Géométrie du plan: d'Euclide à Descartes

Isar Stubbe

(version du 18 octobre 2026)

Table des matières

I La géométrie par règle et compas 1

1. Triangles congruents 3

2. Droites parallèles 17

3. Triangles et cercles 29

4. Pentagone régulier 39

II La géométrie par les coordonnées 49

5. Repères 51

6. Coniques 67

7. Isométrie et similitude 79

8. Points constructibles 91

Bibliographie 99

Annexe : Annales d'examens 101

Annexe : Propositions d'Euclide 109

Première partie

La géométrie par règle et compas

– Il est aisé d'en convenir, dit-il ; la géométrie est en effet la connaissance de ce qui est toujours. – Par suite, mon noble ami, elle attire l'âme vers la vérité, et développe en elle cet esprit philosophique qui élève vers les choses d'en haut les regards que nous abaissons à tort vers les choses d'ici-bas.

Platon, *La République*, Livre VII, section 527, env. -380 (trad. R. Baccau, 1936).

— 1 —

Triangles congruents

Partant des définitions et des quatre premiers postulats d'Euclide, nous déduisons les premiers constructions et résultats de la géométrie classique : les triangles isocèles et équilatéraux, la bissection d'angles et de segments, la construction de perpendiculaires, ou encore les différents critères de congruence de triangles. Nous indiquons les principales imperfections dans la théorie d'Euclide (l'inadéquation du quatrième postulat, l'absence d'une notion du continu, l'absence d'une notion d'ordre), et nous mentionnons brièvement les solutions apportées par Hilbert. Quelques constructions et complétions de démonstrations sont laissées en exercice.

La Géométrie est la plus ancienne théorie mathématique : les 13 livres des Eléments d'Euclide, datant à peu près de l'an -300, tentent d'en donner une base solide, sous forme de postulats dont tous les énoncés sont ensuite déduits. Aujourd'hui, l'approche d'Euclide peut sembler quelque peu naive, néanmoins, en 1899 David Hilbert a montré qu'en effet la géométrie (plane et solide) conçue par Euclide est une théorie mathématique (axiomatique) cohérente.

Quatre Premiers Postulats d'Euclide

Puisqu'il est formateur de reprendre les arguments d'Euclide, commençons par ses définitions :

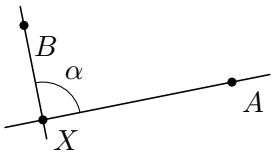
Définition 1.1 (Les Définitions d'Euclide)

1. *Un* point *est ce qui n'a pas de partie.*
2. *Une* ligne *est une longueur sans largeur.*
3. *Un* segment de droite *est une ligne également placée entre ses points.*

Et de la même manière, Euclide "définit" aussi *angle*, *angle droit* ("lorsqu'une droite élevée sur une droite fait deux angles adjacents égaux entre eux"), *cercle* (points équidistants à un centre donné) avec son *diamètre*, et finalement aussi des *segments parallèles* ("des segments de droites qui, étant prolongés indéfiniment de part et d'autre, ne se rencontrent jamais"), le *triangle*, le *triangle isocele*, etc.

Clairement, ces "définitions" historiques ne sont pas formulées avec la rigueur requise en mathématique aujourd'hui. Puisque l'intention d'Euclide est de faire de la géométrie plane, on pourra visualiser ces notions comme des points, des droites, des cercles, des angles, etc. au sens habituel sur une feuille ("plate et infiniment grande"). Par ailleurs, on notera les points du plan

par des lettres latines majuscules A, B, C, etc., on parlera de la droite AB (passant par les points A et B) ou d'un segment AB (d'extrémités A et B), d'un triangle ABC (ayant donc les points A, B et C comme sommets), etc. Si deux demi-droites, passant par A et B respectivement, se rencontrent en un point X, alors on notera l'angle ainsi formé par $\angle AXB$. On utilisera le symbôle $\perp$ pour l'angle droit, et dans un dessin on pourra nommer les angles par des lettres grecques α, β, γ, etc. De manière anachronique, on notera $|AB|$ pour la longueur du segment AB. Ainsi, dans la figure



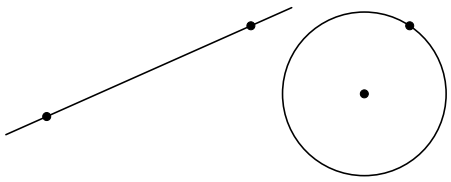
on a que $\angle AXB = \alpha = \perp$; et on peut observer que $|AX| \geq |BX|$.

Viennent ensuite les postulats d'Euclide ; en tout il y en a cinq, mais nous commençons par :

Postulat 1.2 (Trois Premiers Postulats d'Euclide)

1. *On peut tracer un segment joignant deux points donnés.*
2. *On peut prolonger un segment en une droite.*
3. *On peut tracer un cercle de centre et point de passage donnés.*

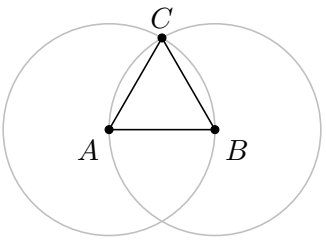
Ces trois premiers postulats autorisent l'utilisation d'une règle et d'un compas : si on connait deux points, on peut tracer une (et une seule) droite passant par ces points, ou encore un (et un seul) cercle ayant un point comme centre et l'autre comme point de passage



Ensuite, Euclide explore d'autres figures qui se dessinent dans le plan par une succession de ces deux constructions de base—à commencer par :

Proposition 1.3 (Proposition 1 d'Euclide) *Construire un triangle équilatéral sur un segment donné.*

Démonstration. Le segment AB étant donné, on construit le cercle de centre A passant par B, puis le cercle de centre B passant par A.



Le point d'intersection (mieux dit : un des deux points d'intersection) C est le troisième sommet d'un triangle équilatéral sur le segment AB : on a $|AB| = |AC|$ parce que B et C sont des points d'un même cercle de centre A ; et $|BA| = |BC|$ suit de la même manière. □

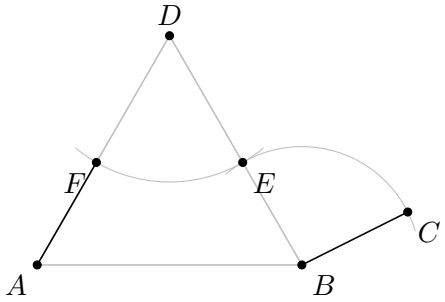
Dans cette démonstration, on trouve "évident" que les deux cercles s'intersectent en un point. Et pourtant, ceci n'est pas une conséquence des Définitions et Postulats d'Euclide ! Pour être parfaitement rigoureux, on devrait donc justifier que ce point d'intersection existe. L'idée (que nous ne développerons pas ici ; consultez les références pour les détails) est la suivante : lorsqu'une courbe (un cercle ou un droite) partage le plan en deux (intérieur vs. extérieur du cercle, les deux demi-plans définis par une droite), et une deuxième courbe (cercle ou droite) passe d'un côté à l'autre, alors il existe un point d'intersection des deux courbes. Ceci justifie l'existence d'un point d'intersection de deux droites, d'une droite et un cercle, ou de deux cercles. Ainsi, par intersection de figures déjà déssinées on trouve des nouveaux points, qui permettent à leur tour de dessiner de nouvelles figures, etc. Un bon nombre de Propositions d'Euclide porte en effet sur ces *constructions à règle et compas* dans le plan.

Le troisième Postulat d'Euclide ne permet *a priori* pas de construire un cercle centré en A et de rayon $|BC|$, si $A \neq B$ et $A \neq C$. La proposition suivante montre qu'en fait ceci est toujours possible : il suffit de "déplacer" le segment BC au point A.

Proposition 1.4 (Proposition 2 d'Euclide) *Construire à partir d'un point un segment de longueur donnée.*

Démonstration. Soit le point A et le segment BC ; on souhaite construire un segment de longueur $|BC|$ partant du point A.

Supposons que $|AB| > |BC|$. On construit un triangle équilatéral ABD sur AB (par Proposition 1.3). Le cercle de centre B et passant par C coupe BD en E ; le cercle de centre D et passant par E coupe AD en F.



Ainsi on trouve $|AF| = |AD| - |FD| = |BD| - |ED| = |BE| = |BC|$.

On laisse en exercice le cas où $|AB| < |BC|$ (et le cas où $|AB| = |BC|$ est trivial). □

Cette démonstration montre comment Euclide s'appuie sur une certaine "métathéorie" pour justifier ces constructions—comprenant notamment la *logique classique* (ci-dessus il utilise le tiers exclu, et on verra plus loin qu'il fait aussi des démonstrations par l'absurde), y compris des considérations évidentes sur l'*égalité* ("deux quantités égales à une même troisième sont

égales entre elles", etc.). Plus subtile encore, Euclide estime que l'on peut *ordonner* des objects géométriques (ci-dessus pour parler du point E se trouvant *entre* les points B et D, mais p.e. aussi pour parler d'un point *à l'intérieur* d'un cercle ou d'un triangle). Remarquons finalement que les arguments d'Euclide sont souvent accompagnés d'un *dessin*.

Avec les trois premiers postulats, on peut donc tracer certaines figures (droites, cercles, triangles) à l'aide d'une règle et d'un compas. Le quatrième postulat est d'une autre nature : son but est de comparer de telles figures entre elles.

Postulat 1.5 (Quatrième Postulat d'Euclide)

4. Tous les angles droits sont égaux.

Autrement dit, ce postulat veut exprimer que "un angle droit est le même partout dans le plan", comme si pour dire qu'en déplaçant deux (demi-)droites formant un angle droit dans le plan, on ne déforme pas cette figure.

