac{1}{2})$ est une base orthonormale. Dans l'espace euclidien ainsi construit, donner l'équation cartésienne du cercle centré à l'origine et de rayon 1.

Exercice 3.5.8 (Rapport comme quotient de distances signées). Pour trois points distincts mais alignés x, a et b dans un espace euclidien V , montrer que

$$\frac{b - x}{a - x} = \cos(\angle axb) \frac{\|b - x\|}{\|a - x\|}.$$

Reprendre le Théorème de Thales (avec les rapports) pour retrouver la version vue en L2.

Exercice 3.5.9 (Changement de repère affine). Calculer, dans le repère canonique de \mathbb{R}^3 , la représentation matricielle de l'application affine $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

1. $(0, 0, 0) \mapsto (1, 4, 3)$, $(1, 0, 0) \mapsto (4, 4, 4)$, $(1, 1, 0) \mapsto (0, 0, 1)$, $(1, 1, 1) \mapsto (1, 1, 1)$,
2. $(1, 1, 1) \mapsto (0, 1, 1)$, $(7, 0, 0) \mapsto (3, -5, 3)$, $(7, 7, 0) \mapsto (5, -2, 9)$, $(7, 7, 7) \mapsto (11, 0, 6)$.

S'agit-il d'une isométrie (pour le produit scalaire usuel) ?

Exercice 3.5.10 (Décomposition orthogonale et isométrie linéaire). Soit une décomposition $V = E \oplus E^\perp$ d'un espace euclidien V . Montrer que $f(E^\perp) = f(E)^\perp$ pour tout $f \in O(V)$.

Exercice 3.5.11 (Ceci n'est pas une isométrie). Soit un plan euclidien V et supposons que deux vecteurs a et b sont linéairement indépendants. Montrer que $\{0, a, b\}$ et $\{b, -a, b - a\}$ sont deux repères affines. Donner la description matricielle par rapport à la base a, b de V de l'unique bijection affine envoyant le premier repère sur le deuxième. En déduire que ces deux repères ne peuvent pas être orthonormaux en même temps.

Exercice 3.5.12 (Orientation d'un espace euclidien). Soient deux bases orthonormales $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ d'un espace vectoriel V , et $f \in O(V)$ l'unique isométrie linéaire envoyant l'une base sur l'autre. Lorsque $\det(f) = 1$ on dit que les deux bases sont *de même orientation*, et sinon elles sont *d'orientation opposée*. On "oriente" un espace euclidien en choisissant une base orthonormale que l'on déclare *positive* (ou *directe*). Montrer que les $f \in SO(V)$ sont exactement les endomorphismes linéaires qui "préservent distance et orientation".

Exercice 3.5.13 (Produit vectoriel—définition). Soit une suite de vecteurs x_1, \dots, x_n dans un espace euclidien V de dimension n . Pour toute base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , on définit à l'aide de la base duale (e_1^*, \dots, e_n^*) de l'espace dual $V^* = \text{Lin}(V, \mathbb{R})$, le *déterminant* (ou *volume signé*)

$$\det(x_1, \dots, x_n) := \det(e_i^*(x_j))_{ij} \in \mathbb{R}$$

de la suite donnée. Montrer que ce déterminant est le même pour toutes les bases orthonormales de même orientation, et qu'il change de signe entre deux bases d'orientations opposées. Choisissons maintenant une orientation de V , et supposons que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base d'orientation directe. Montrer que, pour tout $x_1, \dots, x_{n-1} \in V$, l'application

$$\phi: V \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \det(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$$

est une forme linéaire sur V (qui est indépendante de la base choisie). Montrer que l'application

$$\psi: V \rightarrow V^* = \text{Lin}(V, \mathbb{R}): x \mapsto (y \mapsto x \cdot y)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Conclure que, pour tout $x_1, \dots, x_{n-1} \in V$, il existe un unique $z \in V$ tel que

$$\text{pour tout } y \in V : \det(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = z \cdot y.$$

On dit alors que ce $z \in V$ est le *produit vectoriel* des $x_1, \dots, x_{n-1} \in V$, noté $z = x_1 \times \dots \times x_{n-1}$ (ou aussi $z = x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$).

Exercice 3.5.14 (Produit vectoriel—propriétés). Soit un espace euclidien V de dimension n avec une orientation choisie. Montrer que les coordonnées du produit vectoriel $x_1 \times \dots \times x_{n-1}$ par rapport à une base directe $\{e_1, \dots, e_n\}$ sont exactement $(\det(x_1, \dots, x_{n-1}, e_i))_i \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la suite $x_1, \dots, x_{n-1} \in V$ est libre si et seulement si le produit vectoriel $x_1 \times \dots \times x_{n-1}$ est non-nul. De plus, si la suite $x_1, \dots, x_{n-1} \in V$ est libre, montrer que le produit vectoriel $x_1 \times \dots \times x_{n-1}$ est orthogonal à l'hyperplan (vectoriel) engendré par la suite (cela peut être utile pour calculer un *vecteur normal* à un hyperplan donné); et si la suite e_1, \dots, e_{n-1} est orthonormale, alors $e_1, \dots, e_{n-1}, e_1 \times \dots \times e_{n-1}$ est une base orthonormale directe de V .

Exercice 3.5.15 (Produit vectoriel en dimension 3). Soit un espace euclidien V muni d'une base orthonormale directe $\{e_1, e_2, e_3\}$. Montrer, pour $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum y_i e_i$, que

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} e_1 - \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} e_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{pmatrix},$$

où on développe le dernier “déterminant”²⁰ vers sa troisième colonne. Montrer que

$$\|x \times y\|^2 + (x \cdot y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$$

et en déduire que $\|x \times y\| = \|x\| \|y\| |\sin \theta|$ où θ est l'angle (non-orienté) entre x et y . Ainsi, pour x et y linéairement indépendants, $x \times y$ est l'unique vecteur qui est : orthogonal à x et à y , de norme $\|x\| \|y\| |\sin \theta|$, et tel que la base $x, y, x \times y$ est d'orientation positive. (On trouve cela parfois comme définition dans les manuels scolaires.)

