Exercices supplémentaires en géométrie (1): Equation paramétrique, équation cartésienne

Responsable: Isar Stubbe

Exercice 1 (Equations cartésiennes). Parmi les ensembles donnés ci-dessous, déterminer les (sous-)espaces affines: le cas échéant, donner une présentation paramétrique ainsi que des équations cartésiennes (par rapport à la base canonique de l'espace enveloppant), puis indiquer sa direction et un point de passage (et en déduire sa dimension).

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x-7y=0=5x+3y\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$
4. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-x+2y=0 \text{ ou } 3x+3y=3\}$
5. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=2y=3z+t-1\}$
6. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9x-y+7z=-1\}$
7. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+5y+z=1 \text{ et } 2x-z=4 \text{ et } x+5y=5\}$
8. $D=\mathbb{R}(1,2,3)+(4,5,6)$
9. $P=\mathbb{R}(1,1,0)+\mathbb{R}(-1,0,1)+(2,2,4)$
10. $\{P \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid P(0)=P(1)\}$
11. $\{P \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid P'(1)=0\}$
12. $\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \mathrm{tr}(M)=1\}$
13. $\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(M)=0\}$
14. $\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid M \text{ est diagonale}\}$

Exercice 2 (Equations cartésiennes et intersections). Dans $\mathbb{R}^3$, donner une présentation paramétrique ainsi que des équations cartésiennes des sous-espaces affines suivants (par rapport à la base canonique):

1. la droite D passant par les points $(0,1,1)$ et $(-1,2,2)$,
2. le plan P_1 passant par le point $(0,-3,1)$ et parallèle au plan d'équation $3x-y+5z=7$,
3. le plan P_2 contenant le point $(-2,7,0)$ et la droite $\mathbb{R}(6,-5,1)+(0,1,2)$.

Déterminer ensuite les intersections $D\cap P_1$, $D\cap P_2$, $P_1\cap P_2$ et $D\cap P_1\cap P_2$.

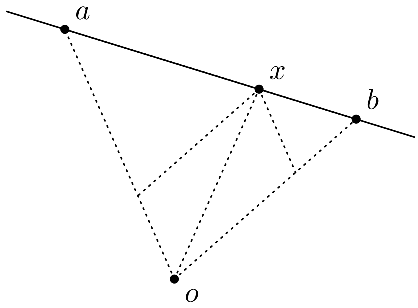
Exercice 3 (Intersections de sous-espaces affines). Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les (sous-)espaces affines suivants:

$$A=\mathbb{R}(2,3,-2)+(1,0,0) \qquad B:\begin{pmatrix}1 & 6 & -2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$C=\mathbb{R}(1,1,1)+\mathbb{R}(2,0,-2)+(5,2,1) \qquad D: 2x+3y-2z=6.$$

Déterminer les intersections $A\cap B$, $A\cap C$, $A\cap D$, etc. Y a-t-il dans cette liste des sous-espaces affines *supplémentaires*?

Exercice 1 (Barycentres—sur une droite dans le plan réel). Soit une droite affine ab passant par deux points distincts a et b du plan $\mathbb{R}^2$, que l'on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2. Tout point de la droite s'écrit donc par un barycentre $x = \alpha a + \beta b$, et on veut calculer ses poids α et β. Pour cela, considérons d'abord un point x situé entre a et b, puis les triangles formés à l'aide de l'origine o (que l'on suppose en dehors de la droite ab) et des segments parallèles:

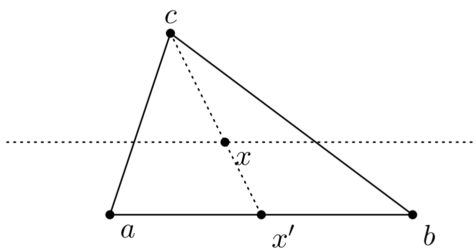


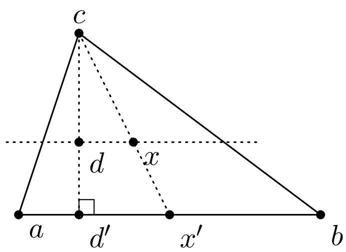
Utiliser le Théorème de Thales pour montrer qu'alors

$$\alpha = \frac{\text{distance } bx}{\text{distance } ab} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\text{distance } ax}{\text{distance } ab}$$

Modifier l'argument pour décrire *tous* les points de ab, en introduisant des *distances signées.* (Ce résultat est en fait valable dans tout *espace euclidien.*)

Exercice 2 (Barycentres—dans le plan réel). Soit un triangle abc dans le plan $\mathbb{R}^2$, que l'on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2. Tout point $x \in \mathbb{R}^2$ s'écrit alors de manière unique comme un barycentre $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$, et on veut déterminer les coefficients α, β et γ. Considérer d'abord un point x à l'intérieur du triangle abc, et montrer que tout point de la droite parallèle à ab et passant par x à le même coefficient γ:





(Indication: exprimer x comme barycentre de c et x' puis utiliser le Théorème de Thales.) En abaissant une droite perpendiculaire de c sur ab, en déduire que

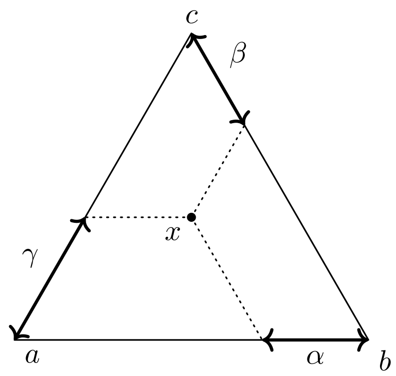
$$\gamma = \frac{\text{aire } abd}{\text{aire } abc} = \frac{\text{aire } abx}{\text{aire } abc},$$

puis conclure "en répétant l'argument" par

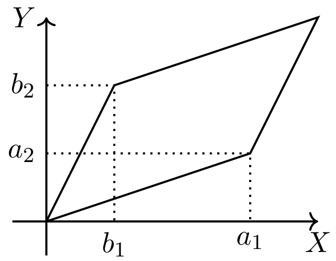
$$\alpha = \frac{\text{aire } xbc}{\text{aire } abc} \qquad \beta = \frac{\text{aire } axc}{\text{aire } abc} \qquad \gamma = \frac{\text{aire } abx}{\text{aire } abc}.$$

Généraliser pour un point quelconque du plan, avec des coordonnées barycentriques éventuellement négatives, en introduisant la notion d'*aire signée* d'un triangle. (Ce résultat est en fait valable dans tout *espace euclidien.*)

Exercice 3 (Barycentres—dans le plan réel (2)). Dans $\mathbb{R}^2$ (que l'on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2), montrer que les coordonnées homogènes $(\alpha : \beta : \gamma)$ d'un point x à l'intérieur d'un triangle *équilatéral* abc sont données par les longueurs indiquées ci-dessous:



Exercice 4 (Barycentres—dans le plan réel (3)). Dans $\mathbb{R}^2$ (que l'on considère avec sa géométrie euclidienne vue en L2), montrer que l'aire signée du parallélogramme ci-dessous est donnée par $\det\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$:



En déduire une formule pour l'aire signée d'un triangle quelconque abc dans $\mathbb{R}^2$, de sommets $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ et $c = (c_1, c_2)$. Conclure que, par rapport à ce triangle abc, tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a pour coordonnées homogènes

$$\left(\det \begin{pmatrix} b_1 - x_1 & c_1 - x_1 \\ b_2 - x_2 & c_2 - x_2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} c_1 - x_1 & a_1 - x_1 \\ c_2 - x_2 & a_2 - x_2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a_1 - x_1 & b_1 - x_1 \\ a_2 - x_2 & b_2 - x_2 \end{pmatrix} \right),$$

ou, de manière équivalente,

$$\left(\det \begin{pmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & c_1 \\ a_2 & x_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Formuler un critère (par un calcul de déterminants) pour vérifier si un point $x \in \mathbb{R}^2$ est inclus ou non dans un triangle abc de sommets donnés. (Ceci a d'importantes applications en robotique (par exemple, pour positionner un robot dans l'espace), en graphisme informatique (images de synthèse, rendu de surfaces), etc.)

Exercices supplémentaires en géométrie (3): Barycentres, repères affines

Responsable: Isar Stubbe

Exercice 1 (Sous-espace engendré). Déterminer le sous-espace affine $\{(r-s+t, r+2t, -s-t) \in \mathbb{R}^3 \mid r+s+t=1\}$.