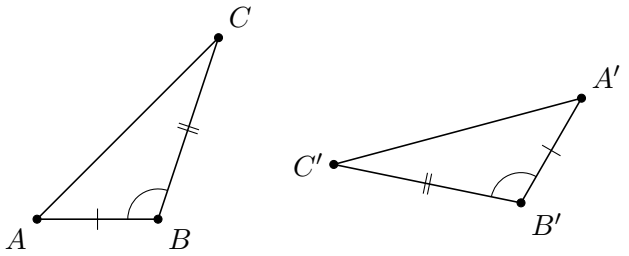
Mais la figure principale, au début de la géométrie d'Euclide, est le triangle ; et Euclide cherche a établir des résultats (aujourd'hui fameux) sur l'"égalité" de triangles, notion qu'Euclide comprend à peu près comme :

Définition 1.6 *Deux triangles sont* congruents [1] *s'il existe une correspondence bijective entre leurs sommets telle que les côtés et les angles correspondants sont égaux.*

Lorsqu'on parle de segments égaux, on veut dire qu'ils sont de même longueur ; et de même, deux angles sont égaux s'ils sont de même amplitude. Mais Euclide ne développe pas du tout ces notions numériques ! La démonstration de l'énoncé suivant donne une meilleure indication de l'intuition d'Euclide :

Proposition 1.7 (Proposition 4 d'Euclide) *Si deux côtés et l'angle inclus d'un triangle sont égaux à deux côtés et l'angle inclus d'un autre triangle, alors ces triangles sont congruents.*

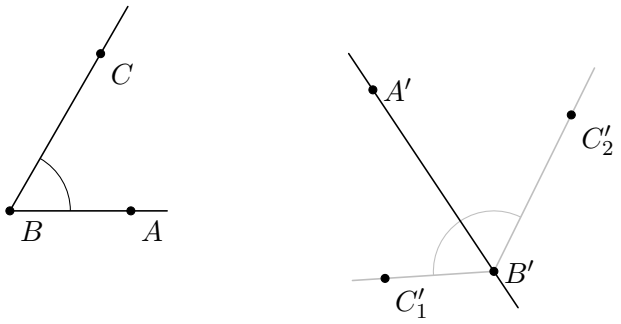
Démonstration. On note par ABC le premier triangle et $A'B'C'$ le deuxième ; on supposera que $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ainsi que $|AB| = |A'B'|$ et $|BC| = |B'C'|$.



On *superpose* le sommet B' sur le sommet B de façon que A' se trouve sur la droite AB ; mais par l'égalité des longueurs de côtés, A' coïncidera avec A. Par l'égalité des angles, C' se trouvera sur la droite BC, et encore par l'égalité des longueurs de côtés, C' coïncidera avec C. Ainsi le triangle ABC est *égal* au triangle $A'B'C'$. □

1. Motivé par le contenu des chapitres à venir, on pourra aussi dire *isométriques*.

Cette “démonstration” n’en est pas une selon les critères d’Euclide lui-même ! Car non-seulement elle ne suit pas de ses postulats, mais en plus elle nécessite un concept extérieur à sa théorie, à savoir le *déplacement* de figures du plan, laissant inchangé les distances et les angles. (En termes contemporaines on peut dire que les déplacements autorisées sont les rotations, translations et réflexions ; et plus tard on verra qu’il suffit de disposer de réflexions.) Dans son axiomatisation de la géométrie euclidienne, 2000 ans plus tard, Hilbert se voit en effet obligé d’attester d’abord de la possibilité de *déplacer un angle* : étant donné un angle $\angle ABC$ ainsi qu’une (demi-)droite $A'B'$, dans chaque demi-plan déterminé par $A'B'$ il existe un point C' tel que l’angle $\angle A'B'C'$ soit congruent à l’angle donné.



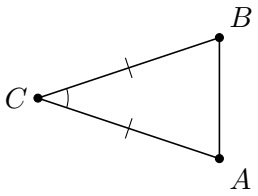
Mais nous avons déjà vu, dans la Proposition 1.4, que l’on peut aussi déplacer des segments. Somme toute, étant donné un triangle, on peut ainsi déplacer deux de ses côtés et l’angle inclus. Puis, Hilbert prend la Proposition 4 d’Euclide comme un axiome ! Par conséquent, *étant donné un triangle, on s’autorise de déplacer deux segments et l’angle compris entre-eux, pour retrouver ainsi un triangle congruent.* Notons finalement que ce principe implique en particulier que tous les angles droits sont égaux, comme le voulait Euclide par son quatrième postulat.

Euclide décrit ensuite la *géométrie naive* du plan par une liste d’énoncés suivis de leurs démonstrations, chaque démonstration ne dépendant que des Définitions et des Postulats, et bien sûr des énoncés démontrés auparavant. C’est exactement le schéma selon lequel on développe une théorie mathématique depuis ! Dans la suite, nous continuons notre survol de quelques Propositions d’Euclide, donnant à chaque fois une démonstration partant des Définitions et des Postulats d’Euclide ; et au fur et à mesure on pourra bien sûr utiliser des Propositions démontrées auparavant. Pour son intérêt historique, nous avons indiqué la numération des Propositions d’Euclide du texte original, vieux de 2300 ans. Par ailleurs, dans ce chapitre et le suivant, nous avons respecté *grosso modo* le développement d’Euclide, en laissant tomber les propositions qui ne sont pas strictement nécessaires, et en ajoutant d’autres qui nous semblent utiles pour faciliter le développement de la matière.

Triangles congruents

Proposition 1.8 (Proposition 5 d’Euclide) *Les angles à la base d’un triangle isocèle sont égaux.*

Démonstration. Par la Propostion 1.7, un triangle isocèle ABC donné (de base AB, disons) est congruent au triangle BAC : car en échangeant A et B on a bien sûr $|CA| = |CB|$, $|CB| = |CA|$ et $\angle ACB = \angle BCA$.



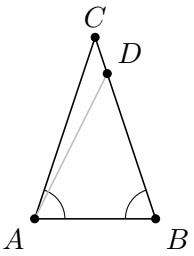
Il suit que $\angle CAB = \angle CBA$. □

La démonstration que donne Euclide de la Proposition 1.8, est différente—et un peu plus compliquée, comme s'il voulait cacher l'utilisation de la Proposition 1.7. Cela montre-t-il peut-être qu'Euclide avait du mal à l'accepter ?

Vient maintenant la réciproque de la proposition précédente :

Proposition 1.9 (Proposition 6 d'Euclide) *Si un triangle a deux angles égaux, alors les côtés qu'ils sous-tendent sont égaux.*

Démonstration. Soit un triangle ABC tel que $\angle CAB = \angle CBA$ mais $|AC| < |BC|$. On utilise la Proposition 1.4 pour placer un point D sur le segment BC tel que $|AC| = |BD|$.

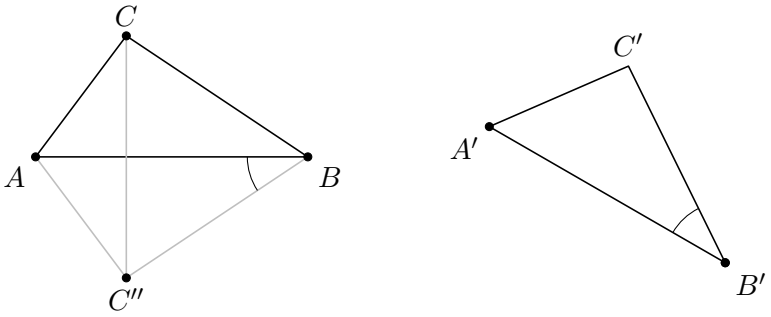


Ainsi le triangle CAB est congruent au triangle DBA (par la Proposition 1.7) et on doit avoir $\angle DAB = \angle CBA = \angle CAB$—et pourtant l'un angle contient strictement l'autre. Ceci est absurde, donc la condition $|AC| < |BC|$ est impossible. □

Notons que dans cette démonstration on fait une *réduction à l'absurde*. S'il est certainement vrai qu'Euclide préfère *construire* ses démonstrations, il accepte tout de même la logique classique (qui est non-constructive !), y compris l'axiome du tiers exclu.

Proposition 1.10 (Proposition 8 d'Euclide) *Deux triangles sont congruents s'ils ont leurs trois côtés égaux deux-à-deux.*

Démonstration. On note les triangles par ABC et $A'B'C'$, et on suppose que $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ et $|BC| = |B'C'|$. Par (la reformulation hilbertienne de) la Proposition 1.7, il existe un point C'', opposé au point C par rapport à la droite AB, tel que $\angle ABC'' = \angle A'B'C'$ et $|BC''| = |B'C'| = |BC|$ (et toujours $|A'B'| = |AB|$) :



Par construction, les triangles $A'B'C'$ et ABC'' sont congruents, et on a donc aussi $|AC| = |A'C'| = |AC''|$. Le segment CC' est la base de deux triangles isocèles CAC'' et CBC'' ; ainsi $\angle ACC'' = \angle AC''C$, et de même $\angle BCC'' = \angle BC''C$, par la Proposition 1.8. Faisant la somme des angles, il suit que $\angle ACB = \angle AC''B$: les triangles ABC et ABC'' sont congruents par la Propostion 1.7. Mais ce dernier était déjà congruent à $A'B'C'$, d'où la congruence voulue de ABC et $A'B'C'$. □

On laisse en exercice les quatre constructions suivantes ; mais attention, il est important de non-seulement les savoir faire, mais aussi de démontrer que ce que l'on fait est correct—et pour cela, on ne pourra utiliser que des résultats démontrés auparavant !

Proposition 1.11 (Proposition 9 d'Euclide) *Bissecter un angle.*

Proposition 1.12 (Proposition 10 d'Euclide) *Bissecter un segment.*

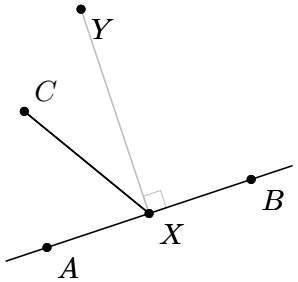
Proposition 1.13 (Proposition 11 d'Euclide) *Elever une droite perpendiculaire en un point d'une droite.*

Proposition 1.14 (Proposition 12 d'Euclide) *Abaisser une droite perpendiculaire d'un point sur une droite.*

Dans la démonstration de la proposition suivante, on voit clairement comment Euclide utilise une notion implicite d'*ordre* :

Proposition 1.15 (Proposition 13 d'Euclide) *Si en un point d'une droite on élève une demi-droite alors la somme des angles ainsi formés vaut deux angles droits.*

Démonstration. Dans un point X d'une droite AB, soit une demi-droite passant par C ; on élève également une (demi-)droite perpendiculaire à AB en X, soit XY.



