Géométrie affine en L3 Mathématiques à l'ULCO

Rattrapage du 30 juin 2026 de 13h30 à 16h30

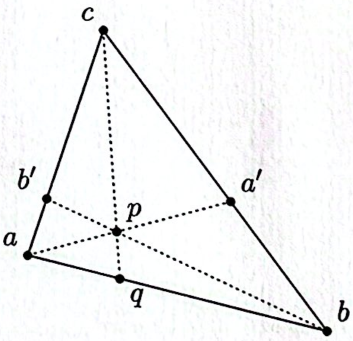
Responsable: Isar Stubbe

Sans documents, sans calculatrice.

Dans ce sujet, tout espace vectoriel est supposé de dimension finie sur un corps K.

5 1. 1 (a) Définir 'sous-espace affine' dans un espace vectoriel V.
2 (b) Démontrer que, par deux points distincts $a, b \in V$, passe une et une seule droite affine.
2 (c) Dans $\mathbb{R}^4$, décrire la droite passant par $(-1, 2, 4, 3)$ et $(2, 0, 2, 6)$ par équation(s) cartésienne(s) et par équation(s) paramétrique(s).

5 2. 1 (a) Définir 'barycentre d'une famille pondérée' dans un espace vectoriel V.
2 (b) Donner les quatre règles du calcul barycentrique.
2 (c) Soit un triangle abc dans V; on l'utilise comme repère affine du plan affine qu'il engendre. Soit a' le point de coordonnées homogènes $(0 : k : l)$ et b' le point de coordonnées homogènes $(m : 0 : n)$; on suppose que a' et b' sont distincts des sommets du triangle. Déterminer les coordonnées homogènes du point p d'intersection des droites aa' et bb', et les coordonnées homogènes du point q d'intersection de ab et cp:



4 3. 1 (a) Définir 'application affine' $g \colon V \to W$ entre espaces vectoriels.
2 (b) Démontrer qu'une application $g \colon V \to W$ est affine si et seulement si elle préserve les barycentres.
+1 pt bonus 1 (c) Soit $g \colon V \to W$ une application affine et $B \subseteq W$ un sous-espace affine. Montrer que $g^{-1}(B) \subseteq V$ est vide ou un sous-espace affine.
(1 (d) Donner un exemple d'une application affine $g \colon V \to W$ et un sous-espace affine $B \subseteq W$ tels que $g^{-1}(B) = \emptyset$.)

6 4. 1 (a) Définir 'symétrie orthogonale linéaire' d'un espace euclidien V.
1 (b) Démontrer que toute symétrie orthogonale linéaire est une isométrie.
4 (c) On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Vérifier que l'application

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

est une isométrie linéaire, puis en déterminer les éléments géométriques.

——— *fin* ———

1c $\quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\Delta = ab = \lambda(b-a) + a$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\text{éq. param.}}$$

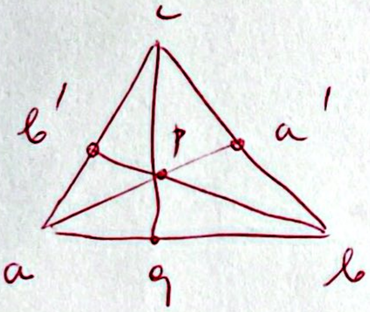
élim. param. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 3\lambda - 1 & \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{x_1+1}{3} \\ x_2 = -2\lambda + 2 & \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{x_2-2}{-2} \\ x_3 = -2\lambda + 4 & \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{x_3-4}{-2} \\ x_4 = 3\lambda + 3 & \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{x_4-3}{3} \end{cases}$$

donc $\underline{\text{éq. cart}}$ $\quad \dfrac{x_1+1}{3} = \dfrac{x_2-2}{-2} = \dfrac{x_3-4}{-2} = \dfrac{x_4-3}{3}$

(3 équation, car droite est de dim 1, dans $\mathbb{R}^4$).

$\underline{2^e}$ On peut résoudre l'exercice par le $\underline{\text{thm de Ceva}}$. On peut aussi donner un argument direct :



$$a' \sim (0 : k : l)$$

$$b' \sim (m : 0 : n)$$

$p \sim (\alpha : \beta : \gamma)$ est pt d'inters. de aa' et bb'

$$\Leftrightarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & k \\ \gamma & 0 & l \end{pmatrix} = 0 = \det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & m \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\beta l = \gamma k \quad \text{et} \quad \alpha n = \gamma m$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\alpha : \beta : \gamma) = \left(\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma} : 1\right)$$

$$= \left(\frac{m}{n} : \frac{k}{l} : 1\right)$$

$$= (ml : km : nl)$$

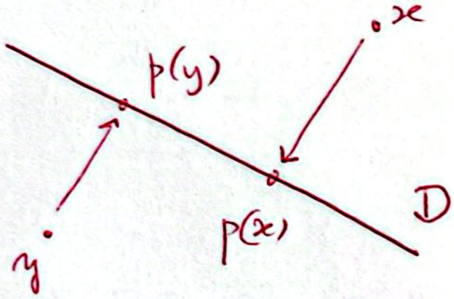
et $q \sim (\alpha' : \beta' : \gamma')$ est pt. d'inters. de cp et ab

$$\Longrightarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} \alpha' & 0 & ml \\ \beta' & 0 & km \\ \gamma' & 1 & nl \end{pmatrix} = 0 = \det\begin{pmatrix} \alpha' & 1 & 0 \\ \beta' & 0 & 1 \\ \gamma' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha' : \beta' : \gamma') = (lm : kn : 0)$$

<u>3d</u>. Soit une <u>projection</u> orthogonale p dans $\mathbb{R}^2$: sur une <u>droite</u>



alors pour tout <u>point</u> $b \notin D$

on a $\underset{\text{appli affine}}{p^{-1}}(\underbrace{\{b\}}_{\text{sous-espace affine}}) = \emptyset$.

4c Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

- ${}^tA A = I$ donc mat. orthogonale,
  donc appli. <u>isométrique</u>.

- $\det A = -1$ donc <u>rotoflex</u>

- $\operatorname{tr} A = 1$ donc <u>angle</u> $\theta = \arccos(1) = 0$
  donc <u>réflexion</u> ("sans rotation")

- <u>axe</u> $= \operatorname{Ker}(A + I) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$
  donc <u>plan fixe</u> de la <u>réfl orthog</u>.
  est d'éq. $x + y - z = 0$.