Exercice 3.5.16 (Exemples de symétries orthogonales). Faire des dessins pour “montrer” toutes les *symétries orthogonales* de \mathbb{R} , de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 (et indiquer en particulier les réflexions et les renversements).

Exercice 3.5.17 (Matrice de Householder). Soit $v \neq 0$ dans un espace euclidien V , et $H = (\mathbb{R}v)^\perp$ l'hyperplan orthogonal à v . Montrer que la symétrie orthogonale (linéaire) d'axe H est donnée par

$$s_H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto x - 2 \frac{x \cdot v}{\|v\|^2} v.$$

Si $V = \mathbb{R}^n$ et on écrit $v \in \mathbb{R}^n$ comme une colonne (en identifiant $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$), montrer que la matrice de s_H par rapport à la base canonique est $I - \frac{2}{\|v\|^2} v v^t$. (Cela s'appelle une *matrice de Householder*, d'après l'article [Alston Householder, *Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix*, Journal of the ACM, 1958].)

Exercice 3.5.18 (Valeurs propres). Soit un espace euclidien V . Montrer que les seules valeurs propres réelles possibles de $f \in O(V)$ sont $+1$ et -1 . Donner un $f \in O(V)$ sans aucune valeur propre réelle.

20. Ce n'est pas un vrai déterminant (ses éléments ne sont pas tous des scalaires), mais un moyen mnémotechnique!

Exercice 3.5.19 (Projections orthogonales). Soit un espace affine V . Montrer que $g = t_a \circ f: V \rightarrow V$ est une projection affine (c'est à dire, $g = t_c \circ f \circ t_{-c}$ pour une projection linéaire f) si et seulement si $g \circ g = g$, si et seulement si $f \circ f = f$ et $fa = 0$ (et alors $c = a$). Donner l'axe et la direction de g , et montrer que ce dernier est déterminé à parallélisme près. Supposons maintenant que V est un espace euclidien muni d'une base orthonormale. Observer qu'une projection *orthogonale* est entièrement déterminée par son axe. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur la représentation matricielle de g pour que g soit une projection orthogonale. (Penser aux valeurs propres et la diagonalisation !)

Exercice 3.5.20 (Symétries orthogonales). Soit un espace affine V . Montrer que $g = t_a \circ f: V \rightarrow V$ est une symétrie affine (c'est à dire, $g = t_c \circ f \circ t_{-c}$ pour une symétrie linéaire f) si et seulement si $f \circ f = \text{id}$ et $fa = -a$ (et alors $c = \frac{1}{2}a$). Donner l'axe et la direction de g , et montrer que ce dernier est déterminé à parallélisme près. Supposons maintenant que V est un espace euclidien. Montrer que g est une isométrie si et seulement si g est une symétrie *orthogonale*. Observer qu'une symétrie orthogonale est entièrement déterminée par son axe. Supposons ensuite qu'une base orthonormale est donnée. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur la représentation matricielle de g pour que g soit une symétrie *orthogonale*. (Penser aux valeurs propres et la diagonalisation !)

Exercice 3.5.21 (Approximation par projection orthogonale). Soit un espace euclidien V , et un sous-espace affine $A \subseteq V$. Notons $p: V \rightarrow V$ la projection orthogonale (affine) sur A . Dédurre du Théorème de Pythagoras que $\|x - p(x)\| \leq \|x - a\|$ pour tout $x \in V$ et tout $a \in A$. Autrement dit, la projection orthogonale de x sur A est la meilleure approximation (au sens de la distance euclidienne) de x par un élément de A .

Exercice 3.5.22 (Exemple de projection). Dans \mathbb{R}^3 avec sa base canonique, donner la représentation matricielle de la projection d'axe $P: x + y + z = 1$ et de direction $D: x = y = z$. S'agit-il d'une projection orthogonale (pour le produit scalaire usuel) ?

Exercice 3.5.23 (Projection orthogonale sur une droite). Soit un espace euclidien V . Montrer que la projection orthogonale (linéaire) sur une droite (vectorielle) $D_0 = \mathbb{R}v$ est

$$p_{D_0}: V \rightarrow V: x \mapsto \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v.$$

En déduire que la projection orthogonale (affine) sur une droite (affine) $D = ab$ est

$$p_D: V \rightarrow V: x \mapsto \frac{(b-x) \cdot (b-a)}{(b-a) \cdot (b-a)} a + \frac{(x-a) \cdot (b-a)}{(b-a) \cdot (b-a)} b.$$

Exercice 3.5.24 (Réflexion par un hyperplan). Soit un espace euclidien V . Montrer que la réflexion (linéaire) par un hyperplan (vectoriel) $H_0 = (\mathbb{R}v)^\perp$ est

$$r_{H_0}: V \rightarrow V: x \mapsto x - 2 \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v.$$

En déduire que l'unique réflexion (affine) envoyant un point a sur un point distinct b est

$$r_H: V \rightarrow V: x \mapsto x - 2 \frac{x \cdot (a-b)}{(a-b) \cdot (a-b)} (a-b) + \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{(a-b) \cdot (a-b)} (a-b).$$

Illustrations : <https://www.geogebra.org/m/vey9uxrj> et <https://www.geogebra.org/m/dzjkpxjs>.

Exercice 3.5.25 (Projections et symétries). De chaque application affine donnée ci-dessous sur \mathbb{R}^3 (considéré avec sa géométrie euclidienne usuelle), déterminer s'il s'agit d'une projection (orthogonale), d'une symétrie (orthogonale), d'un autre type d'isométrie, ou de aucun des cas particuliers précédents. Pour les projections et les symétries : déterminer direction et axe.

$$1. g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3. g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Exercice 3.5.26 (Groupes orthogonaux en petite dimension). Donner explicitement les éléments de $O(n)$ et de $SO(n)$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$. Vérifier que $SO(2)$ est commutatif et que $O(2)$ ne l'est pas.