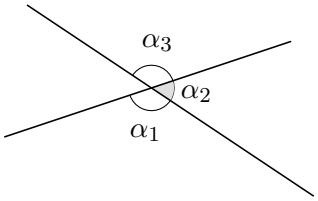
En parcourant les trois angles ainsi formés, il suit que

$$\begin{aligned}\angle AXC \ + \ \angle CXB \ &= \ \angle AXC \ + \ (\angle CXY \ + \ \angle YXB) \\ &= \ (\angle AXC \ + \ \angle CXY) \ + \ \angle YXB) \\ &= \ \angle AXY \ + \ \angle YXB \\ &= \ \perp \ + \ \perp \\ &= \ 2 \cdot \perp\end{aligned}$$

comme voulu. □

Proposition 1.16 (Proposition 15 d'Euclide) *Lors de l'intersection de deux droites, les angles opposés sont égaux.*

Démonstration. Notons les angles lors de l'intersection de deux droites :



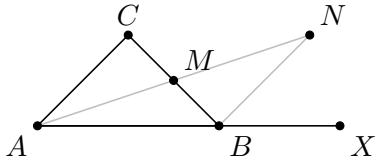
On utilise la Proposition 1.15 pour calculer que

$$\alpha_1 + (2 \cdot \perp) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (2 \cdot \perp) + \alpha_3$$

et on simplifie pour obtenir $\alpha_1 = \alpha_3$. □

Proposition 1.17 (Proposition 16 d'Euclide) *Dans un triangle, tout angle extérieur est (strictement) plus grand que chacun des angles intérieurs opposés.*

Démonstration. Soit un triangle ABC ; on prolonge le segment AB en un segment AX et on considère l'angle extérieur $\angle XBC$:



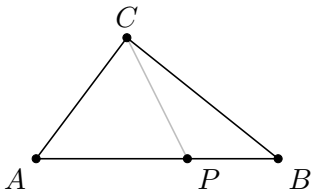
Par la Proposition 1.12 on bissecte le segment BC pour trouver le point M ; on trace la droite AM et, par un cercle de centre M et passant par A, on trouve le point N sur cette droite tel que $|AM| = |MN|$. Maintenant les triangles BMN et CMA sont congruents (on utilise les Propositions 1.16 et 1.7), donc $\angle ACM \ = \ \angle NBM$. On a ensuite que

$$\angle XBC \ = \ \angle XBM \ > \ \angle NBM \ = \ \angle ACM \ = \ \angle ACB.$$

On laisse en exercice la vérification qu'aussi $\angle XBC \ > \ \angle BAC$. □

Proposition 1.18 (Proposition 18 d'Euclide) *Dans un triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle.*

Démonstration. Soit un triangle ABC avec $|AB| > |AC|$.



Par un cercle de centre A et passant par C, on trouve un point P sur le segment AB tel que $|AP| = |AC|$; le segment PC est la base du triangle isocèle APC. On a alors

$$\begin{aligned} \angle ACB &> \angle ACP \\ &= \angle APC \quad \text{(triangle isocèle, Proposition 1.8)} \\ &> \angle ABC \quad \text{(angle extérieur, Proposition 1.17)} \end{aligned}$$

comme voulu. □

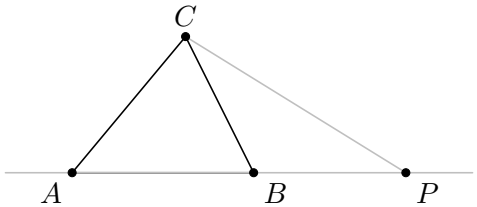
Proposition 1.19 (Proposition 19 d'Euclide) *Dans un triangle, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

Démonstration. Si ce ne serait pas le cas, alors la Proposition 1.18 mène à l'absurde. □

Vient maintenant un résultat aujourd'hui connu sous le nom de "inégalité triangulaire" :

Proposition 1.20 (Proposition 20 d'Euclide) *Dans un triangle, la somme de deux côtés est supérieure au troisième.*

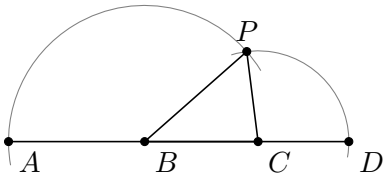
Démonstration. Soit un triangle ABC ; nous allons montrer que $|AB| + |BC| > |AC|$. Notons l'intersection de la droite AB avec le cercle de centre B et point de passage C par P. Ainsi le segment CP est la base du triangle isocèle CPB.



Il vient que $\angle ACP > \angle BCP = \angle BPC$ (par la Proposition 1.8), et donc la Proposition 1.19 implique que $|AP| > |AC|$. Par construction on a $|AP| = |AB| + |BP| = |AB| + |BC|$, donc le résultat suit. □

Proposition 1.21 (Proposition 22 d'Euclide) *Construire un triangle de côtés données, chacune des longueurs étant (strictement) inférieure à la somme des deux autres.*

Démonstration. Par la Proposition 1.4, on peut toujours aligner les 3 longueurs :



Les hypothèses assurent que le cercle de centre B et passant par A intersecte le cercle de centre C et passant par D (en deux points). Choisissant un point d'intersection P, on obtient le triangle demandé. □

Comme si pour réparer l'inadéquation de son Postulat 4 (et la Proposition 1.7), Euclide ajoute une méthode pour "déplacer un angle" :

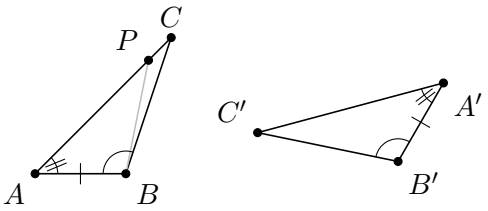
Proposition 1.22 (Proposition 23 d'Euclide) *En un point d'une droite, tracer une demi-droite faisant un angle donné.*

Démonstration. A l'aide d'un triangle on peut "fixer" l'angle donné, puis avec les Propositions 1.4 et 1.21 on peut le placer où on veut. □

Revenons, pour terminer ce premier chapitre, aux triangles congruents.

Proposition 1.23 (Proposition 26 d'Euclide) *Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, et si ces deux triangles ont aussi un côté égal – soit le côté inclus entre les angles égaux, soit le côté opposé à un des angles égaux – alors ces triangles sont congruents.*

Démonstration. Voici une démonstration pour le premier critère de congruence ; le deuxième est laissé en exercice. Pour deux triangles ABC et $A'B'C'$ on suppose que $|AB| = |A'B'|$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ et $\angle CBA = \angle C'B'A'$.

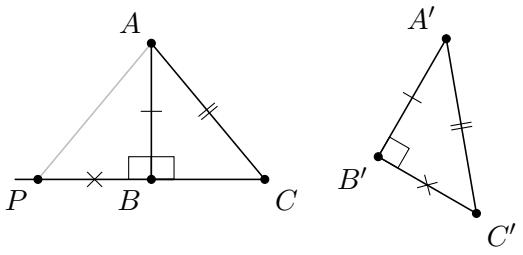


Si $|AC| > |A'C'|$, alors par la Proposition 1.4 on peut construire un point P sur AC tel que $|AP| = |A'C'|$. Mais par la Proposition 1.7 il suit alors que le triangle ABP est congruent au triangle $A'B'C'$, et en particulier $\angle ABP = \angle A'B'C'$. Mais ceci est impossible puisque $\angle ABP < \angle ABC$ et ce dernier est égal à $\angle A'B'C'$ par hypothèse. Ainsi on a $|AC| \leq |A'C'|$, et en inversant les rôles des deux triangles, on trouve aussi $|AC| \geq |A'C'|$, donc l'égalité $|AC| = |A'C'|$. On obtient finalement la congruence des triangles ABC et $A'B'C'$ par la Proposition 1.7. □

Pour faciliter la suite de ce cours, nous incluons le résultat suivant, certainement connu par Euclide, même s'il ne l'a pas explicitement écrit :

Proposition 1.24 *Si deux triangles rectangles ont même hypothénuse et un autre côté égal, alors ils sont congruents.*

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en B, soit $A'B'C'$ un triangle rectangle en B', et supposons que $|AB| = |A'B'|$ ainsi que $|AC| = |A'C'|$.



On prolonge BC puis on place un point P (du côté opposé de C) de manière que $|BP| = |B'C'|$. Puisque $\angle ABP = \perp = \angle A'B'C'$, le triangle ABP est congruent au triangle $A'B'C'$ (par la Proposition 1.7), et il vient que $|AP| = |A'C'| = |AB|$. Le triangle PAC est ainsi isocèle (de base PC), donc

$$\begin{aligned} \angle ACB &= \angle APB \quad \text{(Proposition 1.8)} \\ &= \angle A'C'B' \quad \text{(par congruence)} \end{aligned}$$

et ainsi ABC est congruent à $A'B'C$ par la Proposition 1.23. □

Résumons les différents critères de congruence de deux triangles dans le plan :

Théorème 1.25 *On a la congruence de deux triangles dans les situations suivantes :*

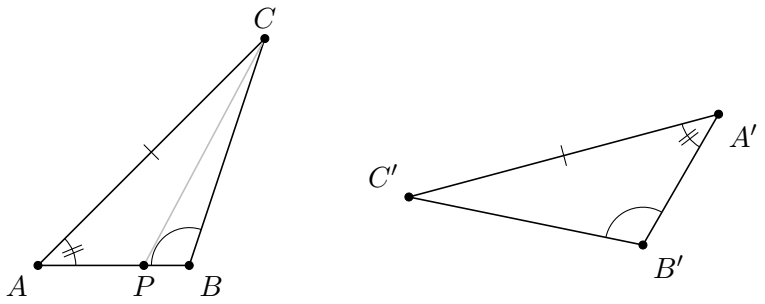
1. *"côté-angle-côté" (CAC) : ils ont deux côtés et l'angle inclus égaux,*
2. *"côté-côté-côté" (CCC) : ils ont trois côtés égaux,*
3. *"angle-côté-angle" (ACA) : ils ont deux angles et le côté inclus égaux,*
4. *"angle-angle-côté" (AAC) : ils ont deux angles et un côté opposé égaux,*
5. *"angle-droit-côté-hypothénuse" (ADCH) : il s'agit de deux triangles rectangles qui ont hypothénuse et un autre côté égaux.*

Par ailleurs, le deuxième critère de congruence (CCC) implique la propriété remarquable que toute transformation du plan laissant inchangées les distances (les longueurs de segments), laisse aussi inchangés les angles. La réciproque n'est pas vraie !

