Géométrie affine en L3 Mathématiques à l'ULCO

Examen de rattrapage du 24 juin 2025 de 13h30 à 16h30

Responsable: Isar Stubbe

---

*Sans documents, sans calculatrice.*

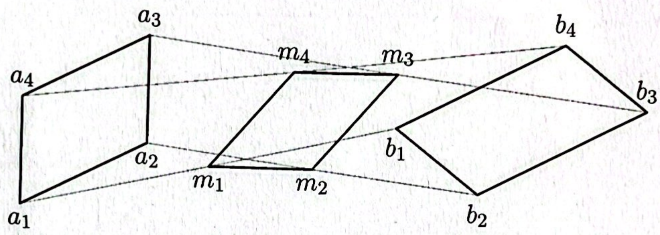
4 1. Soit un espace vectoriel $V$ de dimension finie sur un corps $K$.

1 (a) Donner la définition de 'sous-espace affine'.

1 (b) Démontrer que l'intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine ou vide.

2 (c) Dans $\mathbb{R}^3$, calculer l'intersection de $A = \mathbb{R}(-1,0,1) + \mathbb{R}(1,1,1) + (2,-1,2)$ et $B : 3x - 2y + z = 2$.

3 2. Pour les deux parallélogrammes $a_1a_2a_3a_4$ et $b_1b_2b_3b_4$ ci-dessous (dans le plan $\mathbb{R}^2$), montrer que les milieux $m_i$ des segments $a_ib_i$ forment aussi un parallélogramme.




5 3. Soient $V$ et $W$ des espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps $K$.

2 (a) Montrer que, pour toute translation $t \colon V \to V$ et toute application linéaire $f \colon V \to W$, il existe une unique translation $t' \colon W \to W$, telle que $f \circ t = t' \circ f$.

2 (b) Montrer que, si $t \circ f = t' \circ f'$ pour deux translations $t, t' \colon V \to V$ et deux applications linéaires $f, f' \colon V \to W$, alors $t = t'$ et $f = f'$.

1 (c) Donner la définition de 'application affine' entre deux espaces vectoriels. Pourquoi les points (a) et (b) sont-ils pertinents pour cette définition?

4 4. Soit $abc$ un triangle dans un plan vectoriel $V$ sur un corps $K$, et notons par $p \colon V \to V$ la projection affine d'axe $ab$ et de direction $ac$.

1 (a) Déterminer $p(a)$, $p(b)$ et $p(c)$.

1 (b) En déduire que la description explicite de $p$ en termes de barycentres est

$$p \colon V \to V \colon (\alpha a + \beta b + \gamma c) \mapsto ((\alpha + \gamma)a + \beta b).$$

2 (c) Pour $a = (-1,1)$, $b = (0,2)$ et $c = (3,-1)$ dans $V = \mathbb{R}^2$, calculer l'image par $p$ de $x = (2,3)$.

4 5. Soit l'application linéaire

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ avec sa géométrie euclidienne usuelle.

1 (a) Montrer que $f \in O(\mathbb{R}^3)$.

3 (b) Déterminer le type et les éléments géométriques de $f$.

——— *fin* ———

20.

**1c** $A = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad A : x-2y+z=6$

donc $A\cap B : \begin{cases} x-2y+z=6\\ 3x-2y+z=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$ droite. affine

---

**2** $a_1a_2a_3a_4$ parall $\Leftrightarrow a_4 = a_1 - a_2 + a_3$

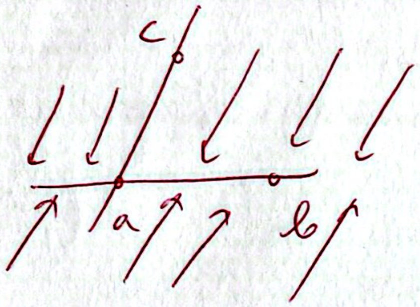
$b_1b_2b_3b_4$ parall $\Leftrightarrow b_4 = b_1 - b_2 + b_3$

$m_i = \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}b_i$ car milieu

$\Longrightarrow m_4 = m_1 - m_2 + m_3$ donc parall.

---

**4**

a) 


donc $\begin{cases} p(a) = a\\ p(b) = b\\ p(c) = a\end{cases}$

proj affine !!

b) $p(\alpha a+\beta b+\gamma c) = \alpha p(a)+\beta p(b)+\gamma p(c) = (\alpha+\gamma)a+\beta b$

(c) on a $x = -\frac{3}{2}a + \frac{7}{3}b + \frac{1}{6}c$

donc $p(x) = \left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)a + \frac{7}{3}b = \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$

---

5/

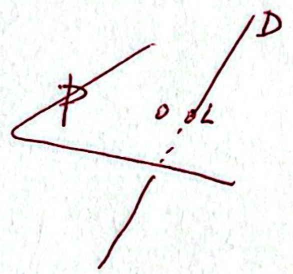
a) $A^tA = I$ (par calcul)

b) $\det(A) = -1$ donc <u>rotaflexion</u>

$-1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(A) \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \underline{\theta = 0}$

donc la partie "rotation" est triviale,

donc il s'agit d'une <u>réflexion orthog</u>




$$\begin{cases} \text{plan } P = \underline{\text{pts fixes}} = \mathrm{Ker}(A - I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \text{droite } D = \mathrm{Ker}(A + I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle . \end{cases}$$