EXAMEN DE GÉOMÉTRIE EN L2 MATH DU 18/01/2024 DE 13H30 À 16H30

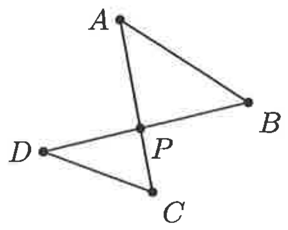
Responsable: Isar STUBBE

*Sans documents, sans calculatrice.*

2 1. Utiliser les Propositions 1 à 16 d'Euclide pour démontrer sa Proposition 18: "Dans un triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle."

3 2. (a) Définir 'triangles congruents'. 0.5
   (b) Définir 'triangles semblables'. 0.5

   Soit maintenant la figure suivante:




   En utilisant au besoin les Propositions d'Euclide, montrer que:

   (c) les triangles $PAB$ et $PCD$ sont semblables si et seulement si $AB$ est parallèle à $CD$, 1
   (d) les triangles $PAB$ et $PCD$ sont congruents si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme. 1

4 3. Dans le plan réel muni d'un repère orthonormée, soient $A = (6, 4)$, $B = (2, -4)$ et $C = (-2, 2)$.
   (a) Donner l'équation cartésienne de la droite $\Delta$ passant par $A$ et $B$. 1
   (b) Donner l'équation cartésienne de la droite $\Gamma$ perpendiculaire à $\Delta$ et passant par $C$. 1
   (c) Calculer l'aire de la figure délimitée par $\Delta$, $\Lambda$ et l'axe $Y$. 2

5 4. Soit la conique $\Gamma : xy + 3x + 5y - 4 = 0$ dans le plan réel muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.
   (a) Calculer sa forme réduite, en détaillant les changements de repère effectués. 3
   (b) Déterminer son type. 1
   (c) Donner ses foyer(s) et/ou sa droite directrice (par rapport au repère $\mathcal{R}$). 1

4 5. (a) Donner la définition de 'isométrie du plan $\mathbb{R}^2$'. 1
   (b) Démontrer que l'ensemble des isométries est un groupe (et en préciser les opérations). 1
   (c) Donner (sans démonstration) la classification des isométries. 1
   (d) Est-ce que les rotations (de centres quelconques) forment un groupe? Donner une démonstration ou un contre-exemple. 1

2 6. Au verso de cette feuille, construire avec règle et compas un carré d'aire cinq fois l'aire du carré donné. Donner les étapes de la construction.

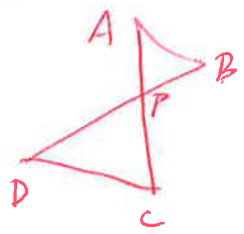
*fin*

+/20

1. voir cours.

2. (a, b) voir cours

(c)



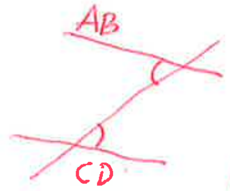

PAB sembl. à PCD

$\Downarrow$

$\sphericalangle PBA = \sphericalangle PDC$

$\Downarrow$

$AB \parallel DC$ ( car




)

réciproquement, $AB \parallel DC \Rightarrow \sphericalangle PBA = \sphericalangle PDC$

tj $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$

$\Rightarrow$ PAB sembl à PCD car 2 angles égaux

(d) PAB congr à PCD $\Rightarrow$ $AB \parallel DC$ (par (c) ci-dessus)

$|AB| = |CD|$

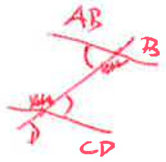
$\Rightarrow$ parallélogramme . ABCD

réciproquement, ABCD parallélogramme

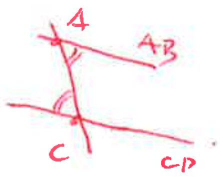
$\Rightarrow$ $AB \parallel CD$ et $|AB| = |CD|$

$\Rightarrow$ $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PDC$ et $\sphericalangle PCD = \sphericalangle PAB$

( car




et




et $|AB| = |CD|$

$\Rightarrow$ PAB congr à PCD (par "CAC").

