Géométrie affine en L3 Mathématiques à l'ULCO

Examen du 28 mai 2026 de 13h30 à 16h30

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrice.

Dans ce sujet, tout espace vectoriel est supposé de dimension finie sur un corps K.

4 1. Soit V un espace vectoriel.

1 (a) Définir 'repère affine' d'un sous-espace affine $A \subseteq V$.

1 (b) Montrer que, si $\{a_0, ..., a_k\}$ est un repère affine de A, alors tout $x \in A$ s'écrit d'*au plus une façon* comme barycentre des points $a_0, ..., a_k$.

Maintenant on pose $V = \mathbb{R}^3$.

1 (c) Montrer que $(-1, 2, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(-1, 0, -1)$ est un repère affine de $\mathbb{R}^3$.

1 (d) Calculer les coordonnées barycentriques de $(2, 1, 1)$ relativement à ce repère.

2. Soit une application affine $g\colon V \to W$ entre espaces vectoriels.

3 1 (a) Montrer que l'image par g d'un sous-espace affine de V est un sous-espace affine de W.

1 (b) Montrer que l'image par g d'une paire d'espaces affines *parallèles* de V est une paire d'espaces affines *parallèles* de W.

1 (c) Donner un exemple d'une application affine g envoyant une paire de sous-espaces affines *non-parallèles* de V sur une paire de sous-espaces affines *parallèles* de W. (Préciser les espaces V et W ainsi que l'action de g.)

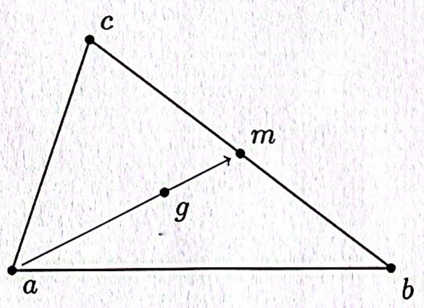
3. Soit V un espace vectoriel.

6 1 (a) Définir 'dilatation' $d \in D(V)$.

1 (b) Donner (sans démonstration) la classification des dilatations selon leurs points fixes.

2 (c) Pour $u, v, w \in V$ trois points distincts et alignés, montrer qu'il existe une unique dilatation d telle que $d(u) = u$ et $d(v) = w$. (Attention: démontrer l'*existence* 1 et l'*unicité* 1!)

On suppose maintenant que $\mathrm{car}(K) \notin \{2, 3\}$. Soit un triangle abc dans V, et notons par g son isobarycentre. Soit la dilatation $d \in D(V)$ de centre g et envoyant a sur le milieu m du côté opposé.



1 (d) Si $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$ en coordonnées barycentriques, donner $d(x)$ en coordonnées barycentriques.

1 (e) Calculer $d(b)$, $d(c)$ et $d(m)$, puis situer géométriquement ces points.

(*suite au verso*)

1a. cours

b. cours

c. $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $d = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

est repère affine de $\mathbb{R}^3$ ssi

$\{b-a, c-a, d-a\}$ est base, ssi

$$\det \left(b-a \,\middle|\, c-a \,\middle|\, d-a \right) \neq 0$$

(et on vérifie par un calcul que $\det = 2$)

d. on cherche l'unique solⁿ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ à

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \right)$$

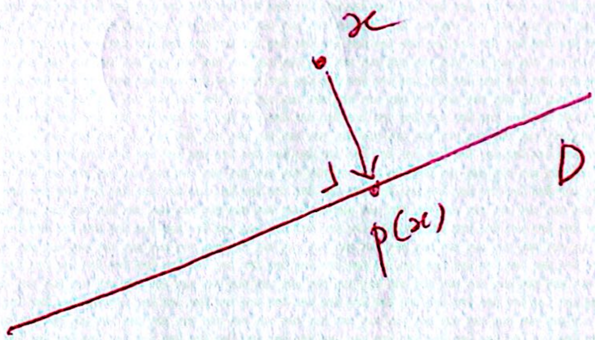
et on trouve $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-3, 7, -2, -1)$.