Exercice 3.5.27 (Angle orienté dans un plan euclidien orienté). Soit un plan euclidien V orienté par une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$. Montrer que, si $f \in SO(V)$ admet un point fixe non-nul, alors $f = \text{id}$ (et montrer que cela est faux pour $f \in O(V)$). Montrer que, si $x = x_1e_1 + x_2e_2$ est tel que $\|x\| = 1$, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in SO(2)$$

correspond avec un élément de $SO(V)$ envoyant e_1 sur x . En déduire que, pour tout $x, y \in V$ tels que $\|x\| = 1 = \|y\|$, il existe un unique $f \in SO(V)$ tel que $fx = y$ (et montrer que cela est faux si $\dim(V) \geq 3$). On sait (voir exercice ci-dessus) que tout $f \in SO(V)$ correspond (pour la base choisie) à une unique matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ modulo } 2\pi.$$

L'angle orienté entre x et y est alors, par définition, le nombre $\theta \in \mathbb{R}$, déterminé modulo 2π , qui correspond avec l'unique $f \in SO(2)$ envoyant x sur y ; et ce $f \in SO(V)$ est alors la *rotation d'angle orienté* θ . Avec ces notations, vérifier que

$$fx = y \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

(où $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$) et en déduire que

$$\cos \theta = x \cdot y \quad \text{et} \quad \sin \theta = \det(x, y).$$

Observer que toute base orthonormale directe donne le même résultat pour l'angle θ ; mais l'orientation choisie est importante : par rapport à la base $\{e_2, e_1\}$ (ou toute autre base orthonormale d'orientation opposée), l'angle orienté de x à y change de signe (ce qui explique la terminologie). (Par ailleurs, comment faire pour calculer l'angle orienté entre deux vecteurs de normes quelconques?)

Exercice 3.5.28 (Encore un produit semidirect). Soit un plan euclidien V . Montrer que la suite exacte courte

$$SO(V) \hookrightarrow O(V) \xrightarrow{\det} \{+1, -1\}$$

est scindée par l'homomorphisme $s: \{+1, -1\} \rightarrow O(V)$ envoyant -1 sur une réflexion aux choix. Conclure qu'on a le produit semidirect $O(V) = SO(V) \rtimes \{+1, -1\}$, c'est à dire, tout élément de $O(V)$ est soit une rotation (i.e. un élément de $SO(V)$), soit la composée d'une rotation avec la réflexion choisie²¹. (Notons, par ailleurs, que le produit semidirect $O(V) = SO(V) \rtimes \{+1, -1\}$ est non-commutatif, alors qu'il est composé de deux facteurs commutatifs.) Soit maintenant $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormale de V , et considérons l'isomorphisme avec \mathbb{R}^2 en envoyant cette base sur la base canonique de \mathbb{R}^2 . On a les isomorphismes induits $O(V) \cong O(2)$ et $SO(V) \cong SO(2)$, et la "version matricielle" de la suite exacte courte ci-dessus,

$$SO(2) \hookrightarrow O(2) \xrightarrow{\det} \{+1, -1\}.$$

Pour scinder cette suite, choisissons maintenant la réflexion "d'axe X ", dont la matrice est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

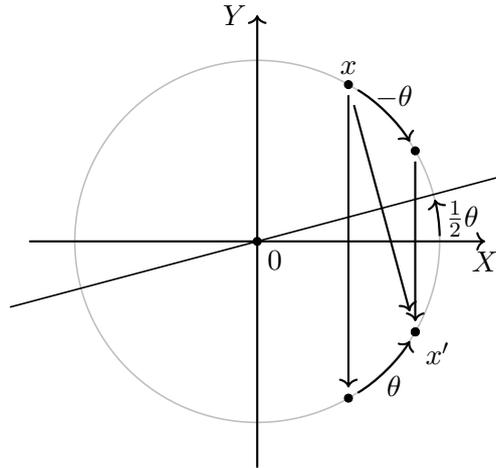
et rappelons que la matrice d'une rotation est typiquement

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ (déterminé modulo } 2\pi).$$

Montrer que $R_\theta S = S R_{-\theta} = R_{\frac{\theta}{2}} S R_{-\frac{\theta}{2}}$, et conclure qu'il s'agit de la matrice de la réflexion dont

21. On a "la même chose" en toute dimension n , mais pour $n \neq 2$ le groupe $SO(n)$ est moins facile à décrire.

l'axe fait un angle de θ avec "l'axe X " de \mathbb{R}^2 ; notons-là par S_θ .



Vérifier que

$$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi} \quad R_\theta S_\phi = S_{\theta+\phi} \quad S_\theta R_\phi = S_{\theta-\phi} \quad S_\theta S_\phi = R_{\theta-\phi}$$

et interpréter géométriquement. (On a ainsi dressé la table du produit dans le groupe $O(2)$.)

Exercice 3.5.29 (Isométrie linéaire de matrice orthogonale 2×2). Déterminer l'isométrie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: X \mapsto AX$ (pour la géométrie euclidienne usuelle) lorsque A est :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Exercice 3.5.30 (Rotations et nombres complexes). Montrer que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un groupe (commutatif) pour la multiplication. Montrer que l'application

$$\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow SO(2): a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

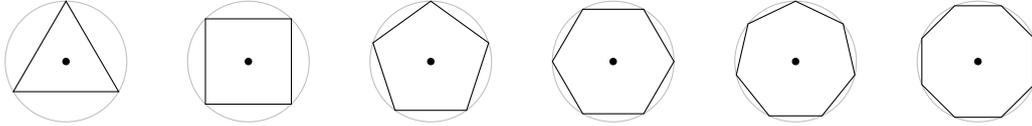
est un isomorphisme de groupes. Montrer que

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1: \theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

est un homomorphisme surjectif de groupes (pour l'addition sur \mathbb{R}) dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi l'isomorphisme $SO(2) \cong \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ identifie tout élément de $SO(2)$ avec un nombre $\theta \in \mathbb{R}$, déterminé à un multiple entier de 2π près : on retrouve l'angle d'une rotation.