Exercice 2 (Famille affinement libre). Pour les ensembles de points suivants, dire s'ils sont affinement libres et déterminer le sous-espace affine engendré:

1. $\{(3,1),(1,3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
2. $\{(3,1),(1,3),(0,8)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
3. $\{(0,0),(3,1),(1,3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
4. $\{(5,5,3),(1,4,7),(2,-5,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
5. $\{(1,2,2),(6,7,1),(-11,-7,4)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
6. $\{(2,3,5),(4,1,6),(2,8,4),(4,6,5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Exercice 3 (Repère affine). Donner un repère affine pour les sous-espace affines suivants:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$
2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9x-y+7z=-1\}$
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+5y+z=1 \text{ et } 2x-z=4\}$
4. $D = \mathbb{R}(1,2,3)+(4,5,6)$
5. $P = \mathbb{R}(1,1,0)+\mathbb{R}(-1,0,1)+(2,2,4)$
6. $\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \mathrm{tr}(M)=1\}$

Exercice 4 (Coordonnées barycentriques dans $\mathbb{R}^2$). Etant donné trois points distincts et non-alignés a, b et c dans $\mathbb{R}^2$, placer les (ensembles de) points suivants:

1. $d = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$
2. $e = 2a - b$
3. $f = 0a + b$
4. $\{x = \alpha a + \beta b \mid \alpha+\beta=1, \alpha > 1\}$
5. $g = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{2}{3}c$
6. $h = -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}b - c$
7. $i = 2a + b - 2c$
8. $\{x = \alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha+\beta+\gamma=1, \alpha+\beta > 1\}$

Exercice 5 (Repère affine de $\mathbb{R}^2$). Donner les coordonnées barycentriques d'un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dans les repères affines suivants:

1. $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$
2. $\{(-1,1),(1,0),(0,1)\}$
3. $\{(1,4),(-2,2),(-5,0)\}$

Exercice 6 (Repère affine de $\mathbb{R}^3$). Pour chacun des points $a = (0,0,0)$, $b = (3,9,2)$ et $c = (2, \frac{1}{4}, 2)$ de $\mathbb{R}^3$, dire s'il est dans le sous-espace affine $\langle (2,3,1),(3,4,6),(0,-4,-5) \rangle$, et donner alors ses coordonnées barycentriques.

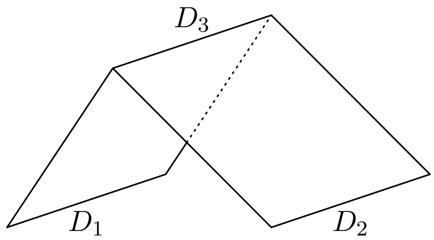
Exercices supplémentaires en géométrie (4): Exemples géométriques

Responsable: Isar Stubbe

Ce dessin créé avec Géogébra peut vous aider à visualiser les coordonnées barycentriques dans $\mathbb{R}^2$: `https://www.geogebra.org/calculator/ugqh8xx7`

Exercice 1 (Droite dans un plan). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, dans K^3, la droite affine de direction $K(u, v, w)$ passant par le point $(1, 1, 1)$ soit un sous-espace affine du plan d'équation $ax + by + cz = d$.

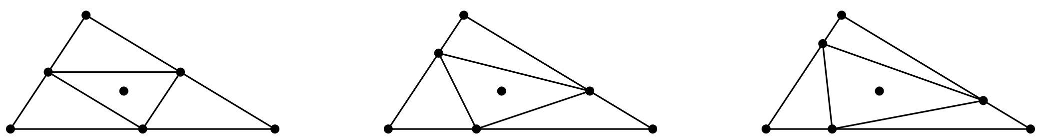
Exercice 2 (Théorème du toit). Dans un espace affine de dimension 3, montrer que si deux plans affines non-parallèles P_1 et P_2 contiennent respectivement deux droites parallèles D_1 et D_2, alors l'intersection $D_3 = P_1 \cap P_2$ est un droite affine parallèle à D_1 et à D_2.



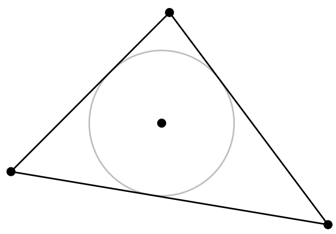
Exercice 3 (Déterminer un plan). Dans un espace affine quelconque, montrer que deux droites affines distinctes parallèles ou sécantes sont contenues dans un et un seul plan affine. Et si ces droites ne sont ni parrallèles, ni sécantes?

Exercice 4 (Théorème du toit—généralisation). Dans un espace affine de dimension 3, soient P_1, P_2 et P_3 trois plans deux à deux non-parallèles. Montrer que les droites d'intersections $D_1 = P_2 \cap P_3$, $D_2 = P_3 \cap P_1$ et $D_3 = P_1 \cap P_2$ sont parallèles ou concourantes.

Exercice 5 (Isobarycentre). Soit un triangle abc dans un plan affine sur un corps K tel que $\mathrm{car}(K) \notin \{2, 3\}$. Montrer que l'isobarycentre de abc est également l'isobarycentre du triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de abc. Généraliser cet énoncé en remplaçant "milieu des côtés" par une expression barycentrique adéquate.



Exercice 6 (Centre du cercle inscrit). Pour un triangle abc dans $\mathbb{R}^2$ (avec sa géométrie euclidienne usuelle), exprimer le centre de son cercle inscrit comme un barycentre.



Exercices supplémentaires en géométrie (5): Exemples d'applications affines

Responsable: Isar Stubbe

Exercice 1 (Déterminer une application affine). Pour les applications suivantes, déterminer si ce sont des applications affines. Si c'est le cas, les écrire sous la forme $g = t \circ f$ avec t une translation et f une application linéaire. Identifier les automorphismes affines.

1. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y+1 \\ -2x-y+2 \end{pmatrix}$
2. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x-2y-3 \\ -6x+3y-6 \end{pmatrix}$
3. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x-y+2 \\ x-y-1 \end{pmatrix}$
4. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y+5 \\ 3x-2 \end{pmatrix}$
5. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y+5 \\ 3x-2 \\ 3x+1 \end{pmatrix}$
6. $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x+y+z+1 \\ x+y-2z-1 \end{pmatrix}$
7. $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x+y+z+1 \\ x-2y+z+1 \\ x+y-2z-1 \end{pmatrix}$
8. $g\colon V \to V\colon x \mapsto a$, pour un point $a \in V$ fixé.
9. $g\colon V \to V\colon x \mapsto$ (milieu de ax), pour un point $a \in V$ fixé.
10. $g\colon V \to V\colon x \mapsto$ (barycentre de $(a, \frac{1}{4})$, $(b\frac{1}{2})$, $(x, \frac{1}{4})$), pour deux points $a, b \in V$ fixés.

Exercice 2 (Trouver une application affine). Les informations ci-dessous permettent-elles de déterminer une (unique) application affine $g = t \circ f$?

1. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(0,1) = (0,1)$ et g n'a pas d'autre point fixe.
2. $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(0,1,0) = (0,2,0)$ et g n'a aucun point fixe.
3. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, les seuls points fixes de g sont $(0,0)$ et $(1,1)$.
4. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(0,0) = (1,3)$, $g(1,3) = (3,1)$, $g(3,1) = (0,0)$.
5. $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(0,0,0) = (1,2,3)$, $g(0,1,2) = (1,4,6)$, $g(1,0,2) = (1,3,5)$.

Exercices supplémentaires en géométrie (6): A propos du groupe affine

Responsable: Isar Stubbe

Exercice 1 (Homothéties linéaires et affines). Montrer que $f \in GL(V)$ est une homothétie (linéaire) si et seulement si f envoie toute droite vectorielle sur elle-même. Montrer que $g \in GA(V)$ est une homothétie (affine) de centre c si et seulement si g fixe le point c et g envoie toute droite affine passant par c sur elle-même. (Si $\dim(V) \geq 2$ alors la condition que g fixe le point c suit de la condition que g envoie toute toute droite affine passant par c sur elle-même: il suffit de considérer deux droites distinctes passant par c.) Montrer qu'une homothétie affine de rapport $\lambda \neq 1$ envoie une droite affine sur elle-même si et seulement si cette droite contient le centre de l'homothétie.