Exercices

Pour résoudre les exercices suivants, on fera attention à n'utiliser que des Propositions démontrées auparavant.

1. Donner la démonstration de la Proposition 1.4 dans le cas où $|AB| < |BC|$.
2. Montrer que la relation de congruence de triangles est une relation d'équivalence.
3. Démontrer la Proposition 1.11 : Bissecter un angle.
4. Démontrer la Proposition 1.12 : Bissecter un segment.
5. Démontrer la Proposition 1.13 : Elever une perpendiculaire en un point d'une droite.
6. Démontrer la Proposition 1.14 : Abaisser une perpendiculaire d'un point sur une droite.
7. Détailler la démonstration de la Propostion 1.21 : montrer que les hypothèses assurent en effet que les deux cercles s'intersectent (en deux points).
8. Construire un triangle rectangle isocèle dont un côté de l'angle droit est donné. Montrer qu'il n'existe pas de triangle isocèle avec un angle droit à la base.
9. Médiatrice d'un segment. Soit M le milieu d'un segment AB. Montrer qu'un point $P \neq M$ est équidistant aux deux points A et B si et seulement si PM est perpendiculaire à AB.
10. Compléter la démonstration de la Proposition 1.23 : démontrer le critère "angle-angle-côté" (AAC) pour la congruence de deux triangles. Indication : Pour deux triangles ABC et $A'B'C'$ on suppose que $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, et $|AC| = |A'C'|$.



Si $|AB| > |A'B'|$ on peut poser un point P sur le segment AB pour que $|AP| = |A'B'|$, et alors les triangles APC et $A'B'C'$ sont congruents, mais pourtant $\angle APC = \angle A'B'C' = \angle ABC$ contredit la Proposition 1.17.

11. Pour mesurer la distance d'un point P à un (segment de) droite AB, on abaisse une perpendiculaire de ce point à cette droite, et on mesure la distance de P au point d'intersection de AB avec ladite perpendiculaire. (Nous verrons plus tard que cette perpendiculaire est unique, donc ce procédé est parfaitement légitime.) Soit maintenant un angle donné. Montrer qu'un point P est équidistant aux deux jambes de l'angle si et seulement si P est un point de la bissectrice de l'angle.
12. Montrer : ABC est un triangle isocèle de base BC si et seulement si la bissectrice en A est perpendiculaire à BC, si et seulement si la médiatrice de BC passe par A, si et seulement si

la bissectrice en A est la médiatrice de BC, si et seulement si la bissectrice en A passe par le milieu de BC.

13. A-t-on le critère “angle-angle-angle” (AAA) pour la congruence de triangles ? Et le critère “angle-côté-côté” (ACC) ?

— 2 —

Droites parallèles

Pour une droite donnée, nous construisons une droite parallèle passant par un point donné, puis nous montrons l'équivalence du fameux cinquième postulat d'Euclide avec l'unicité de cette droite parallèle. De ces considèrations nous déduisons quelques formules classiques : pour la somme des angles d'un triangle, pour l'aire d'un triangle et d'un parallélogramme, etc. Finalement nous montrons le théorème de Pythagore (et sa réciproque). En exercice nous démontrons quelques affirmations classiques concernant les parallélogrammes, les rectangles et les losanges, et nous esquissons (sans détails techniques, faute de temps) un exemple de "géométrie non-euclidienne" : le demi-plan hyperbolique de Poincaré.

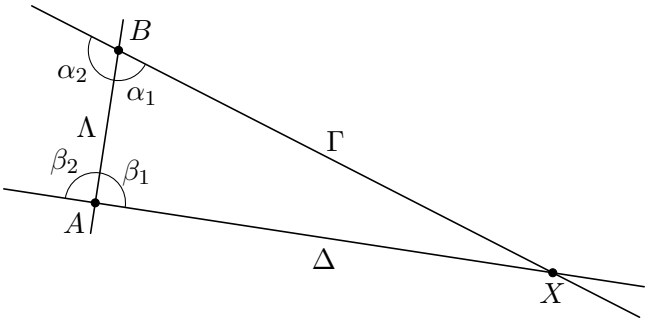
Après l'étude de triangles congruents, place aux droites parallèles ! Bien que, pour Euclide, une droite est toujours déterminé par deux points distincts, il nous arrivera de ne pas expliciter ces points de passage, pour ne pas alourdir les notations. A la place, on nommera les droites par une lettre grecque majuscule (Δ, Γ, Λ, ...), laissant sous-entendu qu'elles ont été déterminées par deux points. Rappelons enfin que, pour Euclide, deux droites (dans le plan) sont parallèles si elles n'ont aucun point en commun.

Cinquième Postulat d'Euclide

Tous les résultats du premier chapitre ont été démontrés à partir des quatre premiers Postulats d'Euclide. Aussi les premiers résultats de ce deuxième chapitre peuvent être démontrés sans avoir recours au cinquième Postulat d'Euclide. Commençons par établir la construction de droites parallèles :

Proposition 2.1 (Proposition 27 d'Euclide) *Si une droite en coupe deux autres de sorte que les angles alternes internes soient égaux, alors les droites sont parallèles.*

Démonstration. Supposons que, au contraire, une droite Λ intersecte deux droites Δ et Γ, qui elles-mêmes s'intersectent—soit :

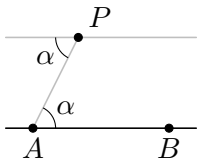


Alors $\alpha_2 > \beta_1$ parce que α_2 est un angle extérieur du triangle XAB (Proposition 1.17), et par un même raisonnement $\alpha_1 < \beta_2$; somme toute, les angles alternes internes sont différents. On obtient le résultat par contraposée. □

Si, partant de la définition de parallélisme, on souhaite vérifier si deux droites n'ont aucun point en commun, on devrait en principe parcourir une de ces deux droites pour contrôler chacun de ses points—cela prendrait un temps infini. La Proposition ci-dessus permet d'effectuer cette vérification "en temps fini" : il suffit de poser une droite supplémentaire et de vérifier l'égalité de deux angles. Autrement dit, cette Proposition permet un contrôle "local" d'un phénomène "global".

Proposition 2.2 (Proposition 31 d'Euclide) *Par un point à l'extérieur d'une droite, mener une parallèle à cette droite.*

Démonstration. Soit P un point extérieur à la droite AB.



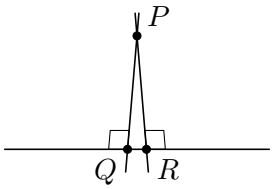
Par Proposition 1.22 on peut transporter l'angle $\angle PAB$ au point P, et par la Proposition 2.1 on obtient ainsi la droite parallèle demandée. □

Bien sûr, on peut tracer une parallèle en faisant "deux fois une perpendiculaire" : d'abord abaisser une perpendiculaire du point extérieur à la droite (Proposition 1.14), puis élever une perpendiculaire en ce point P (Proposition 1.13).

Ci-dessus on prouve en particulier l'*existence* d'une droite parallèle à une droite passant par un point, et la Proposition 1.14 avait déjà attesté de l'*existence* d'une perpendiculaire à une droite passant par un point. On va maintenant s'intéresser à l'*unicité* de ces deux constructions.

Proposition 2.3 *La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est unique.*

Démonstration. Soit P un point extérieur à une droite, et supposons que deux droites (distinctes) perpendiculaires passent par P.



La droite QR est sécante aux droites PQ et PR, et les angles internes alternes (aux points Q et R) sont égaux (à $\perp$), donc par la Proposition 2.1 les deux droites PQ et PR sont parallèles—ce qui est absurde puisqu'elles s'intersectent en P. □

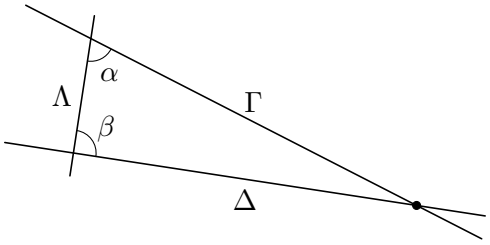
Bien sûr, on peut montrer un même résultat pour la droite perpendiculaire en un point d'une droite (exercice).

Jusqu'à présent nous n'avons pas encore utilisé le cinquième Postulat d'Euclide ! Nous en aurons besoin maintenant, pour montrer l'*unicité* d'une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Il est donc grand temps d'introduire :

Postulat 2.4 (Cinquième Postulat d'Euclide)

5. *Si une droite tombant sur deux droites fait une somme d'angles intérieurs du même côté plus petite que deux angles droits, alors ces droites, prolongées indéfiniment, se rencontreront du côté où la somme des angles est plus petite que deux angles droits.*

Avec un dessin : soit une droite Λ, sécante à deux droites Δ et Γ.