3. $A=(6,4)$, $B=(2,-4)$, $C=(-2,2)$

(a) $\Delta$ : $(x-6)(-4-4) = (y-4)(2-6)$

$\iff (x-6)(\cancel{-8}) = (y-4)(\cancel{-4})$

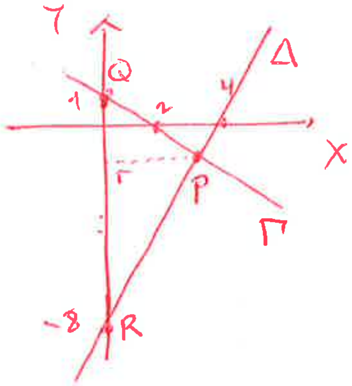
$\iff 2x - y - 8 = 0.$

(b) $\Gamma$ : $x + 2y + c = 0$ (car $\Gamma \perp \Delta$)

et $-2 + 2.2 + c = 0$ (car $C \in \Gamma$)

donc $x + 2y - 2 = 0$

(c)




$P = \Gamma \cap \Delta$

ssi

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

donc $\begin{cases} y = -\frac{4}{5} \\ x + 2y = 2 \end{cases} \iff x = 2 - 2\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{18}{5}$

donc $P = \left(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

donc aire PQR $= \dfrac{\text{base} \times \text{haut.}}{2} = \dfrac{9 \times \frac{18}{5}}{2} = \dfrac{81}{5}.$

4. $xy + 3x + 5y - 4 = 0$

(a) rotation : $\tan\theta = \frac{0-0}{1} \pm \sqrt{\frac{0-0}{1} + 1} = \pm 1$

prenons $\tan\theta = 1$ alors $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

d'où $\Gamma_{Q'}$ : $\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)$
$+ 5\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}x' + \frac{2}{\sqrt{2}}y' - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x'^2 - y'^2 + 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' - 8 = 0.$

translation : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

tel que $\begin{cases} -2u + 8\sqrt{2} = 0 \\ 2v + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$ donc $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

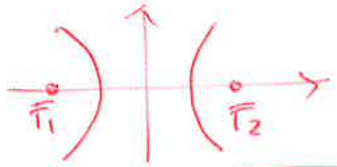
d'où $\Gamma_{Q''}$ :

$(x'' - 4\sqrt{2})^2 - (y'' + \sqrt{2})^2 + 8\sqrt{2}(x'' - 4\sqrt{2})$
$+ 2\sqrt{2}(y'' + \sqrt{2}) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x''^2 - y''^2 + (-4\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{2}(-4\sqrt{2})$
$+ 2\sqrt{2}(\sqrt{2}) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x''^2 - y''^2 = 38$

$\Leftrightarrow \frac{1}{38}x''^2 - \frac{1}{38}y''^2 = 1$ (équ réduite)

(b) hyperbole : 

car "$ax^2 - by^2 = 1$"

(c) foyers :

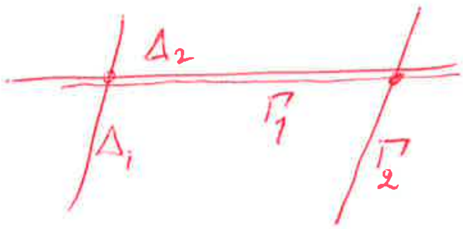
$$\begin{cases} (F_1)_{\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} -\sqrt{a^{-1}+b^{-1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{76} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{19} \\ 0 \end{pmatrix} \\ (F_2)_{\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{19} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (F_1)_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{19} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{19} - 4\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ (F_2)_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{19} - 4\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (F_1)_{\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{19} - 4\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{38} - 5 \\ -\sqrt{38} - 3 \end{pmatrix} \\ (F_2)_{\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} \sqrt{38} - 5 \\ \sqrt{38} - 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. voir cours (et exercices.)

pour (d) la réponse est "non" : p.e. les rotations déterminées par les réflexions