Exercice 2 (Sous-groupe linéaire implique sous-groupe affine). Soit un espace vectoriel V et $G \leq GL(V)$ un sous-groupe donné (autrement dit, G est un groupe linéaire). Montrer que $T(V) \rtimes G := \{g = t \circ f \mid t \in T(V), f \in G\}$ est un sous-groupe de $GA(V) = T(V) \rtimes GL(V)$. Observer que l'on a une "sous-suite" exacte courte scindée (par l'inclusion évidente)

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & T(V) \rtimes G \arrow[r, two heads, shift right] \arrow[d, tail] & G \arrow[l, tail, shift right] \arrow[d, tail] \\
T(V) \arrow[r, tail] & GA(V) \arrow[r, two heads, shift right] & GL(V) \arrow[l, tail, shift right]
\end{tikzcd}$$

Observer que $T(V) \rtimes G$ est un groupe linéaire (attention aux dimensions!). Repérer les exemples de cette construction générale dans le cours.

Exercice 3 (Points fixes (1)). Montrer que $a \in V$ est un point fixe d'un endomorphisme affine $g\colon V \to V$ si et seulement s'il existe un endomorphisme linéaire $f\colon V \to V$ tel que $g = t_a f t_{-a}$. En déduire que l'ensemble des automorphismes affines de V fixant $a \in V$ est un sous-groupe de $GA(V)$.

Exercice 4 (Points fixes (2)). Soit un endomorphisme affine $g\colon V \to V$. Montrer que l'ensemble des points fixes de $g = t \circ f$ est un sous-espace affine, dont la direction est l'ensemble des points fixes de f.

Exercice 5 (Conjugués et commutants d'une translation). Etant donné une translation $t \in T(V) \subseteq GA(V)$, décrire ses conjugués (gtg^{-1}) et ses commutants ($gt = tg$) dans $GA(V)$.

Exercice 6 (Commutation de dilatations). Montrer que deux dilatations $g, g' \in D(V)$ commutent si et seulement si, soit l'une est l'identité, soit ce sont deux translations, soit ce sont deux homothéties affines de même centre.

Exercice 7 (Homothéties affines de même centre). Montrer que l'ensemble des homothéties affines ayant un même centre est un sous-groupe commutatif de $D(V)$.

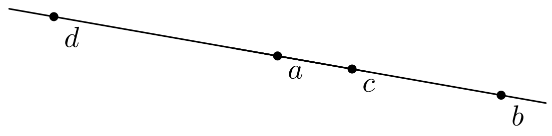
Exercice 8 (Groupe affine d'une droite). Montrer que, si V est un espace vectoriel de dimension 1, alors $GA(V) = D(V)$: les seules automorphismes affines d'une droite sont les translations et les homothéties affines.

Exercice 9 (Déterminer une homothétie). Soient deux points $a \neq b$ dans un espace vectoriel V sur un corps K. Montrer que, pour tout $\kappa \in K \setminus \{0, 1\}$, il existe une et une seule homothétie affine de rapport κ envoyant a sur b, et déterminer son centre. (Quel est le problème pour $\kappa \in \{0, 1\}$?) Spécifier la situation lorsque $\kappa = -1$.

Exercices supplémentaires en géométrie (7): Birapports, division harmonique

Responsable: Isar Stubbe

Exercice 1 (Division harmonique). Dans un espace affine, soit une droite ab et deux points $c, d \in ab$ qui ne sont pas le milieu de ab. Montrer que $\frac{a-c}{b-c} = -\frac{a-d}{b-d}$ si et seulement si, lorsque c est le barycentre de (a, α) et (b, β), alors d est le barycentre de $(a, -\alpha)$ et (b, β). (Pourquoi doit-on supposer que c et d ne sont pas le milieu de ab?)



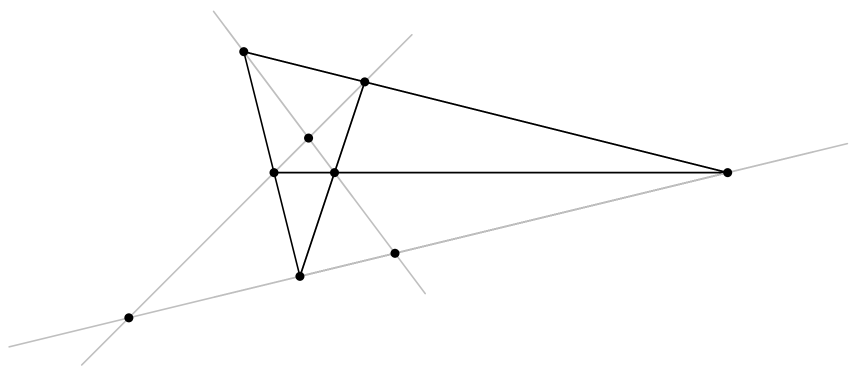
On dit alors que a, b, c, d sont en *division harmonique*, ou encore que c et d *divisent harmoniquement* le segment ab, ou encore que d est le *point conjugué harmonique* de c par rapport à ab. Ecrire cette definition en termes de homothéties (de centres c et d). Montrer que l'image d'une division harmonique par une application affine est toujours une division harmonique.

Exercice 2 (Birapport). Pour quatre points a, b, c, d d'un espace affine sur un corps K, on définit leur *birapport* (anglais: *cross-ratio*) comme le "rapport des rapports":

$$[a, b; c, d] := \frac{\frac{a-c}{b-c}}{\frac{a-d}{b-d}} \in K.$$

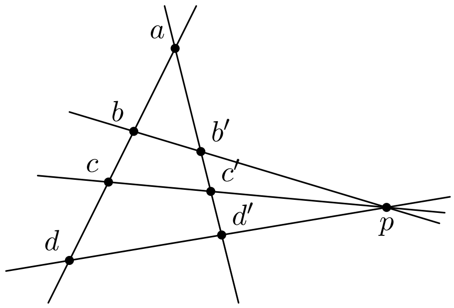
Ainsi, on a une division harmonique lorsque $[a, b; c, d] = -1$. Quand a-t-on que $[a, b; c, d] = 1$? Montrer que toute application affine préserve les birapports. Calculer le birapport quand on connait les coordonnées barycentriques de c et d par rapport à $\{a, b\}$. Comment change le birapport sous les diverses permutations de a, b, c et d?

Exercice 3 (Quadrilatère complet et division harmonique). Soit un quadrilatère complèt dans un espace affine (que l'on considère comme la donnée de quatre droites et six sommets). Montrer que chaque diagonale coupe les deux autres diagonales et déduire des théorèmes de Menelaos et Ceva que les deux points d'intersection divisent harmoniquement le segment défini par les deux sommets de passage.



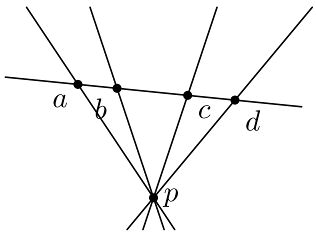
Par ailleurs, étant donné trois points sur un segment, on peut construire le quatrième point d'une division harmonique en construisant un quadrilatère complet adéquat.

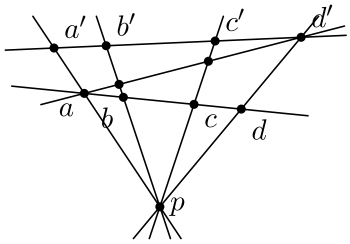
Exercice 4 (Birapport—un lemme). Supposons que, dans un espace affine, deux droites concourrantes coupent trois droites concourrantes:



Appliquer deux fois le Théorème de Menelaos (et permuter au besoin les points dans les birapports) pour vérifier que $[a, b; c, d] = [a, b'; c', d']$.

Exercice 5 (Birapport de droites concourrantes). Montrer que, lorsque une droite affine coupe quatre droites affines concourrantes, alors le birapport des quatre points d'intersections ne dépend pas de la droite sécante choisie:





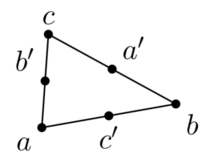
(Appliquer deux fois le résultat de l'exercice précédent, comme suggéré par le deuxième dessin.) Les birapports sont utilisés en géométrie projective, car (comme le suggère ce résultat) ils sont préservés par les *projections centrales* (qui ne préservent pas les rapports!). Ces résultats sont centraux dans les formidables livres de Pappos d'Alexandrie (290–350), voir aussi [Pappus of Alexandria, *Book 7 of the Collection*. Ed., with transl. and comment. by Alexander Jones, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences **8**, Springer-Verlag (1986)].