Exercice 3.5.31 (Groupe diédral : les symétries d'un polygone régulier). Dans le plan euclidien orienté \mathbb{R}^2 ("le plan usuel"), on considère un polygone régulier à $n \geq 3$ sommets,

inscrit dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Le *groupe diédral* D_n est, par définition, le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^2)$ laissant globalement invariant ce polygone. (Plus généralement, on peut considérer le groupe des isométries laissant globalement invariant un polygone régulier à n sommets inscrit dans un cercle quelconque ; on obtiendra un groupe isomorphe.)



Si n est impair alors toute réflexion orthogonale dont l'axe relie un sommet au milieu du côté opposé est un élément de D_n ; si n est pair alors toute réflexion orthogonale dont l'axe est soit une diagonale, soit une médiane, est un élément de D_n . De toute façon, D_n contient exactement n réflexions distinctes. Puis, quelque soit la parité de n , D_n contient exactement n rotations distinctes. Ainsi, on trouve explicitement les $2n$ éléments distincts de D_n . L'ensemble de ces rotations

$$\mathcal{R}_n = \{R_\theta \mid \theta = k \frac{2\pi}{n} \text{ pour } 0 \leq k \leq n-1\}$$

est un sous-groupe (cyclique d'ordre n) de D_n . Si on note S pour une réflexion "au choix" dans D_n , alors aussi

$$\mathcal{S} = \{\text{id}, S\}$$

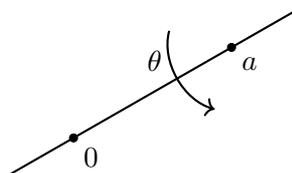
est un sous-groupe (cyclique d'ordre 2) de D_n . On vérifie sans difficulté que $D_n = \mathcal{R}_n \rtimes \mathcal{S}$; et en remplaçant ces sous-groupes cycliques "géométriques" par des groupes cycliques "abstraites" on peut définir "abstraitement" que $D_n = C_n \rtimes C_2$. Un grand nombre de propriétés intéressantes de D_n sont connues ; voir les références.

Exercice 3.5.32 (Sous-groupes finis de $O(2)$). Montrer que tout sous-groupe fini de $SO(2)$ est cyclique. En déduire que tout sous-groupe fini de $O(2)$ est soit un groupe cyclique, soit un groupe diédral (y compris les "cas dégénérés" pour $n = 1$ et $n = 2$). Ainsi, les seuls sous-groupes finis de $O(2)$ sont des groupes de symétries de polygones réguliers (hormis les cas dégénérés) !

Exercice 3.5.33 (Permutations d'une base orthonormale). Soit V un espace euclidien muni d'une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$. Montrer que toute permutation de ces vecteurs de base produit un élément de $O(V)$. Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, déterminer la nature géométrique de chaque permutation. Faire des dessins !

Exercice 3.5.34 (Rotation = 2 renversements). Soit V un espace euclidien de dimension 3. Montrer que $s: V \rightarrow V$ est une réflexion si et seulement si $-s: V \rightarrow V$ est un renversement (= symétrie orthogonale dont l'axe est une droite). Observer qu'un renversement est une rotation d'angle π . Conclure que toute rotation est la composée de deux rotations d'angle π (et préciser les axes). Faire un dessin !

Exercice 3.5.35 (Matrice d'isométrie linéaire donnée). Dans \mathbb{R}^3 , donner la représentation matricielle de la rotation



où $a = (1, 2, 1)$ et $\theta = \pi/6$. Donner aussi la matrice de la rotaflexion déterminée par ces données. (On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul.)

Exercice 3.5.36 (Isométrie linéaire de matrice orthogonale 3×3). Déterminer l'isométrie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: X \mapsto AX$ (pour la géométrie euclidienne usuelle) lorsque A est :

$$1. \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Attention : pour déterminer une rotation ou rotaflexion, il faut donner l'axe, l'angle et le sens ! (On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul.)

Exercice 3.5.37 (Un sous-groupe étonnant). Montrer que l'application

$$\phi: O(2) \rightarrow SO(3): M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix}$$

est un homomorphisme injectif de groupes. Ainsi $O(2)$ peut être identifié avec un sous-groupe de $SO(3)$ (et tout sous-groupe de $O(2)$ est aussi un sous-groupe de $SO(3)$). Interprétation géométrique des éléments de ce sous-groupe ?

Exercice 3.5.38 (Représenter une isométrie affine). Dans \mathbb{R}^3 , donner la représentation matricielle de la rotation



lorsque $a = (1, 0, 1)$, $b = (2, 2, 2)$ et $\theta = \pi/6$. Donner aussi la représentation matricielle de la rotaflexion déterminée par cette rotation suivie de la réflexion par le plan orthogonal passant par a . (On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul.)

Exercice 3.5.39 (Déterminer une isométrie affine). Donner le type, les éléments géométriques, et les points fixes de l'isométrie $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: X \mapsto AX + B$ (pour la géométrie usuelle de \mathbb{R}^3) lorsque A et B sont :

$$1. \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul.)

Exercice 3.5.40 (Tournée générale). Exprimer des conditions sur un triangle abc dans un plan euclidien V pour qu'il existe une isométrie envoyant a sur b , b sur c et c sur a . Montrer que cette isométrie est alors unique, et déterminer-la à l'aide de ses points fixes. Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel et de la base canonique, donner la description matricielle de cette isométrie lorsque $a = (0, 1)$, $b = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ et $c = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Exercice 3.5.41 (Hyperplan médiateur). L'hyperplan médiateur de deux points distincts a et b d'un espace euclidien V est l'unique hyperplan affine $H \subseteq V$ orthogonal à ab et passant par le milieu m de a et b . Montrer que H contient exactement les points équidistants à a et b . Indication : exprimer que $pm \perp ab$.