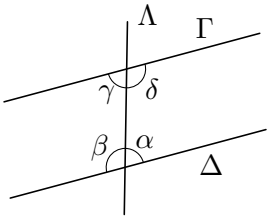


Si $\alpha + \beta < 2 \cdot \perp$ alors Γ et Δ s'intersectent du côté de ces angles.

Avec le cinquième Postulat d'Euclide, nous pouvons d'abord démontrer la réciproque de la Proposition 2.1 :

Proposition 2.5 (Proposition 29 d'Euclide) *Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes internes sont égaux et la somme des angles internes d'un même côté égale deux angles droits.*

Démonstration. On suppose qu'une droite Λ coupe deux droites parallèles, Δ et Γ.



Par la Proposition 1.15 on sait que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \cdot \perp \\ \gamma + \delta = 2 \cdot \perp \end{cases}$$

On ne peut pas avoir $\beta + \gamma < 2 \cdot \perp$ car le cinquième Postulat d'Euclide impliquerait alors que les droites Δ et Γ s'intersectent ; et pour la même raison aussi $\alpha + \delta < 2 \cdot \perp$ est impossible. Puisque $(\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 4 \cdot \perp$, on a nécessairement que

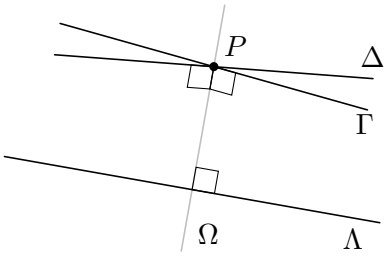
$$\begin{cases} \beta + \gamma = 2 \cdot \perp \\ \alpha + \delta = 2 \cdot \perp \end{cases}$$

De plus, il suit immédiatement des deux systèmes d'équations que $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$. □

Arrive finalement le résultat annoncé d'unicité de parallèle :

Proposition 2.6 *La parallèle à une droite passant par un point à l'extérieur de la droite est unique.*

Démonstration. Supposons que deux droites Δ et Γ sont parallèles à une droite Λ, et passent par un point P.

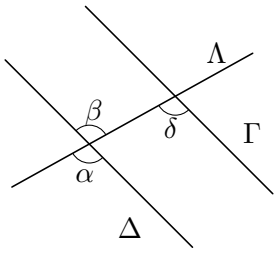


Par la Proposition 1.14, on peut abaisser du point P une droite perpendiculaire à Λ, soit Ω. La Proposition 2.5 implique que, au point P, les deux droites Δ et Γ sont perpendiculaires à Ω. Par unicité de perpendiculaire, ces deux droites coïncident donc. □

En fait, Hilbert démontrera – 2000 ans après Euclide ! – que la Proposition 2.6 est *équivalent* au cinquième Postulat d'Euclide. En montrant l'existence de géométries satisfaisant aux quatre premiers Postulats mais pas le cinquième, il établit l'indépendence du dernier. Nous y reviendrons en exercice.

On peut résumer :

Théorème 2.7 *Pour deux droites coupées par une troisième,*



les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Δ *est parallèle à* Γ,
2. $\alpha = \delta$,
3. $\beta = \delta$.

Le détail de la démonstration se fera en exercice, ainsi que la preuve de l'assertion suivante :

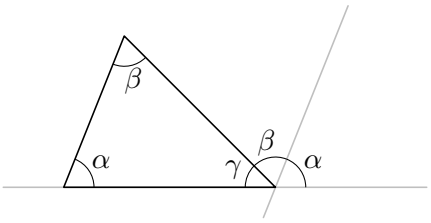
Proposition 2.8 (Proposition 30 d'Euclide) *Deux droites parallèles à une troisième droite, sont parallèles entre elles.*

Théorème de Pythagore

Le reste de ce chapitre est consacré à quelques résultats classiques de la géométrie du plan, comme le fait que "la somme des angles d'un triangle fait 180°" :

Proposition 2.9 (Proposition 32 d'Euclide) *Dans un triangle, un angle externe égale la somme des deux angles internes opposés, et la somme des angles internes égale deux angles droits.*

Démonstration. On construit la droite parallèle à un côté et passant par le sommet opposé du triangle.



Graçe au Théorème 2.7 on peut identifier plusieurs angles, et le résultat est immédiat. □

Dans la suite on utilisera la notion de *parallélogramme* : un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. On supposera par ailleurs toujours que les côtés d'un quadrilatère ne s'intersectent qu'aux sommets, et qu'un quadrilatère est convexe.

Proposition 2.10 (Proposition 33 d'Euclide) *Si, dans un quadrilatère, deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur, alors il est de même des deux autres côtés opposés. (Il s'agit donc d'un parallélogramme.)*

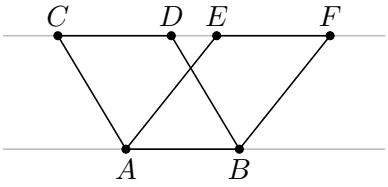
Proposition 2.11 (Proposition 34 d'Euclide) *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux, les angles opposés sont égaux, et les diagonales bissectent le parallélogramme en deux triangles congruents.*

Les démonstrations des Propositions 2.10 et 2.11 se feront en exercice.

Pour continuer, on aura besoin de la notion d'*aire* d'une figure—ce qui pour Euclide est le "contenu" de (ou "la surface couverte" par) la figure, et non pas un nombre ! Ainsi, l'égalité des aires de deux figures doit être établie "en découpant et recouvrant", comme suit :

Proposition 2.12 (Proposition 35 d'Euclide) *Si deux parallélogrammes ont un côté commun et le côté opposé sur une même droite, alors ils ont même aire.*

Démonstration. On considère la situation suivante :



On utilise le Théorème 2.7 et la Proposition 2.11 pour identifier certains angles et certains segments, puis le Théorème 1.25 pour montrer que les triangles CAE et DBF sont congruents (exercice : compléter les détails). Puis "en découpant et recomposant" les surfaces, il vient immédiatement que l'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à l'aire du parallélogramme $ABEF$. □

Une fois de plus, là où Euclide fait appel à l'intuition, Hilbert va montrer comment on peut axiomatiser la notion d'aire d'une figure. On laisse en exercice les démonstrations de :

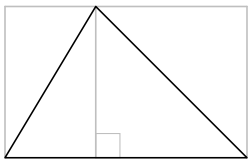
Proposition 2.13 (Proposition 37 d'Euclide) *Si deux triangles de même base ont le sommet opposé sur une droite parallèle à la base, alors ils ont même aire.*

Proposition 2.14 (Proposition 41 d'Euclide) *Si un triangle et un parallélogramme ont la même base, et si le sommet opposé à la base du triangle est sur la droite déterminée par le côté opposé du parallélogramme, alors l'aire du parallélogramme est deux fois l'aire du triangle.*

Cette dernière proposition implique en particulier la fameuse formule

$$\text{aire de triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

par considération de la figure suivante (voir aussi les exercices) :

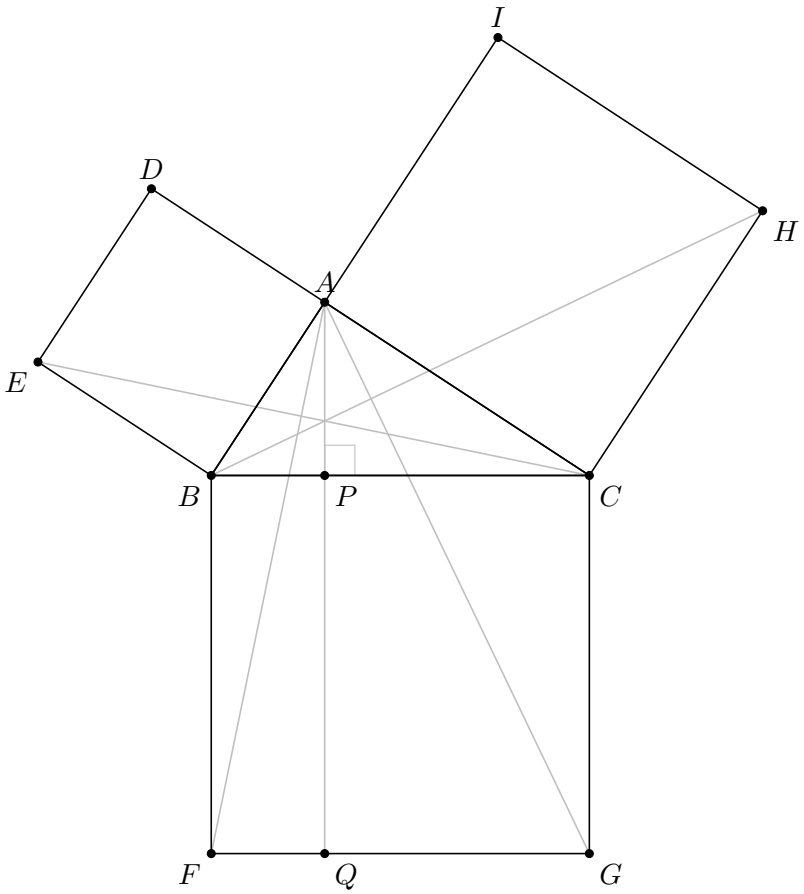


Il est par ailleurs facile de voir que le choix de base n'a pas d'importance pour le calcul de l'aire du triangle (exercice).

Puisqu'on sait construire des angles droits, on sait parfaitement construire des *rectangles* (des quadrilatères dont chaque angle est droit), et en particulier des *carrés* (rectangles dont les quatre côtés sont egaux) ; on le détaillera en exercice. Cela nous permet de finir ce chapitre en beauté avec le célèbre :

Proposition 2.15 (Proposition 47 d'Euclide—Théorème de Pythagore) *Le carré élevé sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle égale la somme des aires des carrés élevés sur les deux autres côtés.*

Démonstration. Soit un triangle ABC, rectangle en A ; on construit les carrés sur ses côtés.