Exercices supplémentaires en géométrie (8): Encore des exemples géométriques

Responsable: Isar Stubbe

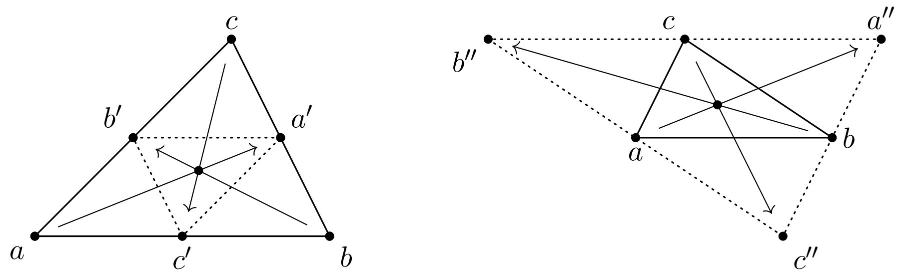
Exercice 1 (Image d'un parallélogramme). Montrer que l'image d'un parallélogramme par une application affine injective est un parallélogramme. Et si l'application n'est pas injective? L'image d'un quadrilatère non-parallélogramme peut-elle être un parallélogramme?

Exercice 2 (Une composée de symétries centrales affines). Soit un triangle abc dans un espace affine sur un corps K tel que $\mathrm{car}(K) \neq 2$, et notons les milieux a' de bc, b' de ac et c' de ab.

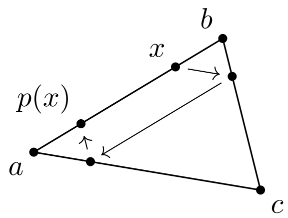


Notons par s_p la la *symétrie centrale affine* de centre p, c'est à dire l'homothétie de centre p et rapport -1. Déterminer alors $s_{b'} \circ s_{a'}$ et $s_{c'} \circ s_{b'} \circ s_{a'}$.

Exercice 3 (Retourner un triangle). Soit un triangle abc dans un plan affine sur un corps tel que $\mathrm{car}(K) \notin \{2, 3\}$, et notons g son isobarycentre; par un exercice précédent, g est donc aussi l'isobarycentre du triangle $a'b'c'$ dont les sommets sont les milieux des segments bc, ca et ab. Montrer que l'automorphisme affine déterminé par $abc \mapsto a'b'c'$ est l'homothétie de centre g et rapport $-\frac{1}{2}$. Montrer que, réciproquement, les sommets d'un triangle abc sont toujours les milieux des côtés d'un unique autre triangle $a''b''c''$. En déduire que les côtés des deux triangles ainsi emboîtés sont 2-à-2 parallèles.



Exercice 4 (Projections dans un triangle). Soit un triangle abc dans un plan affine, et notons p_1 la projection sur bc parallèlement à ca, p_2 la projection sur ca parallèlement à ab, et p_3 la projection sur ab parallèlement à bc. Pour $p = p_3 \circ p_2 \circ p_1$, calculer $p(a)$ et $p(b)$. Que peut-on alors dire de $p(x)$ et $(p \circ p)(x)$ pour $x \in ab$?



Exercice 1 (Tout espace euclidien est isomorphe à $\mathbb{R}^n$). Soit un espace euclidien V muni d'une base orthonormale $e_1, ..., e_n$. Montrer que l'application

$$f\colon V \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto (x_1, ..., x_n) \qquad \text{où} \qquad x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

est un isomorphisme faisant correspondre le produit scalaire de V avec le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, tous les résultats démontrés dans $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel et les notions dérivées (distance, angle, isométrie, etc.) sont vrais pour tout espace euclidien de dimension n.

Exercice 2 (Rapport comme quotient de distances signées). Pour trois points distincts mais alignés x, a et b dans un espace euclidien V, montrer que

$$\frac{b-x}{a-x} = \cos(\measuredangle axb)\frac{\|b-x\|}{\|a-x\|}.$$

Reprendre le Théorème de Thales (avec les rapports) pour retrouver la version vue en L2.

Exercice 3 (Changement de repère affine). Calculer, dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$, la représentation matricielle de l'application affine $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que:

1. $(0,0,0) \mapsto (1,4,3)$, $(1,0,0) \mapsto (4,4,4)$, $(1,1,0) \mapsto (0,0,1)$, $(1,1,1) \mapsto (1,1,1)$,
2. $(1,1,1) \mapsto (0,1,1)$, $(7,0,0) \mapsto (3,-5,3)$, $(7,7,0) \mapsto (5,-2,9)$, $(7,7,7) \mapsto (11,0,6)$.

S'agit-il d'une isométrie (pour le produit scalaire usuel)?

Exercice 4 (Ceci n'est pas une isométrie). Soit un plan euclidien V et supposons que deux vecteurs a et b sont linéairement indépendants. Montrer que $\{0, a, b\}$ et $\{b, -a, b-a\}$ sont deux repères affines. Donner la description matricielle par rapport à la base a, b de V de l'unique bijection affine envoyant le premier repère sur le deuxième. En déduire que ces deux repères ne peuvent pas être orthonormaux en même temps.

Exercice 5 (Tournée générale). Exprimer des conditions sur un triangle abc dans un plan euclidien V pour qu'il existe une isométrie envoyant a sur b, b sur c et c sur a. Montrer que cette isométrie est alors unique, et déterminer-la à l'aide de ses points fixes. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique, donner la description matricielle de cette isométrie lorsque $a = (0,1)$, $b = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ et $c = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Exercice 6 (Hyperplan médiateur). L'*hyperplan médiateur* de deux points distincts a et b d'un espace euclidien V est l'unique hyperplan affine $H \subseteq V$ orthogonal à ab et passant par le milieu m de a et b. Montrer que H contient exactement les points équidistants à a et b. Indication: exprimer que $pm \perp ab$.

Exercice 7 (Repères affines congruents). Soient des repères affines $\{a_0, ..., a_n\}$ et $\{b_0, ..., b_n\}$ d'un espace euclidien V et notons $g\colon V \to V$ l'automorphisme affine déterminée par $g(a_i) = b_i$. Montrer que g est une isométrie si et seulement si $\text{dist}(a_i, a_j) = \text{dist}(b_i, b_j)$ pour tout $i, j \in \{0, ..., n\}$. Indication: généraliser la démonstration vue en L2 pour les isométries de $\mathbb{R}^2$, en remplaçant des droites médiatrices par des hyperplans médiateurs.

Exercice 8 (Projection orthogonale sur une droite). Soit un espace euclidien V. Montrer que la projection orthogonale (linéaire) sur une droite (vectorielle) $D_0 = \mathbb{R}v$ est

$$p_{D_0}\colon V \to V\colon x \mapsto \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v.$$

En déduire que la projection orthogonale (affine) sur une droite (affine) $D = ab$ est

$$p_D \colon V \to V : x \mapsto \frac{(b-x)\cdot(b-a)}{(b-a)\cdot(b-a)}a + \frac{(x-a)\cdot(b-a)}{(b-a)\cdot(b-a)}b.$$

Exercice 9 (Projections (1)). Soit un espace affine V. Montrer que $g = t_a \circ f \colon V \to V$ est une projection affine (c'est à dire, $g = t_c \circ f \circ t_{-c}$ pour une projection linéaire f) si et seulement si $g \circ g = g$, si et seulement si $f \circ f = f$ et $fa = 0$, si et seulement si $f \circ f = f$ et g admet un point fixe. Donner l'axe et la direction de g. Supposons maintenant qu'une base orthonormale de V est donnée. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur la représentation matricielle de g pour que g soit une projection *orthogonale*. (Penser aux valeurs propres et la diagonalisation!)

Exercice 10 (Projections (2)). Dans $\mathbb{R}^3$ avec sa base canonique, donner la représentation matricielle de la projection d'axe $P : x+y+z = 1$ et de direction $D : x = y = z$. S'agit-il d'une projection orthogonale (pour le produit scalaire usuel)?