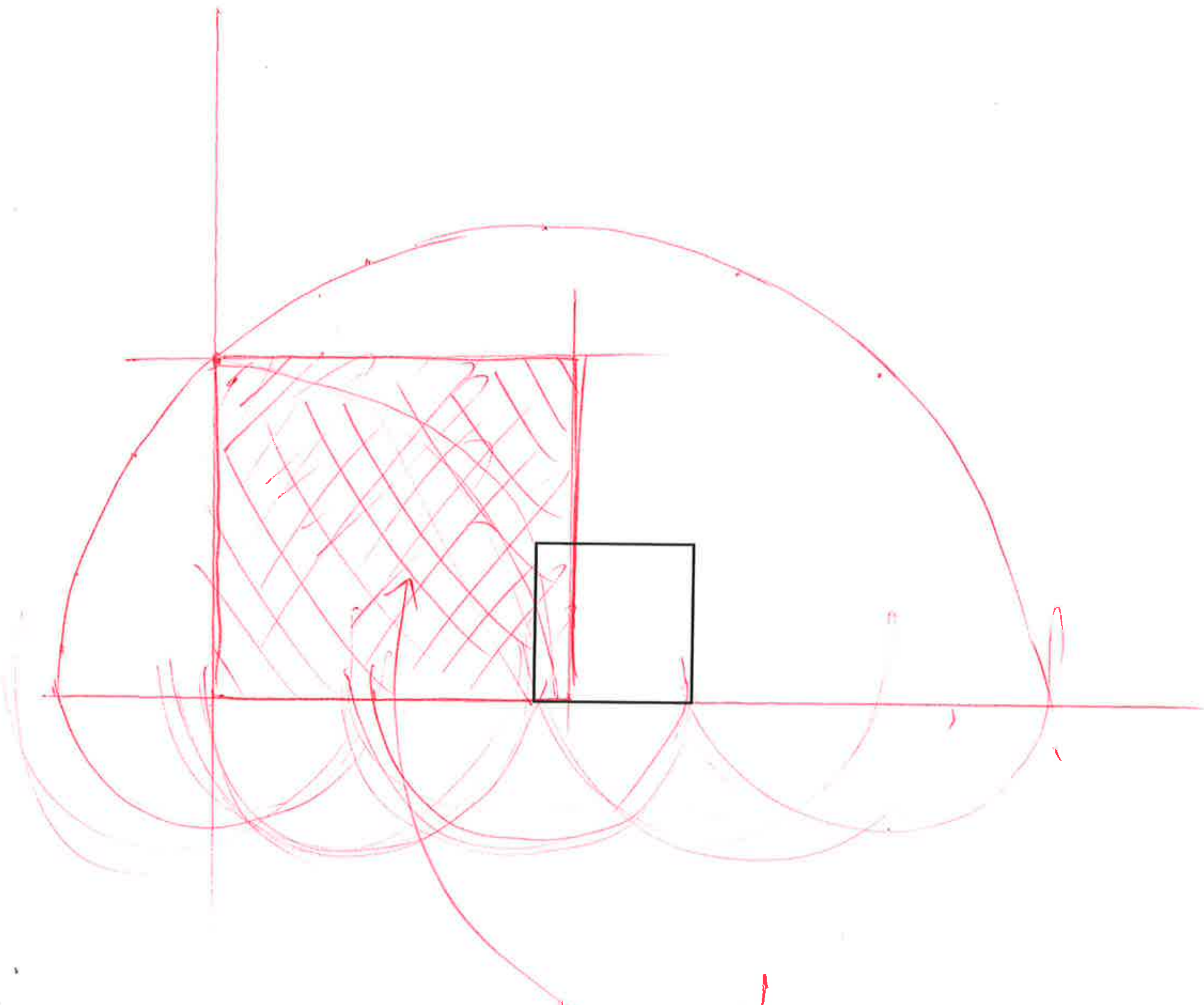

($\Delta_2 = \Gamma_1$ et $\Delta_1 // \Gamma_2$)

donnent par composée une translation !

$$\underbrace{(s_{\Gamma_2} \circ s_{\Gamma_1})}_{\text{rot.}} \circ \underbrace{(s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1})}_{\text{rot.}} = \underbrace{s_{\Gamma_2} \circ s_{\Delta_1}}_{\text{translat}}$$

5.

NOM et Prénom: ____________________



le voici!