Exercice 3.5.42 (Repères affines congruents). Soient des repères affines $\{a_0, \dots, a_n\}$ et $\{b_0, \dots, b_n\}$ d'un espace euclidien V et notons $g: V \rightarrow V$ l'automorphisme affine déterminée par $g(a_i) = b_i$. Montrer que g est une isométrie si et seulement si $\text{dist}(a_i, a_j) = \text{dist}(b_i, b_j)$ pour tout $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Indication : généraliser la démonstration vue en L2 pour les isométries de \mathbb{R}^2 , en remplaçant des droites médiatrices par des hyperplans médiateurs.

Exercice 3.5.43 (Théorème de la médiane). Soit un parallélogramme $abcd$ dans un espace euclidien V . Montrer que

$$\text{dist}(a, b)^2 + \text{dist}(b, c)^2 + \text{dist}(c, d)^2 + \text{dist}(d, a)^2 = \text{dist}(a, c)^2 + \text{dist}(b, d)^2.$$

En déduire le *Théorème de la médiane* : dans tout triangle abc , si m est le milieu de bc alors

$$\text{dist}(a, b)^2 + \text{dist}(a, c)^2 = 2 \text{dist}(a, m)^2 + \frac{1}{2} \text{dist}(b, c)^2.$$

Conclure que abc est rectangle en a si et seulement si m est le centre du cercle circonscrit de abc .

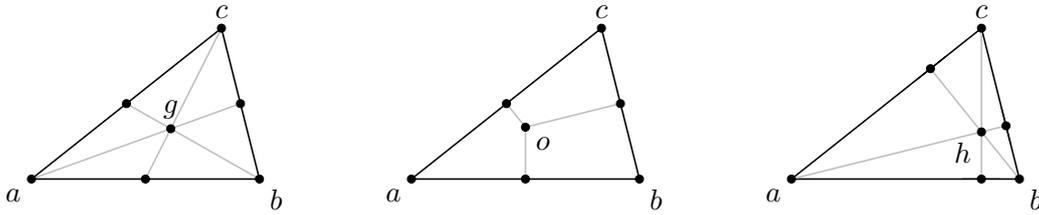
Exercice 3.5.44 (Forme canonique d'une isométrie). Soit un espace euclidien V . Pour $f \in O(V)$, montrer que $\ker(\text{id} - f) \perp \text{im}(\text{id} - f)$. En déduire que toute isométrie $g = t_a \circ f \in E(V)$ s'écrit de manière unique comme $g = t_b \circ (t_c \circ f \circ t_{-c})$ où $fb = b$. Autrement dit, on a $g = t_b \circ g'$ où g' est une application affine ayant un point fixe, et b un point fixe de la partie linéaire de g' (et de g). Montrer que b et g' sont uniques pour cette propriété, et que l'on a $t_b \circ g' = g' \circ t_b$. On appelle $g = t_b \circ g'$ la *forme canonique* de g .

Solution. Soit $x \in \ker(\text{id} - f)$ et $y \in \text{im}(\text{id} - f)$, c'est à dire, $x - fx = 0$ et $y = z - fz$ pour un certain $z \in V$. Alors $x \cdot y = x \cdot (z - fz) = x \cdot z - x \cdot fz = x \cdot z - fx \cdot fz = x \cdot z - x \cdot z = 0$ parce que f préserve le produit scalaire. Ainsi $x \perp y$ pour tout $x \in \ker(\text{id} - f)$ et $y \in \text{im}(\text{id} - f)$. Cela implique (par le Théorème du Rang) que ces sous-espaces vectoriels sont une décomposition orthogonale de V . Notons $F = \ker(\text{id} - f)$ pour le sous-espace des point fixes de f , et donc $F^\perp = \text{im}(\text{id} - f)$. Soit $g = t_a \circ f$, alors on peut décomposer $a = a_F + a_{F^\perp}$, avec $f(a_F) = a_F$ et $a_{F^\perp} = c - fc$ pour un certain $c \in V$, d'où $g = t_{a_F} \circ t_{a_{F^\perp}} \circ f = t_{a_F} \circ (t_c \circ f \circ t_{-c})$, comme voulu. Supposons maintenant que $g = t_{b_1} \circ (t_{c_1} \circ f_1 \circ t_{-c_1}) = t_{b_2} \circ (t_{c_2} \circ f_2 \circ t_{-c_2})$, et $f_1 b_1 = b_1$ et $f_2 b_2 = b_2$. Par unicité de partie linéaire et translation, on obtient $f = f_1 = f_2$ (et donc $f b_1 = b_1$ et $f b_2 = b_2$) et $b_1 + c_1 - f c_1 = b_2 + c_2 - f c_2$. Cette deuxième équation implique $b_1 - b_2 = (c_2 - c_1) - f(c_2 - c_1)$, et ceci est donc un élément de $\ker(\text{id} - f) \cap \text{im}(\text{id} - f)$, donc 0. Ainsi $b_1 = b_2$ et $c_1 - f(c_1) = c_2 - f(c_2)$, d'où aussi $(t_{c_1} \circ f_1 \circ t_{-c_1}) = (t_{c_2} \circ f_2 \circ t_{-c_2})$, comme annoncé. Finalement, si $g = t_b \circ (t_a \circ f)$ avec $fb = b$, alors on vérifie facilement que $t_b \circ (t_a \circ f) = t_a \circ t_b \circ f = t_a \circ t_{fb} \circ f = (t_a \circ f) \circ t_b$ par commutativité des translations. \square

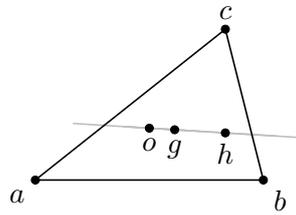
Exercice 3.5.45 (Dilatations d'un espace euclidien). Soit un espace euclidien V . Montrer que toute dilatation $d \in D(V)$ préserve les angles et envoie des sphères sur des sphères (et préciser l'effet sur le centre et le rayon). Quand est-ce que d est une isométrie ?