Exercice 11 (Projections (3)). Soit l'application affine

$$g_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que sa partie linéaire f est une projection (linéaire) et donner son axe et de sa direction. Est-ce que f est une projection orthogonale (pour le produit scalaire usuel)? Est-ce que g_1 est une projection (affine et/ou orthogonale)? Même questions pour

$$g_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$g_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$g_4 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 (Approximation par projection orthogonale). Soit un espace euclidien V, et un sous-espace affine $A \subseteq V$. Notons $p \colon V \to V$ la projection orthogonale (affine) sur A. Déduire du Théorème de Pythagoras que $\|x - p(x)\| \leq \|x - a\|$ pour tout $x \in V$ et tout $a \in A$. Autrement dit, la projection orthogonale de x sur A est la meilleure approximation (au sens de la distance euclidienne) de x par un élément de A.

Exercice 13 (Théorème de la médiane). Soit un parallélogramme $abcd$ dans un espace euclidien V. Montrer que

$$\mathrm{dist}(a,b)^2 + \mathrm{dist}(b,c)^2 + \mathrm{dist}(c,d)^2 + \mathrm{dist}(d,a)^2 = \mathrm{dist}(a,c)^2 + \mathrm{dist}(b,d)^2.$$

En déduire le *Théorème de la médiane*: dans tout triangle abc, si m est le milieu de bc alors

$$\mathrm{dist}(a,b)^2 + \mathrm{dist}(a,c)^2 = 2\,\mathrm{dist}(a,m)^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(b,c)^2.$$

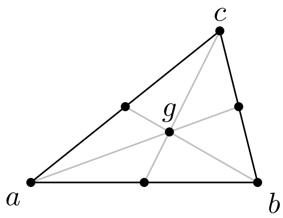
Conclure que abc est rectangle en a si et seulement si m est le centre du cercle circonscrit de abc.

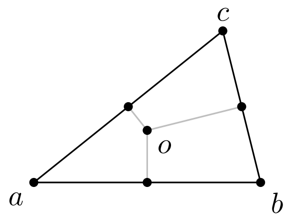
Exercices supplémentaires en géométrie (10): Cercle des neuf points

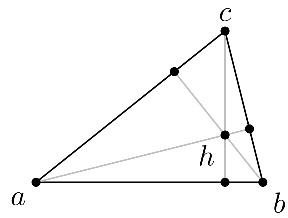
Responsable: Isar Stubbe

Exercice 1 (Dilatations d'un espace euclidien). Soit un espace euclidien V. Montrer que toute dilatation $d \in D(V)$ préserve les angles et envoie des sphères sur des sphères (et préciser l'effet sur le centre et le rayon). Quand est-ce que d est une isométrie?

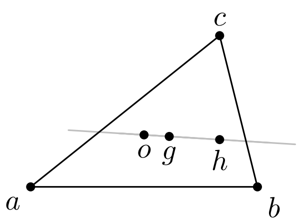
Exercice 2 (Droite d'Euler). Soit un triangle abc dans le plan $\mathbb{R}^2$ (avec sa géométrie euclidienne vue en L2); ainsi les trois *médiatrices* du triangle abc sont concourantes au centre o du cercle circonscrit. (C'est vrai dans un plan euclidien quelconque.) Sachant que toute homothétie préserve les angles (cf. l'exercice précédent), utiliser l'homothétie $abc \mapsto a'b'c'$ de centre g et rapport -2 (voir un exercice précédent) pour identifier les *hauteurs* de abc avec les *médiatrices* de $a'b'c'$ et en déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourrantes en un point h, appelé l'*orthocentre*.



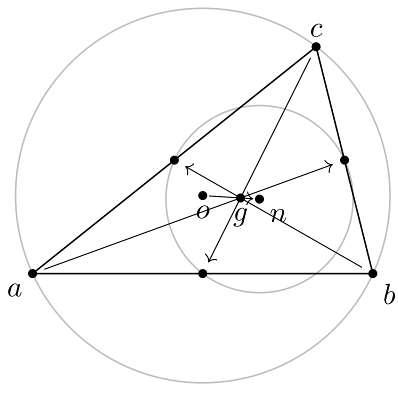




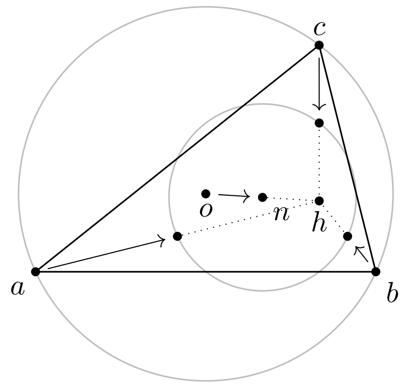
Conclure que l'isobarycentre g, le centre o du cercle circonscrit et l'orthocentre h sont alignés (et donner leur rapport): ces trois points se trouve sur la *droite d'Euler* du triangle abc.



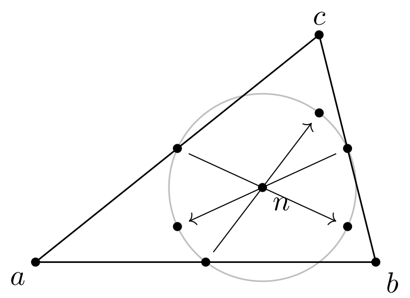
Exercice 3 (Cercle des neuf points). Soit un triangle abc dans le plan $\mathbb{R}^2$ (avec sa géométrie euclidienne vue en L2) et g son isobarycentre. Montrer que l'homothétie de centre g et rapport $-\frac{1}{2}$ (étudiée dans un exercice précédent) envoie le *cercle circonscrit* de abc (de centre o) sur un cercle passant par les trois milieux des côtés; notons n pour le centre de ce *cercle médian*:



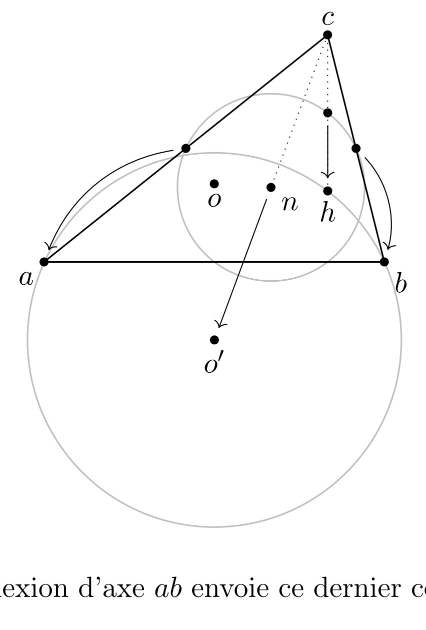
Observer que le rayon du cercle médian est la moitié du rayon du cercle circonscrit. Montrer qu'aussi l'homothétie de centre h et rapport $\frac{1}{2}$ envoie o sur n (utiliser les résultats d'un exercice précédent), et ainsi le cercle circonscrit sur le cercle médian:



Par conséquent, le cercle médian passe aussi par les trois milieux des segments ha, hb et hc. En déduire que la symétrie centrale de centre n envoie les milieux de ab, bc et ac sur les milieux de hc, ha et hb:

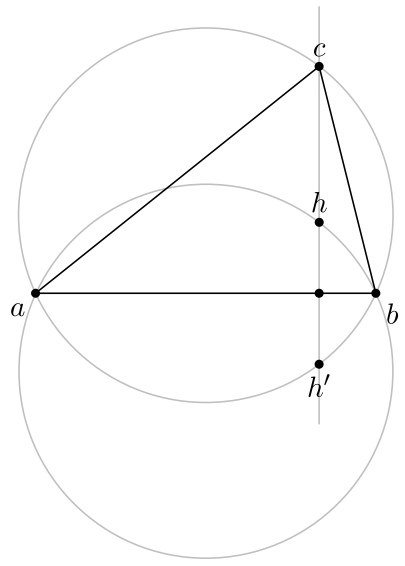


Montrer ensuite que l'homothétie de centre c et de rapport 2 envoie (par ce qui précède) le milieu de ch sur h, et donc le cercle médian sur un cercle passant par a, b et h.