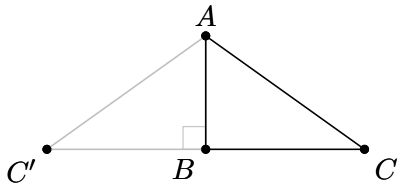


Du point A, on abaisse une perpendiculaire à BC ; soit P le point d'intersection avec BC, et Q le point d'intersection avec FG. On obtient facilement que AQ est parallèle à BF ; l'aire du triangle BFA est donc la moitié de l'aire du rectangle $BFPQ$. Maintenant on observe que le triangle ABF est congruent au triangle EBC, dont l'aire est la moitié de l'aire du carré $EBAD$. On fait un même raisonnement pour le triangle CGA, et on peut conclure. (Exercice : ajouter tous les détails de cette démonstration... et indiquer où exactement on utilise l'hypothèse que ABC est un triangle rectangle en A !) □

Moins bien connu est le fait qu'aussi la réciproque est vraie :

Proposition 2.16 (Proposition 48 d'Euclide) *Si le carré construit sur un côté d'un triangle est la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.*

Démonstration. Soit le triangle ABC tel que $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$. On construit un nouveau triangle ABC' avec C' sur la droite perpendiculaire sur AB et à distance $|BC|$ de B (exercice : donner les détails de la construction).

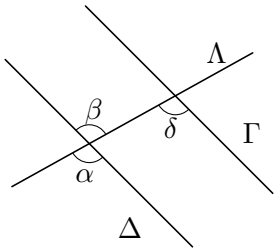


Par le Théorème 2.15 on sait que $|AB|^2 + |BC'|^2 = |AC'|^2$. Mais puisque $|BC| = |BC'|$ on a également $|AC|^2 = |AC'|^2$, d'où $|AC| = |AC'|$. Les deux triangles sont ainsi congruents (on utilise le Théorème 1.25), et ABC est nécessairement aussi rectangle en B. □

Dans la démonstration, on utilise le fait que deux carrés ont le même aire si et seulement s'ils ont le même côté (exercice).

Exercices

1. Démontrer l'unicité de la droite perpendiculaire en un point d'une droite donnée.
2. Démontrer le Théorème 2.7 : Pour deux droites coupées par une troisième,



   les conditions suivantes sont équivalentes :

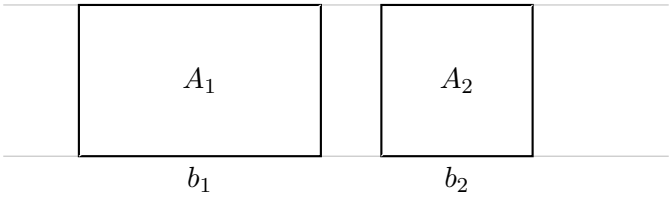
   a) Δ est parallèle à Γ,
   b) $\alpha = \delta$,
   c) $\beta = \delta$.

3. Démontrer que, si deux droites Δ et Γ sont parallèles, et une troisième droite Λ est sécante à Δ, alors Λ est aussi sécante à Γ. En déduire la démonstration de la Proposition 2.8 : deux droites (distinctes) parallèles à une troisième droite, sont parallèles entre elles.
4. Axiome de Playfair. Montrer que, dans la présence des 4 premiers Postulats d'Euclide, le 5e Postulat est équivalent à l'"axiome de Playfair" : pour tout point et toute droite, il existe au plus une droite parallèle passant par ce point.
5. Démontrer la Proposition 2.10 : Si, dans un quadrilatère, deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur, alors il en est de même pour les deux autres côtés opposés. Conclure qu'il s'agit donc d'un parallélogramme.
6. Démontrer la Proposition 2.11 : Dans un parallélogramme,

   a) les côtés opposés sont égaux,
   b) les angles opposés sont égaux,

c) les diagonales bissectent le parallélogramme en deux triangles congruents.

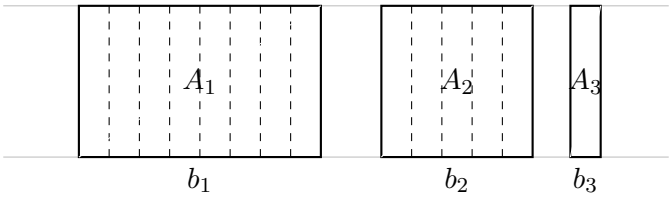
7. Démontrer la Proposition 2.13 : Si deux triangles ont la même base et leurs sommets opposés à la base sur une droite parallèle à la base, alors ils ont la même aire.
8. Nous avons démontré que, si deux triangles ont la même base et leurs sommets opposés à la base sur une droite parallèle, alors ils ont même aire. Formuler et démontrer la réciproque.
9. Soit deux rectangles dans la situation suivante :



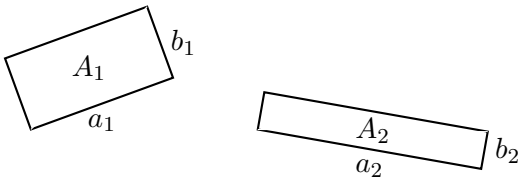
Notons A_1 l'aire du rectangle de base b_1, et A_2 l'aire du rectangle de base b_2. Nous *accepterons* alors que la proportion des aires est égale à la proportion des longueurs des bases :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2}. \qquad (*)$$

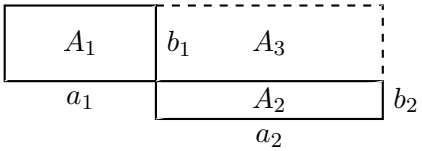
(Cette égalité de proportions est évidente lorsqu'on peut "recouvrir" chacun des rectangles donnés par un nombre (naturel) de copies d'un troisième rectangle :



On dit alors que les deux rectangles donnés sont *commensurables*, le troisième rectangle étant leur *commune mesure*. Pour démontrer la formule $(*)$ dans le cas général, Euclide utilise une définition d'égalité de proportions basée essentiellement sur ce qu'on appelle aujourd'hui l'Axiome d'Archimède. Cela souligne que l'égalité de proportions (de nombres réels) est de nature essentiellement *analytique*.) En déduire que, pour deux rectangles quelconques,

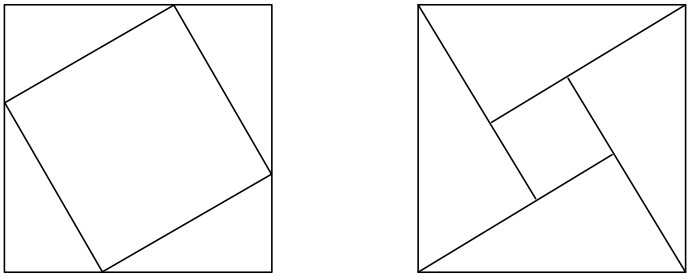


on a l'égalité des proportions A_1/A_2 et $(a_1 \times b_1)/(a_2 \times b_2)$. Indication : placer et compléter les rectangles comme suit :

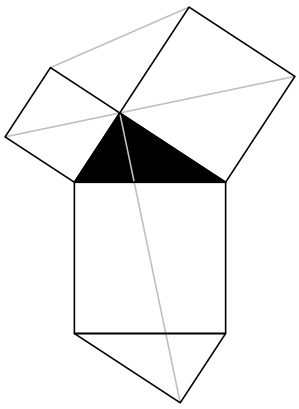


puis appliquer deux fois la formule $(*)$ à $A_1/A_2 = (A_1/A_3)/(A_2/A_3)$. Finalement, en déduire la formule $A = a \times b$ pour l'aire d'un rectangle de côtés a et b que l'on mesure par rapport à une unité de longueur aux choix.

10. Montrer que, pour tout choix de base dans un triangle, on obtient la même aire par la formule "$\frac{1}{2}$(base $\times$ hauteur)".
11. Montrer que tout rectangle est un parallélogramme.
12. Construire un rectangle de deux segments donnés.
13. Construire un carré sur un segment donné. Montrer que deux carrés ont le même aire si et seulement si ils ont le même côté.
14. Montrer qu'un quadrilatère convexe est un losange (un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur) si et seulement si les diagonales sont perpendiculaires et se bissectent. Montrer que les diagonales bissectent les angles du losange, et que les quatre triangles obtenus par découpage du losange par ses diagonales sont congruents.
15. Montrer qu'un quadrilatère convexe est un rectangle si et seulement si les diagonales sont égales et se bissectent.
16. Donner des démonstrations du Théorème de Pythagore à l'aide des dessins suivants (et en n'utilisant que les Propositions d'Euclide démontrées *avant* la Proposition 2.15 !) :



17. Une démonstration par Leonardo Da Vinci. Etant donné le triangle rectancle noir, identifier ci-dessous quatre quadrilatères de même aire, et en déduire le Théorème de Pythagore :



18. Exemple d'une géométrie non-euclidienne : le demi-plan hyperbolique de Poincaré. Dans le plan d'Euclide, on fixe une droite I, puis on considère tous les points strictement d'un côté de cette droite ; on appellera ce demi-plan $\mathcal{H}$. On décrète qu'une droite hyperbolique dans $\mathcal{H}$ est soit

une demi-droite perpendiculaire à I (dans le plan d'Euclide), soit un demi-cercle dont le centre appartient à I (dans le plan d'Euclide). Montrer que :

a) deux points de $\mathcal{H}$ déterminent une (et une seule) droite,

b) le 5e Postulat d'Euclide est faux dans $\mathcal{H}$.

Dans la suite, on identifiera (de manière évidente) le demi-plan $\mathcal{H}$ avec l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$. Par définition, un cercle hyperbolique de centre (x_h, y_h) et de rayon r_h dans $\mathcal{H}$ est le cercle euclidien de centre (x_e, y_e) et rayon r_e de telle sorte que

$$(x_h, y_h) = (x_e, \sqrt{y_e^2 - r_e^2}) \text{ et } r_h = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y_e + r_e}{y_e - r_e} \right).$$

On admettra qu'ainsi on peut toujours tracer un cercle hyperbolique de centre et point de passage donnés dans $\mathcal{H}$.

c) Soit le cercle euclidien de centre $(2, 2)$ et rayon 1. Où se trouve (approximativement) son centre hyperbolique et quel est son rayon hyperbolique ? Même question pour le cercle euclidien de centre $(2, 4)$ et rayon 1, puis pour le cercle euclidien de centre $(4, 2)$ et rayon 1.

d) Pour résumer, si on "déplace" un cercle euclidien dans $\mathcal{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, comment changent son centre et rayon hyperboliques ?