Exercice 3.5.46 (Droite d'Euler). Soit un triangle abc dans le plan \mathbb{R}^2 (avec sa géométrie euclidienne vue en L2) ; ainsi les trois *médiatrices* du triangle abc sont concourantes au centre o du cercle circonscrit. (C'est vrai dans un plan euclidien quelconque.) Sachant que toute homothétie préserve les angles (cf. l'exercice précédent), utiliser l'homothétie $abc \mapsto a'b'c'$ de centre g et rapport -2 (voir un exercice précédent) pour identifier les *hauteurs* de abc avec les *médiatrices*

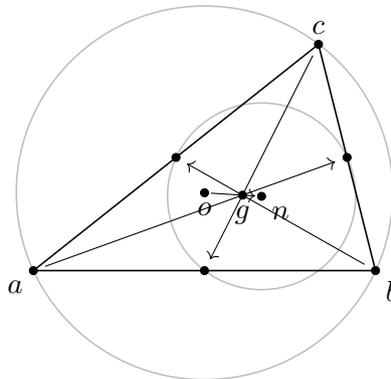
de $a'b'c'$ et en déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point h , appelé l'orthocentre.



Conclure que l'isobarycentre g , le centre o du cercle circonscrit et l'orthocentre h sont alignés (et donner leur rapport) : ces trois points se trouvent sur la droite d'Euler du triangle abc .

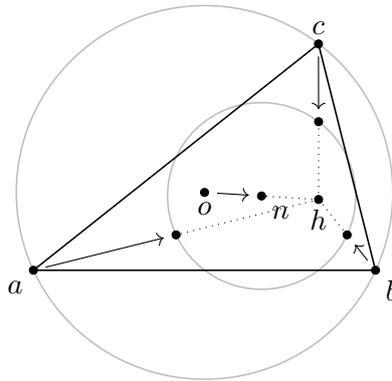


Exercice 3.5.47 (Cercle des neuf points). Soit un triangle abc dans le plan \mathbb{R}^2 (avec sa géométrie euclidienne vue en L2) et g son isobarycentre. Montrer que l'homothétie de centre g et rapport $-\frac{1}{2}$ (étudiée dans un exercice précédent) envoie le cercle circonscrit de abc (de centre o) sur un cercle passant par les trois milieux des côtés ; notons n pour le centre de ce cercle médian :

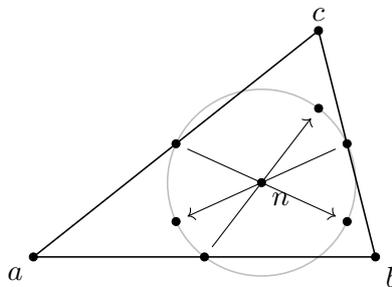


Observer que le rayon du cercle médian est la moitié du rayon du cercle circonscrit. Montrer qu'aussi l'homothétie de centre h et rapport $\frac{1}{2}$ envoie o sur n (utiliser les résultats d'un exercice

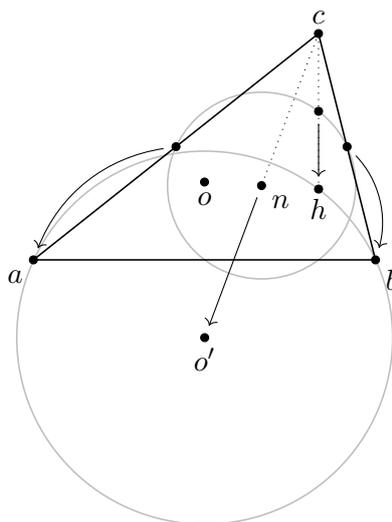
précédent), et ainsi le cercle circonscrit sur le cercle médian :



Par conséquent, le cercle médian passe aussi par les trois milieux des segments ha , hb et hc . En déduire que la symétrie centrale de centre n envoie les milieux de ab , bc et ac sur les milieux de hc , ha et hb :

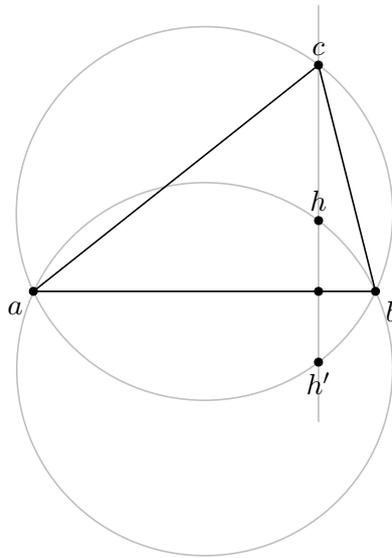


Montrer ensuite que l'homothétie de centre c et de rapport 2 envoie (par ce qui précède) le milieu de ch sur h , et donc le cercle médian sur un cercle passant par a , b et h .

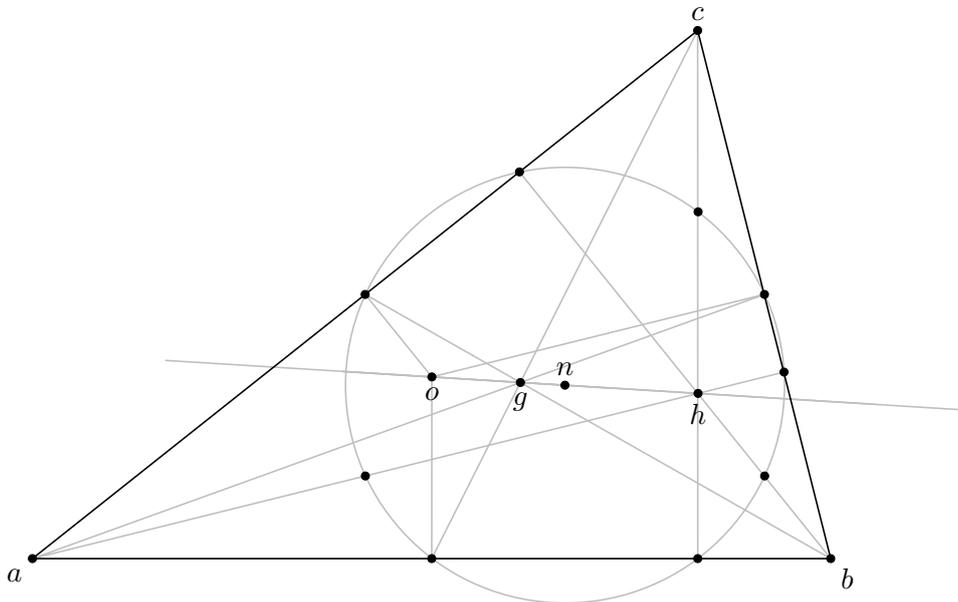


Finalement, montrer que la réflexion d'axe ab envoie ce dernier cercle sur le cercle circonscrit de

abc (on utilise que toute réflexion est une isométrie) :