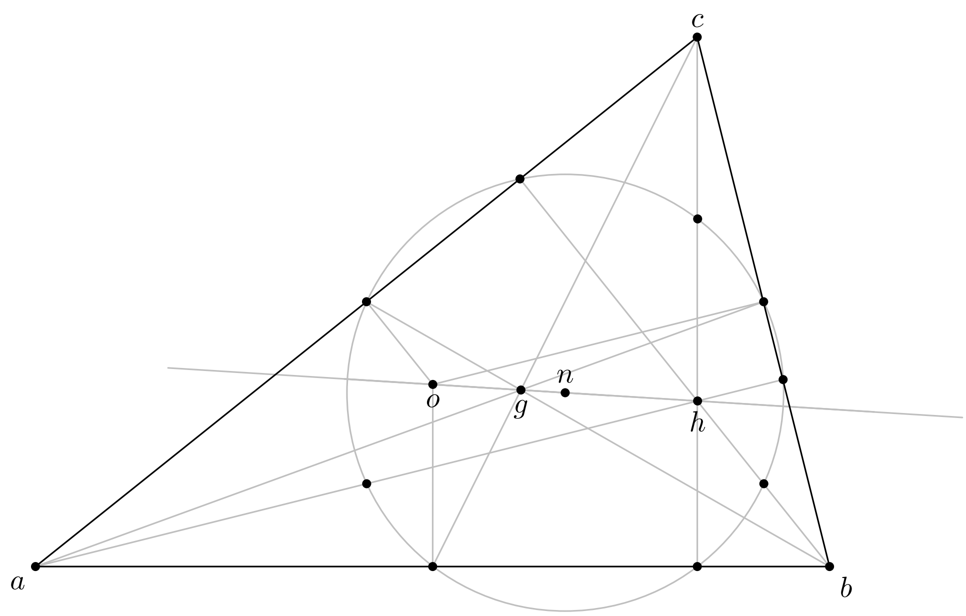


Finalement, montrer que la réflexion d'axe ab envoie ce dernier cercle sur le cercle circonscrit de

abc (on utilise que toute réflexion est une isométrie):



Ainsi le pied de la hauteur de c sur ab est le milieu du segment hh', et se trouve (par l'homothétie de centre h et rapport $\frac{1}{2}$) aussi sur le cercle médian; et idem pour les deux autres hauteurs de abc. Somme toute, le centre n du cercle médian est sur la droite d'Euler, et le cercle médian passe par neuf points remarquables: on l'appelle le *cercle des neuf points* de abc.



Vérifier finalement que $[g, h; n, o] = -1$, encore une division harmonique!

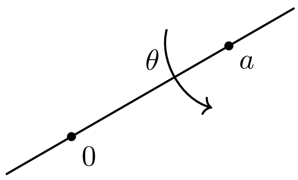
Exercices supplémentaires en géométrie (11): Groupe orthogonal

Responsable: Isar Stubbe

Exercice 1 (Permutations d'une base orthonormale). Soit V un espace euclidien muni d'une base orthonormale $\{e_1, ..., e_n\}$. Montrer que toute permuation de ces vecteurs de base produit un élément de $O(V)$. Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, déterminer la nature géométrique de chaque permutation. Faire des dessins!

Exercice 2 (Rotation = 2 renversements). Soit V un espace euclidien de dimension 3. Montrer que $s\colon V \to V$ est une réflexion si et seulement si $-s\colon V \to V$ est un renversement (= symétrie orthogonale dont l'axe est une droite). Observer qu'un renversement est une rotation d'angle π. Conclure que toute rotation est la composée de deux rotations d'angle π (et préciser les axes). Faire un dessin!

Exercice 3 (Matrice d'isométrie donnée). Dans $\mathbb{R}^3$, donner la représentation matricielle de la rotation



où $a = (1, 2, 1)$ et $\theta = \pi/6$. Donner aussi la matrice de la rotaflexion déterminée par ces données. (On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul.)

Exercice 4 (Isométrie de matrice donnée). Déterminer l'isométrie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon X \mapsto AX$ (pour la géométrie euclidienne usuelle) lorsque A est:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Attention: pour déterminer une rotation (ou rotaflexion), il faut donner le centre ou l'axe, l'angle et le sens. (On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul.)

Remarque: Avec un logiciel de calcul on peut facilement générer des matrices orthogonales 2×2 et 3×3 (p.e. en appliquant le procédé de Gram-Schmidt sur une base quelconque de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) puis déterminer la nature géométrique des isométries obtenues.

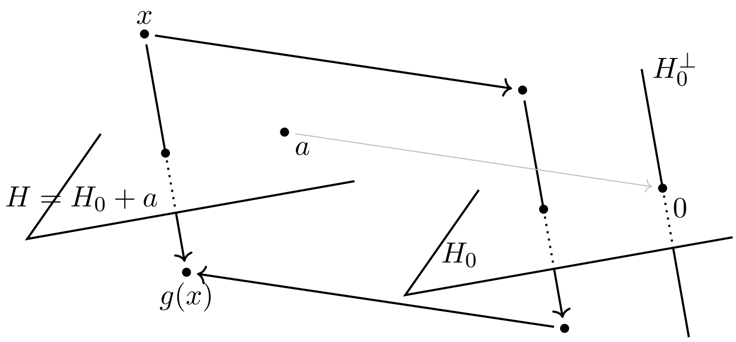
Exercices supplémentaires en géométrie (12): Classification des isométries affines

Responsable: Isar Stubbe

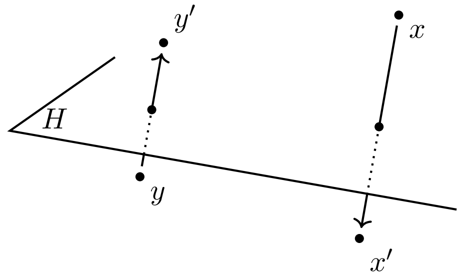
Pour un espace euclidien V donné, le groupe euclidien $E(V)$ contient exactement les automorphismes affines $g = t \circ f$ avec $f \in O(V)$. Le groupe $O(V)$ étant engendré par les réflexions linéaires, il est naturel de voir comment on peut engendrer le groupe $E(V)$. D'abord on définit "par conjugaison" la notion naturelle de réflexion affine (voir aussi les exercices du chapitre précédent):

Définition. *Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Une réflexion affine de V est une isométrie affine $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ où f est une réflexion linéaire et $a \in V$.*

Ainsi, si H_0 est l'axe de la réflexion linéaire f, alors l'hyperplan affine $H = H_0 + a$ est l'axe de $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$. Réciproquement, tout hyperplan affine $H \subseteq V$ est l'axe d'une unique réflexion affine $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ où f est la réflexion linéaire d'axe $H_0 = H - a$ et a est un point (quelconque) de H. Voici une illustration pour $n = 3$:



Géométriquement parlant, la réflexion affine d'axe H envoie tout point x sur un point x' de telle manière que la droite xx' soit orthogonale à H et que H contienne le milieu de x et x' (voir aussi les exercices du chapitre précédent):



Voici maintenant l'analogue "affine" du Théorème de Cartan-Dieudonné:

Théorème (Décomposition d'une isométrie en réflexions affines). *Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Tout isométrie affine $g \in E(V)$ est la composée de au plus $n + 2$ réflexions affines*[1].

Il est utile de montrer d'abord un lemme.

Lemme. *Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Toute translation $t \in T(V)$ est la composée de deux réflexions affines.*

[1] On peut préciser le nombre de réflexions affines nécessaires; voir les références.

Démonstration. Si $t = \mathsf{id}$ alors $t = s \circ s$ pour n'importe quelle réflexion s. Si $t = t_a$ avec $a \neq 0$, alors l'hyperplan (vectoriel[2]) $H = (\mathbb{R}a)^\perp$ détermine la réflexion (linéaire) s_H avec laquelle on peut maintant calculer que

$$t_a = t_{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}} \circ \mathsf{id} = t_{\frac{a}{2}} \circ t_{\frac{a}{2}} \circ s_H \circ s_H = t_{\frac{a}{2}} \circ s_H \circ t_{-\frac{a}{2}} \circ s_H,$$

ce qui montre que t_a est la composée des réflexions s_H (linéaire) et $(t_{\frac{a}{2}} \circ s_H \circ t_{-\frac{a}{2}})$ (affine). $\square$

Démonstration du Théorème. Supposons d'abord que $g \in E(V)$ a un point fixe, soit $ga = a$. Alors $f = t_{-a} \circ g \circ t_a$ est une isométrie fixant 0, c'est à dire $f \in O(V)$. Il suit par le Théorème de Cartan-Dieudonné que $f = s_k \circ ... \circ s_1$ pour $k \leq n$ réflexions linéaires, et donc

$$g = t_a \circ f \circ t_{-a} = t_a \circ (s_k \circ ... \circ s_1) \circ t_{-a} = (t_a \circ s_k \circ t_{-a}) \circ ... \circ (t_a \circ s_1 \circ t_{-a}).$$

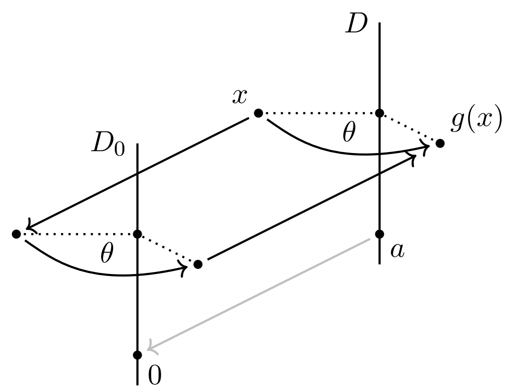
Chacun des $(t_a \circ s_i \circ t_{-a})$ est (par définition) une réflexion affine.

