Géométrie affine en L3 Mathématiques à l'ULCO: examen du 13 mai 2025 de 13h30 à 16h30

Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrice.

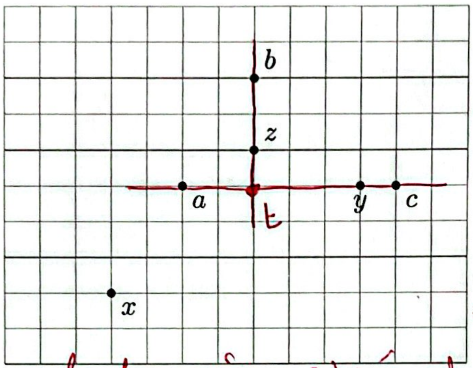
1. Soit un espace vectoriel V sur un corps K.
   (a) Donner la définition de 'partie affinement libre' $\{a_0, ..., a_k\} \subseteq V$.
   (b) Montrer que, si $\{a_0, ..., a_k\} \subseteq V$ est une partie affinement libre, alors tout $x \in \langle a_0, ..., a_k \rangle$ s'écrit d'au plus une manière comme un barycentre des a_i's.
   (c) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ (avec sa géométrie euclidienne habituelle), exprimer les points x, y et z comme barycentre des points a, b et c dans la situation suivante:

$a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}b$

$\Rightarrow x = 2a - b$

$y - c = \frac{1}{6}(a - c)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{6}a + \frac{5}{6}b.$



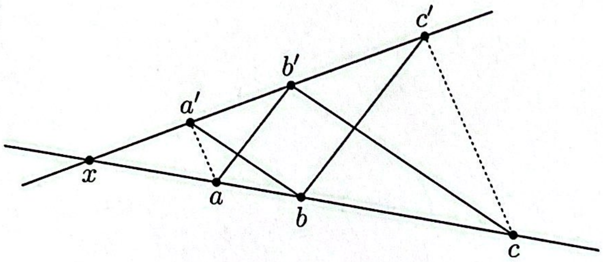
$z = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}t$

$= \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c\right)$

$= \frac{4}{9}a + \frac{1}{3}b + \frac{2}{9}c$

(Solution alternative : calculer aires signées de triangles, etc.)

2. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K.
   (a) Donner la définition de 'dilatation' $d \in D(V)$.
   (b) Montrer qu'une dilatation envoie toute droite de V sur une droite parallèle.
   (c) Donner (sans démonstration) la classification des dilatations selon leurs points fixes.
   (d) Soient deux droites affines distinctes sécantes en un point x dans V, et trois points distincts sur chaque droite, disons a, b, c et a', b', c', qui sont aussi distincts du point x. Montrer que, si $ab' \parallel bc'$ et $a'b \parallel b'c$, alors aussi $aa' \parallel cc'$.



   (e) Pour $V = \mathbb{R}^3$ et $K = \mathbb{R}$, existe-t-il une dilatation $d \in D(V)$ telle que $d(-2, 1, 3) = (-2, 1, 3)$ et $d(1, 1, 0) = (4, -1, 2)$? Si oui, donner-la; sinon, expliquer pourquoi pas.

NON, pas possible, car : d est nécessairement une homothétie affine, mais les points $(-2,1,3)$, $(1,1,0)$, $(4,-1,2)$ ne sont pas alignés ! (autres raisonnements possibles.)

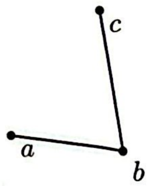
(suite au verso)

3. Soit V un espace euclidien.

   (a) Définir les groupes $O(V)$ et $E(V)$, et exprimer leur relation (sans démonstration).

   (b) Montrer que tout $f \in O(V)$ preséserve le produit scalaire.

   (c) Définir 'angle (non-orienté)' $\measuredangle abc$ pour trois points $a, b, c \in V$.



   (d) Montrer que tout $g \in E(V)$ préserve les angles.

4. Soit l'application linéaire

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ avec sa géométrie euclidienne usuelle.

   (a) Montrer que $f \in O(\mathbb{R}^3)$.

   (b) Déterminer le type et les éléments géométriques de f.

——— *fin* ———

(a) notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^t . A = I$

donc $A \in O(3)$, donc $f \in O(\mathbb{R}^3)$

(b) $\det(A) = 1$ donc <u>rotation</u> ;

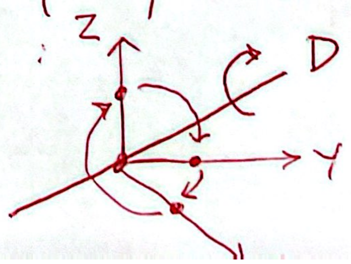
$\underset{1+2\cos\theta}{\underset{\parallel}{\mathrm{tr}(A)}} = 0$ donc $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$; = <u>angle</u>,

$\mathrm{Ker}(A - I) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc axe $D = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ = <u>axe</u>,

pour $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $c = A.b = \begin{pmatrix} -1 \\ +0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a $\det(a|b|c) = -3 < 0$, donc <u>horlogique</u>

[en fait, il s'agit de la rotation qui permute les vecteurs de la base canonique :



]