2 a. cours

b. cours.

c. une projection orthogonale affine $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

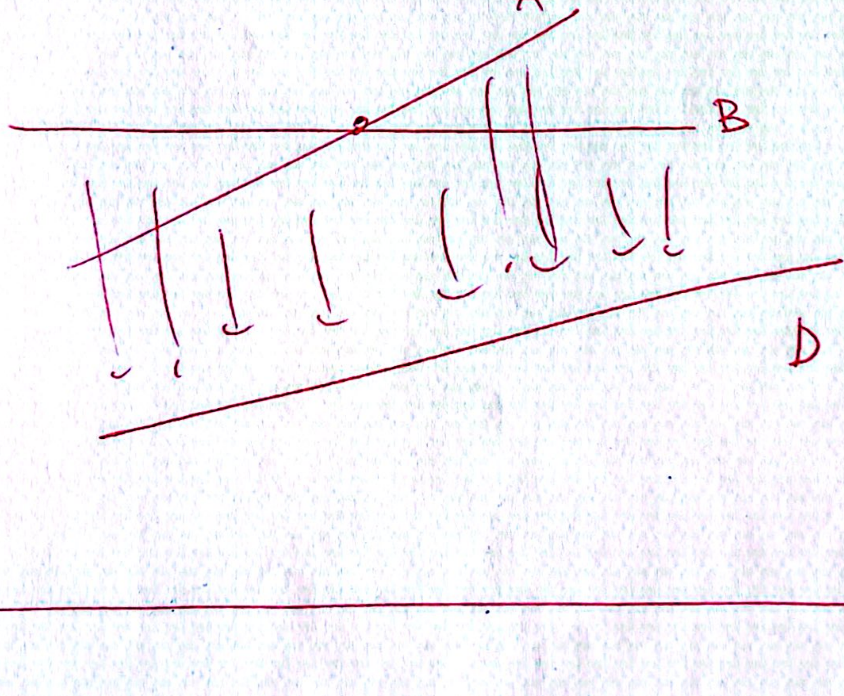
du plan (sur une droite affine),



envoie toute paire de droites

non-orth. à D sur D, et donc

sur une paire de droites parall :



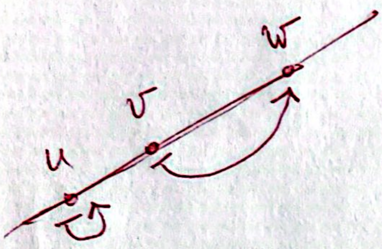
$D = p(A) = p(B)$

3a cours

b cours

c cours

<u>existence</u> : homothétie de centre u et rapport $\lambda := \dfrac{w-u}{v-u}$,



i.e. $d(x) = \lambda(x-u)+u$

où $\lambda \in K$ est l'unique scalaire tq. $\lambda(v-u) = w-u$

<u>unicité</u> : si d' est une dilatation tq. $d'(u)=u$ et $d'(v)=w$, alors $d^{-1}\circ d'$ est une dilatation ayant au moins deux pts fixes, donc c'est id, donc $d = d'$.

d $\quad d(x) = \lambda.(x-g)+g$

où $\lambda \in K$ est l'unique scalaire tel que

$$\lambda = \frac{m-g}{a-g}$$

$$\iff \lambda(a-g) = m-g$$

$$\iff \lambda\left(a - \frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{3}$$

$$\iff \lambda = -\frac{1}{2}$$

donc

$$d(\alpha a+\beta b+\gamma c) = -\frac{1}{2}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)a+\left(\beta-\frac{1}{3}\right)b+\left(\gamma-\frac{1}{3}\right)c\right) + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$= \frac{1-\alpha}{2}a + \frac{1-\beta}{2}b + \frac{1-\gamma}{2}c$$

e. $$d(b) = \frac{a+c}{2} = \text{milieu du segment } ac$$

$$d(c) = \frac{a+b}{2} = \text{milieu du segment } ab$$

$$d(m) = d\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right) \underset{\begin{pmatrix}\alpha = 0\\ \beta = \frac{1}{2}\\ \gamma = \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{=} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{a+m}{2}$$

= milieu du segment am.

4. a cours

b notons $M = \begin{pmatrix} 15/25 & -20/25 & 0 \\ 12/25 & 9/25 & -20/25 \\ 16/25 & 12/25 & 15/25 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot5/5^2 & -4\cdot5/5^2 & 0 \\ 3\cdot4/5^2 & 3\cdot3/5^2 & -4\cdot5/5^2 \\ 4\cdot4/5^2 & 3\cdot4/5^2 & 3\cdot5/5^2 \end{pmatrix}$

alors $M^t M = I$ donc $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$

c. • $\det(M) = 1$ donc rotation

• $tr(M) = \frac{39}{25}$ donc $\cos\theta = \frac{tr(M)-1}{2} = 0.28$

donc (selon tableau) $\theta \approx 73°$

• esp. propre de val. propre $\lambda = 1$: $\operatorname{Ker}(M - I)$

$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -10/25 & -20/25 & 0 \\ 12/25 & -16/25 & -20/25 \\ 16/25 & 12/25 & -10/25 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc axe de rotation est $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = M\cdot v = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

(dir. de l'axe) (ainsi $v \perp u$)

alors $\det(u, v, w) > 0$ donc anti-horlogique

("vue par u")