Supposons maintenant que $g \in E(V)$ est sans points fixes. Pour un point $a \in V$ au choix, $g' = t_{a-ga} \circ g \in E(V)$ fixe a, et s'écrit (par l'argument précédent) comme une composée de $k \leq n$ réflexions affines. Par le lemme, toute translation s'écrit comme une composée de deux réflexions affines. Ainsi $g = t_{ga-a} \circ g'$ s'écrit comme la composée de $k + 2 \leq n + 2$ réflexions affines. $\square$

Les résultats ci-dessus s'appliquent aux espaces euclidiens *de dimension quelconque*; mais pour la suite, on se limitera aux espaces euclidiens *de dimension* $n = 3$. Par un Théorème du cours, les éléments de $O(V)$ sont alors exactement les rotations et les rotaflexions (linéaires); et une rotaflexion est exactement la composée (dans n'importe quel ordre) d'une rotation avec une réflexion d'axes perpendiculaires. Pour décrire les éléments de $E(V)$, on définit d'abord "par conjugaison" les rotations affines:

Définition. *Soit V un espace euclidien de dimension 3. Une rotation affine est une isométrie de la forme $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ où f est une rotation linéaire.*

Si $f : V \to V$ est la rotation linéaire d'axe D_0 et d'angle θ, alors la rotation affine $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ est d'axe $D = D_0 + a$ et d'angle θ. Réciproquement, toute droite affine D et angle θ déterminent une (unique[3]) rotation affine $g = t_a \circ f \circ t_{-a}$ où f est la rotation linéaire d'axe $D_0 = D + a$ et a est un point (quelconque) de D. Voici une illustration:



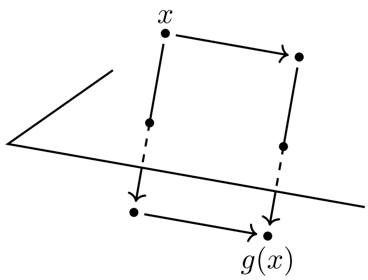
Ainsi, parmi les éléments de $E(V)$ il y a donc les translations, les réflexions affines et les rotations affines. Le résultat suivant dit que *toute* isométrie affine $g \in E(V)$ peut être décrite en termes de composées "bien choisies" de translations, réflexions et rotations, et donne ainsi une interprétation géométrique des éléments de $E(V)$.

[2] On peut en fait prendre n'importe quel hyperplan affine orthogonal à la droite vectorielle $\mathbb{R}a$.
[3] Si on travaille dans un espace orienté, voir les exercices.

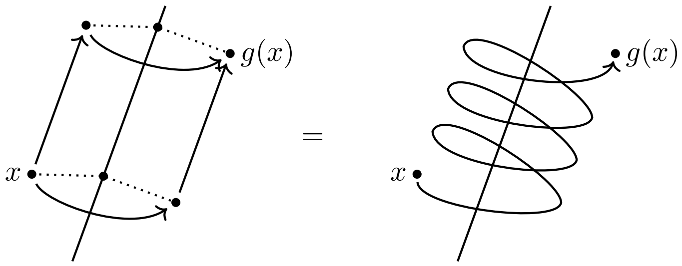
Théorème (Classification des isométries en dimension 3). *Toute isométrie affine $g = t \circ f \in E(V)$ d'un espace euclidien V de dimension 3 est l'un des quatre cas suivants:*

1. *Si f est l'identité, alors g est une translation.*

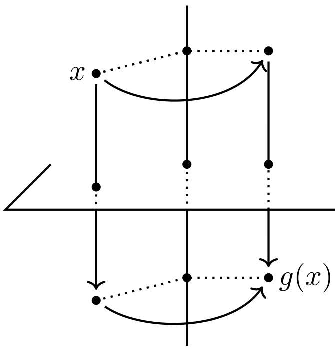
2. *Si f est une réflexion, alors g est une réflexion glisée: une composée (dans n'importe quel ordre) d'une réflexion affine avec une translation par un vecteur dans la direction de l'axe de la réflexion.*



3. *Si f est une rotation d'angle $\theta \neq 0$, alors g est un vissage: la composée (dans n'importe quel ordre) d'une rotation affine avec une translation par un vecteur dans la direction de l'axe de la rotation.*



4. *Si f est une rotaflexion d'angle $\theta \neq 0$, alors g est une rotaflexion affine: la composée (dans n'importe quel ordre) d'une rotation affine avec une refléxion affine par un plan orthogonal à l'axe de la rotation.*



Démonstration. Pour fixer les notations, posons $g = t_a \circ f$ avec $a \in V$ et $f \in O(V)$. Ainsi f est soit l'identité (rotation d'angle $\theta = 0$), soit une réflexion (rotaflexion d'angle $\theta = 0$), soit une rotation d'angle $\theta \neq 0$, soit une rotaflexion d'angle $\theta \neq 0$.

(1) Si f est l'identité, alors tout est trivial.

(2) Si f est une réflexion d'axe H_0, alors la restriction de f à H_0 est id_{H_0} et sa restriction à $D_0 = H_0^\perp$ est $-\mathsf{id}_{D_0}$. Notons $a = a_{D_0} + a_{H_0}$ pour l'unique décomposition de $a \in V = D_0 \oplus H_0$. On peut alors calculer que

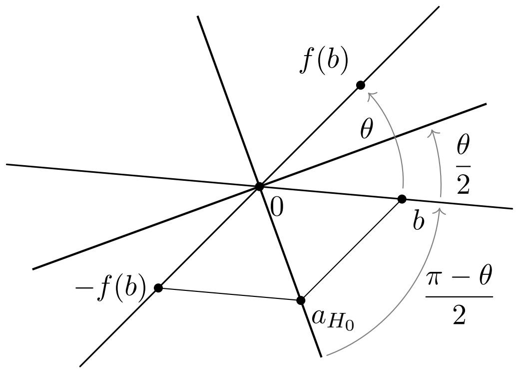
$$g = t_a \circ f = t_{a_{H_0}} \circ t_{a_{D_0}} \circ f = t_{a_{H_0}} \circ (t_{\frac{a_{D_0}}{2}} \circ f \circ t_{-\frac{a_{D_0}}{2}})$$

mais aussi (puisque f fixe les éléments de H_0)

$$g = t_a \circ f = t_{a_{D_0}} \circ t_{a_{H_0}} \circ f = t_{a_{D_0}} \circ f \circ t_{a_{H_0}} = (t_{\frac{a_{D_0}}{2}} \circ f \circ t_{-\frac{a_{D_0}}{2}}) \circ t_{a_{H_0}}.$$

Ainsi g est la composée, dans n'importe quel ordre, de la réflexion affine d'axe $H = H_0 + \frac{a_{D_0}}{2}$ avec la translation par a_{H_0}, un vecteur de la direction de l'axe de la réflexion.