Pour conclure : nous avons ainsi observé que, dans $\mathcal{H}$, les quatre premiers Postulats d'Euclide sont satisfaits, mais pas le cinqième.

— 3 —

Triangles et cercles

Nous démontrons quelques grands classiques de la géométrie grecque : rectangularité d'un triangle construit sur la diagonale d'un cercle, cercles inscrits et circonscrits d'un triangle, et égalité des angles sur une même corde de cercle. Nous définissons la notion de polygone régulier à n côtés, puis établissons une condition sur l'angle central de son triangle fondamental. La construction de l'hexagone régulier mène aussitôt à la construction des polygones réguliers pour $n = 2^k \cdot 3$ et $n = 2^k$. Nous finissons avec la définition d'Archimède du nombre π, et la formule d'aire et de circonférence du cercle. (Faute de temps, nous ne développons pas la "méthode d'exhaustion" d'Eudoxe, et donc nous ne donnons que des esquisses de démonstration des résultats d'Archimède.) Plusieurs démonstrations sont laissées en exercice, ainsi qu'une approximation du nombre π par des hexagones inscrits et circonscrits.

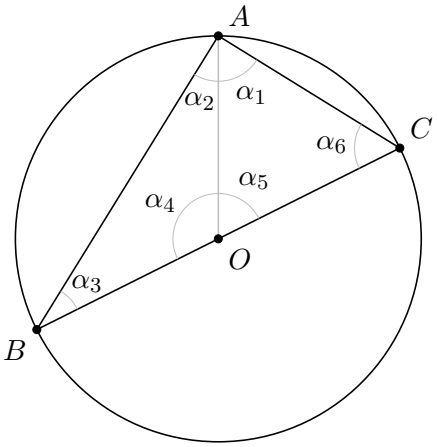
Jusqu'à présent nous avons repris (et commenté) *grosso modo* le premier livre d'Euclide (de 13 livres au total !). Malheureusement nous n'avons pas le temps pour traiter en détail les 12 autres livres d'Euclide. Cependant, dans ce chapitre nous allons découvrir quelques résultats d'Euclide (et d'Archimède) sur les polygones, sans pour autant toujours respecter l'ordre historique de ces résultats. Le style des démonstrations sera aussi un peu plus "moderne"—mais évidemment on fera toujours attention à n'utiliser que des résultats démontrés auparavant !

Cercle inscrit et cercle circonscrit

Plus loin on s'intéressera surtout aux polygones réguliers inscrits dans un cercle, mais on prépare d'abord le terrain avec quelques "classiques" :

Proposition 3.1 *Tout triangle construit sur une diagonale d'un cercle est rectangle (au point opposé à la diagonale).*

Démonstration. Soit un triangle ABC dont BC est la diagonale d'un cercle et A est un point du même cercle.

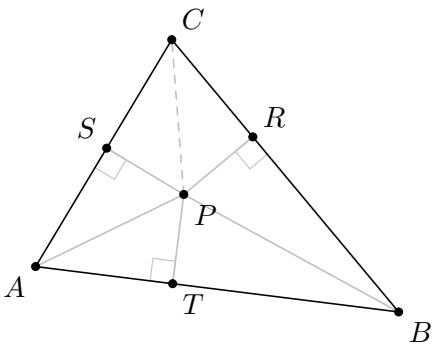


Les triangles OAC et OAB sont isocèles, et donc $\alpha_6 = \alpha_1$ ainsi que $\alpha_2 = \alpha_3$. La somme des angles d'un triangle faisant deux angles droits, on a aussi $2 \cdot \alpha_1 + \alpha_5 = 2 \cdot \perp = 2 \cdot \alpha_2 + \alpha_4$. Puisque par définition $\alpha_4 + \alpha_5 = 2 \cdot \perp$, le résultat suit par un simple calcul. □

Rappelons qu'en exercice (voir Chapitre 1) nous avons montré que les points sur la bissectrice d'un angle sont équidistants aux jambes de l'angle. Ce résultat sera utilisé dans la démonstration de :

Proposition 3.2 *Les bissectrices des trois angles d'un triangle sont sécantes en un point.*

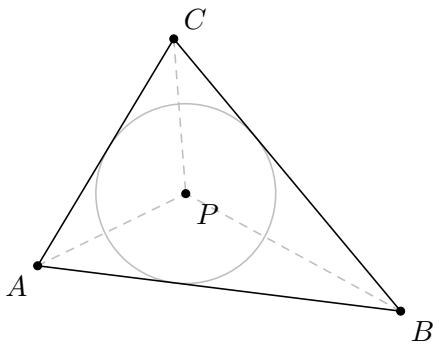
Démonstration. Soit un triangle ABC et P le point d'intersection des bissectrices des angles en A et en B ; ce point P se trouve "à l'intérieur" du triangle [1].



On abaisse des perpendiculaires du point P aux trois côtés du triangle, et on trouve des points d'intersection R, S et T. Nous savons donc que $|PS| = |PT| = |PR|$ et il suit que les triangles rectangles PSC et PRC sont congruents (par le critère "angle droit-côté-hypothénuse"). Nous avons en particulier que $\angle SCP = \angle RCP$: la (demi-)droite CP est la bissectrice de l'angle en C. Ainsi les trois bissectrices du triangle s'intersectent en P. □

Dans cette démonstration, on montre en particulier l'équidistance du point d'intersection des trois bissectrices aux trois côtés du triangle donné : c'est donc le centre d'un *cercle inscrit* dans le triangle.

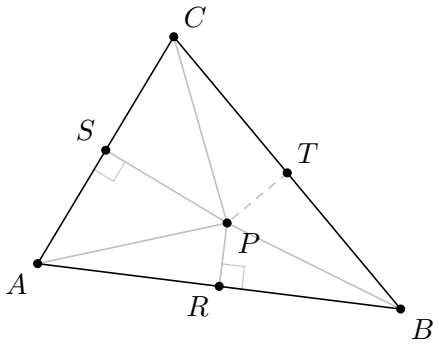
1. Pour Euclide c'est une évidence, mais Hilbert s'est apperçu qu'il faut justifier ceci, notamment par les axiomes d'ordre que nous avons déjà évoqués antérieurement.



Voici un autre grand classique, concernant les *médiatrices* (c'est à dire, les droites perpendiculaires au milieu d'un segement) :

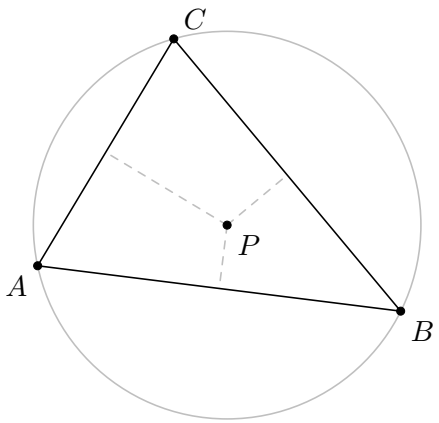
Proposition 3.3 *Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont sécantes en un point.*

Démonstration. Soit un triangle ABC et P le point d'intersection des médiatrices des segments AB et AC.



On note R, S et T les milieux des segments AB, AC et BC. Par construction les triangles ARP et BRP sont (rectangles en S et) congruents (par le critère "côté-angle-côté") ; il suit que $|PA| = |PB|$. Par un même raisonnement on obtient $|PA| = |PC|$. Puisque $|CT| = |BT|$ par construction, aussi les triangles CTP et BTP sont congruents (par le critère "côté-côté-côté"), et donc le segment PT est orthogonal au segment BC : PT est la médiatrice sur BC. Ainsi les trois médiatrices du triangle s'intersectent (en P). □

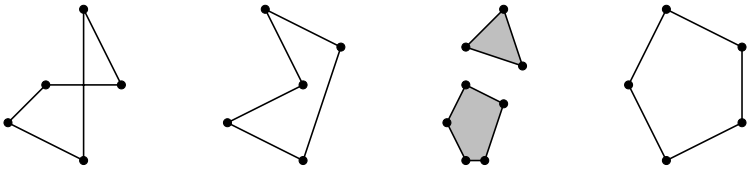
Ci-dessus, par équidistance du point d'intersection des trois médiatrices aux trois sommets du triangle donné, on découvre le *cercle circonscrit* du triangle :



On observe tout de même que, une fois de plus, on se sert d'un dessin pour "comprendre" les démonstrations. C'est un exercice facile de refaire ces constructions avec des triangles "de toute sorte", p.e. un triangle obtusangle. Car en effet, ces démonstrations sont parfaitement valables dans toute géométrie satisfaisant aux axiomes de Hilbert.

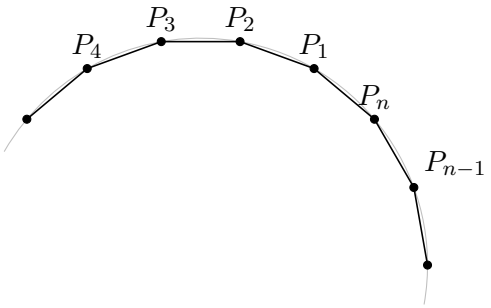
Polygones réguliers

On passe maintenant à l'étude des *polygones*. De manière générale, une telle figure est un ensemble fini de points reliés par des segments ; on parle des sommets et des côtés du polygone en question.



Dans la suite, tous les polygones seront supposés *convexes* ; des quatre exemples ci-dessus, seul le dernier est donc qualifié. Bien sûr les triangles et parallélogrammes sont des exemples.