Ainsi le pied de la hauteur de c sur ab est le milieu du segment hh' , et se trouve (par l'homothétie de centre h et rapport $\frac{1}{2}$) aussi sur le cercle médian ; et idem pour les deux autres hauteurs de abc . Somme toute, le centre n du cercle médian est sur la droite d'Euler, et le cercle médian passe par neuf points remarquables : on l'appelle le *cercle des neuf points* de abc .



Vérifier finalement que $[g, h; n, o] = -1$, encore une division harmonique !

Exercice 3.5.48 (Similitude linéaire—définition). Soit un espace euclidien V de dimension $n \geq 1$. Pour une application linéaire $f: V \rightarrow V$ non-constante, montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (a) (“ f multiplie les distances”) il existe $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ tel que $\|fx - fy\| = \lambda\|x - y\|$ pour tout $x, y \in V$,

- (b) il existe $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ tel que $\|fx\| = \lambda\|x\|$ pour tout $x \in V$,
- (c) il existe $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ tel que $\lambda^{-1}f \in O(V)$,
- (d) il existe $\kappa \in \mathbb{R}_0^+$ tel que $fx \cdot fy = \kappa(x \cdot y)$ pour tout $x, y \in V$,
- (e) (“ f préserve l’orthogonalité”) $x \cdot y = 0$ implique $fx \cdot fy = 0$ pour tout $x, y \in V$,
- (f) (“ f préserve les angles”) f est bijective²² et $\frac{fx \cdot fy}{\|fx\|\|fy\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$ pour tout $x, y \in V \setminus \{0\}$.

On dit alors que f est une *similitude (linéaire)* (et que $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ est son rapport).

Solution “analytique”. Les équivalences ($a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d$) sont faciles. Notons que l’on a $\lambda = \sqrt{\kappa}$ et $\ker(f) = \{0\}$. Ainsi (a, b, c, d) impliquent facilement (e) et (f). Puisqu’aussi ($f \Rightarrow e$) est évident, il suffit de montrer ($e \Rightarrow b$). Supposons donc que f est une application linéaire non-constante qui préserve l’orthogonalité. Si $x \cdot y \neq 0$ (et donc en particulier $x \neq 0 \neq y$) on pose

$$z = y - \frac{x \cdot y}{\|x\|^2}x$$

et alors

$$x \cdot z = x \cdot \left(y - \frac{x \cdot y}{\|x\|^2}x\right) = x \cdot y - \frac{x \cdot y}{\|x\|^2}(x \cdot x) = 0,$$

donc par hypothèse et par linéarité de f on peut vérifier que

$$0 = fx \cdot fz = fx \cdot f\left(y - \frac{x \cdot y}{\|x\|^2}x\right) = fx \cdot \left(fy - \frac{x \cdot y}{\|x\|^2}fx\right) = fx \cdot fy - \frac{x \cdot y}{\|x\|^2}(fx \cdot fx),$$

c’est à dire,

$$\frac{fx \cdot fy}{x \cdot y} = \frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}.$$

En échangeant x et y dans ce raisonnement, on trouve aussi

$$\frac{fx \cdot fy}{x \cdot y} = \frac{\|fy\|^2}{\|y\|^2},$$

et on peut conclure que, pour tout $x \cdot y \neq 0$,

$$\frac{\|fx\|}{\|x\|} = \frac{\|fy\|}{\|y\|}.$$

Si $x \neq 0 \neq y$ mais $x \cdot y = 0$, alors $x \cdot (x + y) \neq 0$ et $y \cdot (x + y) \neq 0$ (et donc $x + y \neq 0$), et par l’argument ci-dessus on a

$$\frac{\|fx\|}{\|x\|} = \frac{\|f(x + y)\|}{\|x + y\|} = \frac{\|fy\|}{\|y\|}.$$

Somme toute, puisque $f \neq 0$ par hypothèse, on a une fonction constante

$$V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto \frac{\|fx\|}{\|x\|},$$

c’est à dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ tel que $\|fx\| = \lambda\|x\|$ pour tout $x \neq 0$ dans V ; et cette condition est bien sûr aussi satisfaite pour $x = 0$. On a donc montré (b). \square

22. Cette condition assure que $fx \neq 0$ si $x \neq 0$, et on peut donc avoir $\|fx\|$ dans le dénominateur.

Exercice 3.5.49 (Groupe des similitudes linéaires). Soit un espace euclidien V de dimension $n \geq 1$. Montrer que l'ensemble $S(V)$ des similitudes linéaires est un sous-groupe de $GL(V)$, et contient $O(V)$ comme sous-groupe (une isométrie étant une similitude de rapport 1). Montrer que l'application

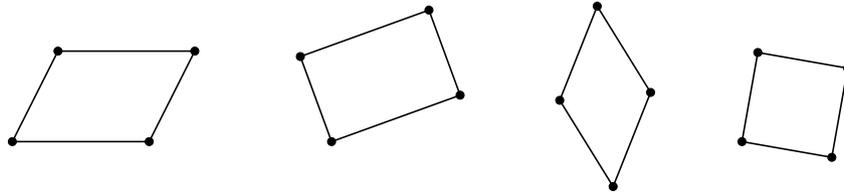
$$S(V) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \times O(V): f \mapsto (\lambda, \lambda^{-1}f)$$

(où λ est le rapport de f) est un isomorphisme de groupes (pour la multiplication sur \mathbb{R}_0^+). Montrer que l'application

$$H(V) \rightarrow S(V): \lambda \text{id} \mapsto |\lambda|(\text{sgn}(\lambda)\text{id})$$

est un homomorphisme injectif de groupes. (Ainsi une homothétie linéaire de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_0$ est une similitude linéaire de rapport $|\lambda|$.)