(3 et 4) Si f est soit une rotation, soit une rotaflexion (composée de rotation et réflexion), notons D_0 l'axe et $\theta \neq 0$ l'angle de la rotation (et donc $H_0 = D_0^\perp$ est l'axe de la réflexion, le cas échéant). Notons toujours $a = a_{D_0} + a_{H_0}$ pour l'unique décomposition de $a \in V = D_0 \oplus H_0$. Que f soit une rotation ou une rotaflexion, sa restriction à H_0 est une rotation d'angle θ (en dimension 2). Pour $a = a_{D_0} + a_{H_0}$ il est alors toujours possible de trouver[4] un (unique) $b \in H_0$ tel que $a_{H_0} = b - f(b)$, comme indiqué dans ce dessin dans le plan H_0:



Il suit que

$$g = t_a \circ f = t_{a_{D_0}} \circ t_{a_{H_0}} \circ f = t_{a_{D_0}} \circ (t_b \circ f \circ t_{-b}).$$

On considère maintenant deux cas:

(3) Si f est une rotation, alors $t_b \circ f \circ t_{-b}$ est la rotation affine d'axe $D = D_0 + b$ et d'angle θ. Par ailleurs, puisque la restriction de f à D_0 est id_{D_0} (f fixe les éléments de D_0), et puisque $a_{D_0} \in D_0$ on peut calculer (par commutativité des translations) que

$$g = t_{a_{D_0}} \circ (t_b \circ f \circ t_{-b}) = t_b \circ (t_{a_{D_0}} \circ f) \circ t_{-b} = t_b \circ (f \circ t_{a_{D_0}}) \circ t_{-b} = (t_b \circ f \circ t_{-b}) \circ t_{a_{D_0}}.$$

Ainsi g est la composée, dans n'importe quel ordre, de la rotation affine d'axe $D = D_0 + b$ et d'angle θ, avec la translation par le vecteur a_{D_0} (un élément de la direction de l'axe de la rotation).

(4) Si f est une rotaflexion, alors la restriction de f à D_0 est $-\mathsf{id}_{D_0}$ (f envoie les éléments de D_0 à leurs opposés), et puisque $a_{D_0} \in D_0$ on peut calculer (par commutativité des translations) que

$$g = t_{a_{D_0}} \circ (t_b \circ f \circ t_{-b}) = t_b \circ t_{a_{D_0}} \circ f \circ t_{-b} = t_b \circ (t_{\frac{a_{D_0}}{2}} \circ f \circ t_{-\frac{a_{D_0}}{2}}) \circ t_{-b} = t_c \circ f \circ t_{-c}$$

pour $c = b + \frac{a_{D_0}}{2}$. De plus, lorsqu'on écrit $f = f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$ pour la décomposition de la rotaflexion f en réflexion f_1 (d'axe H_0) et rotation f_2 (d'axe $D_0 = H_0^\perp$ et angle θ), il suit aussi que

$$g = t_c \circ f \circ t_{-c} = (t_c \circ f_2 \circ t_{-c}) \circ (t_c \circ f_1 \circ t_{-c}) = (t_c \circ f_1 \circ t_{-c}) \circ (t_c \circ f_2 \circ t_{-c}).$$

Ainsi g est la composée, dans n'importe quel ordre, d'une rotation affine d'axe $D = D_0 + c$ et d'angle θ, et d'une réflexion affine d'axe $H = H_0 + c$. $\square$

[4] Plus algébriquement: $\ker(\mathsf{id}_{H_0} - f_{H_0}) = \{0\}$ car f_{H_0} n'a pas de points fixes, donc $\mathrm{im}(\mathsf{id}_{H_0} - f_{H_0}) = H_0$; c'est à dire, tout élément de H_0 est dans l'image de $\mathsf{id}_{H_0} - f_{H_0}$.

Remarquons que, dans cette démonstration, les "éléments géométriques" (vecteur de translation, plan de réflexion, axe et angle de rotation) d'une isométrie affine quelconque $g \in E(V)$ sont explicitement calculés. Par ailleurs, on peut (presque) reconnaitre une isométrie affine par ses points fixes:

Corollaire (Points fixes des isométries affines). *Soit une isométrie affine $g = t \circ f$ d'un espace euclidien V de dimension 3. Selon les points fixes de g et le détermininant de f, on a la classification suivante:*

points fixes	$\det(f) = 1$	$\det(f) = -1$
aucun	*translation, vissage*	*reflexion glissée*
singleton	*(n'existe pas)*	*rotaflexion*
droite	*rotation*	*(n'existe pas)*
plan	*(n'existe pas)*	*réflexion*
espace	*identité*	*(n'existe pas)*

Mouvements rigides.

Sans surprise, pour un espace euclidien V, on définit le *groupe euclidien spécial* $SE(V)$ comme le produit semidirect $SE(V) = T(V) \rtimes SO(V)$. De manière équivalente, $SE(V)$ est le sous-groupe de $E(V)$ des isométries (affines) dont la partie linéaire est dans $SO(V)$. Ou encore, $SE(V)$ est le sous-groupe des isométries dans $SA(V)$. Les éléments de $SE(V)$ ne changent pas l'orientation de l'espace (voir les exercices pour plus de détails), et sont appelés les *mouvements rigides*[5]. (En effet, en mécanique classique, ces mouvements rigides sont considérés comme les seuls déplacements possibles d'un corps dans l'espace.) Nous pouvons situer ce groupe parmis tous les autres groupes rencontrés dans ce cours à l'aide du diagramme

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[rr, tail] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, equal] & & SE(V) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, tail] \arrow[dd, tail] & & SO(V) \arrow[dr, tail] \arrow[dd, tail] & \\
& T(V) \arrow[rr, tail] \arrow[dd, equal] & & E(V) \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, tail] & & O(V) \arrow[dd, tail] \\
T(V) \arrow[rr, tail] \arrow[dr, equal] & & SA(V) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, tail] & & SL(V) \arrow[dr, tail] & \\
& T(V) \arrow[rr, tail] & & GA(V) \arrow[rr, two heads] & & GL(V)
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes horizontales sont des suites exactes courtes scindées, et les homomorphismes non-horizontales sont des inclusions. Voici une conséquence directe des résultats précédents:

Corollaire (Décomposition d'un mouvement rigide en réflexions affines). *Soit V un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Tout mouvement rigide $g \in SE(V)$ est la composée d'un nombre paire de réflexions orthogonales affines.*

Ensuite, la classification des isométries affines du Théorème implique ce résultat – dû à l'astronome et mathématicien italien Giulio Mozzi (1730–1813) et redémontré par le géomètre français Michel Chasles (1793–1880) – de très grande importance en mécanique et cinématique:

Corollaire (Théorème de Mozzi-Chasles). *Soit un espace euclidien V de dimension $n = 3$. Tout élément de $SE(V)$ est un vissage (éventuellement d'angle 0, c'est à dire, une translation).*

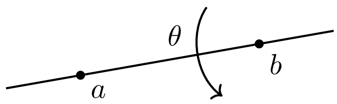
[5] Aussi utilisé: *déplacement*, *mouvement euclidien*, *isométrie positive* (ou *directe*), etc.

Et voici, pour terminer en beauté cette section, une conséquence simple mais surprenante, démontrée par le swiss Leonhard Euler (1707–1783), de la classification des isométries par leurs points fixes:

Corollaire (Théorème de la Rotation d'Euler). *Lorsqu'on tourne une sphère (dans un espace euclidien de dimension* 3*) autour de son centre*[6]*, il y a toujours un diamètre qui est fixé (et, dans les faits, on a effectué une rotation autour de ce diamètre).*

Démonstration. Pour simplifier l'argument, supposons que la sphère est de rayon 1. Considérons ensuite un repère affine orthonormal constitué du centre de la sphère plus trois points sur la sphère. En "tournant la sphère autour de son centre", on envoie ce repère affine orthonormal sur un autre repère affine orthonormal, tout en fixant le centre et en gardant l'orientation. Ainsi, on effectue un mouvement rigide ayant (au moins) un point fixe; et selon le Corollaire cela ne peut être qu'une rotation affine. L'axe de cette rotation est la droite affine des points fixes, et passe donc par le centre: ainsi il y a un diamètre de la sphère qui est fixé. $\square$

Exercice 1 (Représenter une isométrie affine). Dans $\mathbb{R}^3$, donner la représentation matricielle de la rotation



lorsque $a = (1, 0, 1)$, $b = (2, 2, 2)$ et $\theta = \pi/6$. Donner aussi la représentation matricielle de la rotaflexion déterminée par cette rotation suivie de la réflexion par le plan orthogonal passant par a. (On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul.)

Exercice 2 (Déterminer une isométrie affine). Donner le type, les éléments géométriques, et les points fixes de l'isométrie $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon X \mapsto AX + B$ (pour la géométrie usuelle de $\mathbb{R}^3$) lorsque A et B sont:

1. $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul.)

[6]Dans la pratique: prenez un ballon de foot entre les mains, et tournez-le comme bon vous semble!