Exercice 3.5.50 (Rectangles, losanges, carrés). On travaille dans un espace euclidien V . On dit qu'un parallélogramme $abcd$ est un *rectangle* si ses quatre angles sont droits, un *losange* si ses quatre côtés sont de même longueur, et un *carré* si c'est à la fois un rectangle et un losange.

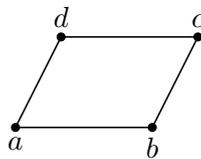


Montrer qu'un parallélogramme $abcd$ est

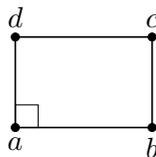
- (a) un rectangle si et seulement si un angle est droit,
- (b) un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales,
- (c) un carré si et seulement si un angle est droit et ses diagonales sont orthogonales.

(Indication : utiliser les différentes caractérisations d'un parallélogramme, vues dans un exercice du premier chapitre.)

Solution. Dans un parallélogramme $abcd$ on a,

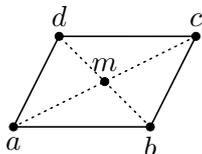


par un exercice d'un chapitre précédent, que $a - d = b - c$ et $a - b = d - c$. Ainsi, si (par exemple) l'angle en a est droit,



alors de $(b - a) \cdot (d - a) = 0$ on obtient également $(b - a) \cdot (c - b) = 0$, $(c - d) \cdot (d - a) = 0$ et $(c - d) \cdot (c - b) = 0$; c'est à dire, les trois autres angles sont aussi droits. Par ailleurs, toujours dans

ce même exercice d'un chapitre précédent, on a vu que les diagonales dans un parallélogramme $abcd$ se coupent en leur milieu.



C'est à dire, on a toujours $\|b - m\| = \|d - m\|$ et aussi $b - m = -(d - m)$ (et de même pour les autres demi-diagonales). Mais (pour tout parallélogramme) on vérifie aussi facilement que

$$\|a - b\|^2 = \|a - m\|^2 - 2(a - m) \cdot (b - m) + \|b - m\|^2$$

et de même

$$\|a - d\|^2 = \|a - m\|^2 - 2(a - m) \cdot (d - m) + \|d - m\|^2.$$

Si maintenant les diagonales sont orthogonales, c'est à dire $(a - m)(b - m) = 0 = (a - m)(d - m)$, alors on obtient $\|a - b\| = \|a - d\|$ (et on répète l'argument pour les autres côtés). (Ceci est, en gros, le Théorème de Pythagoras.) Réciproquement, si $\|a - b\| = \|a - d\|$, alors on déduit que

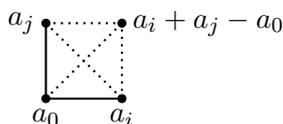
$$(a - m) \cdot (b - m) = (a - m) \cdot (d - m) = (a - m)(-(b - m)),$$

et cela implique que ce produit scalaire est nul, donc que les diagonales sont orthogonales. \square

Exercice 3.5.51 (Similitudes affines). Soit V un espace euclidien, et $g \in GA(V)$ un automorphisme affine. Montrer l'équivalence de :

- (a) $g = tf$ avec $t \in T(V)$ et f une similitude linéaire,
- (b) g préserve les angles,
- (c) g préserve l'orthogonalité,
- (d) $g = hg'$ avec h une homothétie (affine) et g' une isométrie (affine),
- (e) g multiplie les distances par un facteur $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

Solution "géométrique". Les implications $(a \Rightarrow b \Rightarrow c)$ et $(d \Rightarrow a)$ ainsi que l'équivalence $(d \Leftrightarrow e)$ sont triviales. Pour $(c \Rightarrow d)$, soit un repère affine orthonormale $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ de V , alors tout triple $a_0 a_i a_j$ définit un (unique) carré :



Par un exercice précédent, on sait qu'il s'agit de parallélogrammes dont les côtés et les diagonales sont perpendiculaires. Si g est un automorphisme affine préservant l'orthogonalité, alors g envoie ces carrés sur des (vrais) carrés ayant deux-à-deux un côté commun : ainsi les vecteurs $(ga_i - ga_0)_{i \neq 0}$ sont de même longueur, disons de longueur $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$, et deux-à-deux orthogonaux. Autrement dit, l'automorphisme affine $g' := h_{ga_0, \lambda^{-1}} g$ (où $h_{ga_0, \lambda^{-1}} = t_{ga_0} \circ (\lambda^{-1} \text{id}) \circ t_{-ga_0}$ est l'homothétie affine de centre g_0 et de rapport λ^{-1}) envoie un repère affine orthonormale sur un repère affine orthonormale, et est donc une isométrie affine. \square

Références

- Emil Artin, *Geometric algebra*, Interscience Publishers New York, 1957.
- Francis Borceux, *Invitation à la Géométrie*, CIACO Louvain-la-Neuve, 1985.
- Francis Borceux, *Geometric trilogy* (3 volumes), Springer Cham, 2014.
- Jean Freisnel, *Methodes modernes en géométrie*, Hermann, 1998.
- Dominique Bourn, *Traité de géométrie affine*, Ellipses, 2012.
- Felix Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, Verlag A. Deichert, 1872.
- August Ferdinand Möbius, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig, Verlag J. A. Barth, 1827.
- Claude Tisseron, *Géométries affines, projectives, euclidiennes*, Hermann, 1994.
- Hermann Weyl, *The classical groups*, Princeton University Press, 1966.