Nous allons nous intéresser particulièrement aux *polygones réguliers* : un tel polygone est déterminé par un choix de n points sur un cercle, chaque point étant relié à ses deux voisins, de telle sorte que la distance d'un point au point voisin est constante :

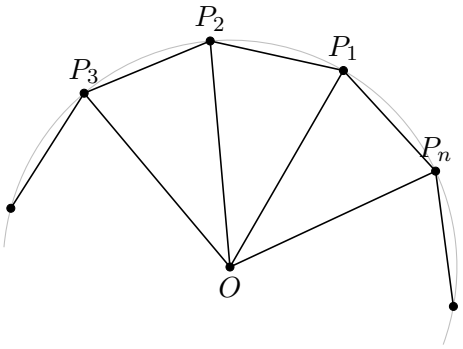


Pour être bref, on appellera une telle figure un *n-gone régulier*. Il est clair que $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ sont les cas dégénérés : on les excluera de nos considérations. (En exercice, on étudiera la définition équilatéral-équiangle du polygone régulier.)

Question évidente (mais qui a occupée les mathématiciens les plus célèbres pendant 2000 ans !) : quels n-gones réguliers peut-on *construire* avec comme seuls instruments la règle et le compas ? Pour $n = 3$ et $n = 4$, nous avons déjà fourni une construction ; mais au-dela ? Donnons quelques éléments de réponse...

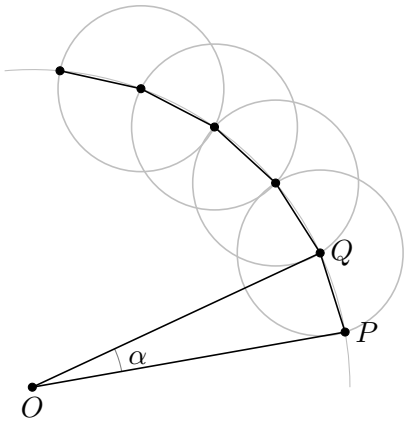
Proposition 3.4 *L'*angle fondamental *d'un n-gone régulier est de $\frac{4 \cdot \perp}{n}$.*

Démonstration. En reliant tous les sommets P_1, ..., P_n d'un n-gone régulier au centre O de son cercle circonscrit, on obtient n triangles congruents (par le critère "côté-côté-côté").



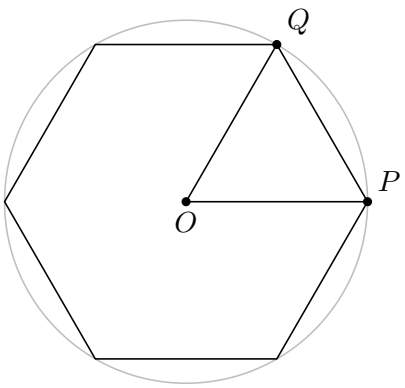
L'angle en O de chacun de ces triangles est donc le même—c'est l'angle fondamental du n-gone régulier. Il est clair que n fois cet angle est égal à $4 \cdot \perp$ (on a fait "le tour du cercle"), d'où le résultat. □

On peut inscrire un n-gone régulier dans un cercle quelconque – de centre O et point de passage P, disons – si on connait son angle fondamental α. En effet, on reporte l'angle α au point O du segment OP pour déterminer le sommet voisin Q sur le cercle. Par un cercle de centre Q et passant par P on trouve le sommet suivant, puis on y déplace le compas—et on répète cette procédure n fois.



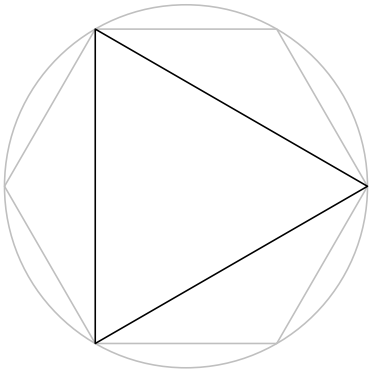
Proposition 3.5 *L'*hexagone régulier *a son côté égal au rayon du cercle circonscrit.*

Démonstration. Sur un cercle de centre O et passant par P, on pose Q de telle façon que $|OP| = |PQ|$.

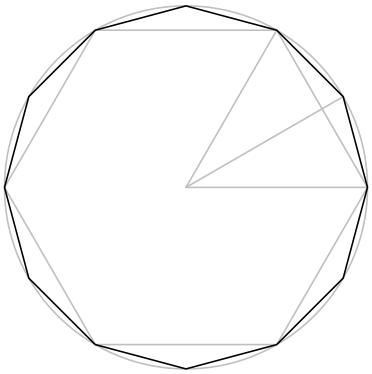


Ainsi le triangle OPQ est équilatéral, et puisque ses trois angles sont égaux et leur somme vaut $2 \cdot \perp$, l'angle fondamental vaut bien $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \perp = \frac{4 \cdot \perp}{6}$. □

Evidemment, "en sautant un sommet sur deux", on peut déduire de la construction de l'hexagone régulier aussi une construction du triangle régulier (= équilatéral) :



Mais aussi, par bissection de l'angle fondamental, on peut construire le *dodécagone* ($n = 12$) :

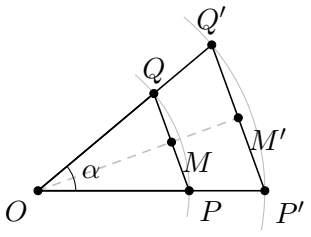


Puis, "en sautant deux sommets sur trois", on retrouve le carré ($n = 4$). On peut répéter l'argument pour retrouver une construction du 8-gone, 16-gone, 24-gone, etc. Autrement dit, par l'hexagone, on retrouve des constructions pour tous les n-gones réguliers avec $n = 2^k$ ($k \geq 2$) ou $n = 3 \cdot 2^k$ ($k \geq 0$). Plus généralement, si on sait construire le m-gone régulier et le n-gone régulier, et m et n sont premiers entre eux, alors on sait aussi construire un mn-gone régulier ; on détaillera ce résultat en exercice.

Pour conclure ce chapitre, nous rendrons hommage à Archimède (-287 ; -212), sans doute un des plus grands génies de l'humanité—bien que son travail n'aurait pas été possible sans les résultats d'un de ses prédécesseurs, Eudoxe (-408 ; -355). Il s'agit ici de sa découverte du nombre π.

Proposition 3.6 *Si deux n-gones réguliers sont inscrits dans deux cercles, alors les aires des polygones sont dans la même proportion que les carrés des rayons des cercles.*

Démonstration. L'aire d'un tel polygone est n fois l'aire de son triangle fondamental ; le rapport des aires des polygones est donc égal au rapport des aires des triangles fondamentaux. Supposons donc la situation où on a deux triangles fondamentaux, l'un dans un cercle de centre O et rayon $r = |OP|$ et l'autre dans un cercle de même centre O mais de rayon $r' = |OP'|$.



Chaque triangle fondamental est isocèle, et dans un triangle isocèle la médiatrice de la base est la bissectrice du sommet ; notons M, resp. M' le milieu du segment PQ, resp. $P'Q'$. Ainsi on peut calculer l'aire des triangles fondamentaux comme $\frac{|PQ|\cdot|OM|}{2}$ et $\frac{|P'Q'|\cdot|OM'|}{2}$, et leur rapport est donc

$$\frac{|PQ| \cdot |OM|}{|P'Q'| \cdot |OM'|}.$$

Mais le triangle $OP'Q'$ est l'agrandissement par un facteur $\frac{r_2}{r_1}$ du triangle OPQ (dans le chapitre suivant on dira que les triangles sont *semblables*), et donc $\frac{|PQ|}{|P'Q'|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|OM|}{|OM'|}$, ce qui explique le résultat. □

Autrement dit, pour tout n-gone régulier, la proportion

$$\frac{\text{aire du } n\text{-gone}}{(\text{rayon du cercle circonscrit})^2}$$

est une constante (qui dépend de n) !

On fait le lien avec la circonférence :

Proposition 3.7 *Pour un n-gone régulier, on a que*

$$\textit{aire} = \frac{h \times \textit{circonférence}}{2},$$

où h est la hauteur du triangle fondamental du n-gone régulier.

La démonstration est laissée en exercice. Observons que, bien évidemment, la hauteur du triangle fondamental du n-gone régulier dépend de n ; et pour n de plus en plus grand, h est de plus en

plus proche du rayon du cercle circonscrit. Eudoxe a ensuite formalisé (par sa célèbre *Méthode de l'Exhaustion*) l'idée que,

$$\text{“ } \lim_{n\to\infty} n\text{-gone régulier} = \text{cercle ”}.$$

L'argument est quelque peu technique (et nous référons à la bibliographie pour une démonstration), mais la conséquence qui nous intéresse ici est :

Théorème 3.8 (Archimède) *Quelque soit le cercle, la proportion*

$$\frac{aire}{rayon^2}$$

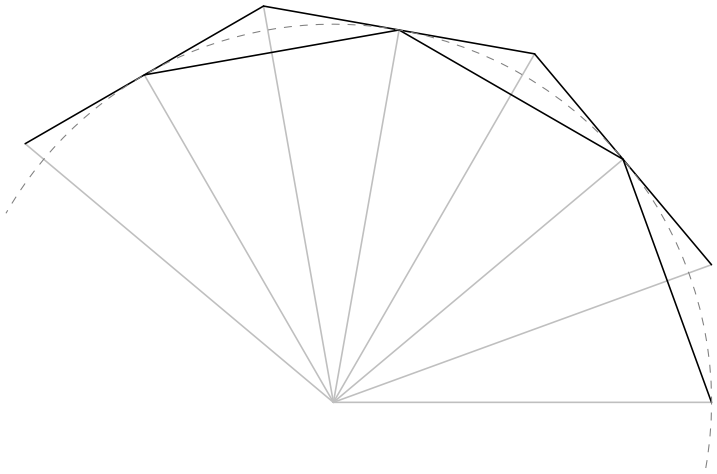
est une constante, appelée π ; et donc

$$aire = \frac{rayon \times circonférence}{2}.$$

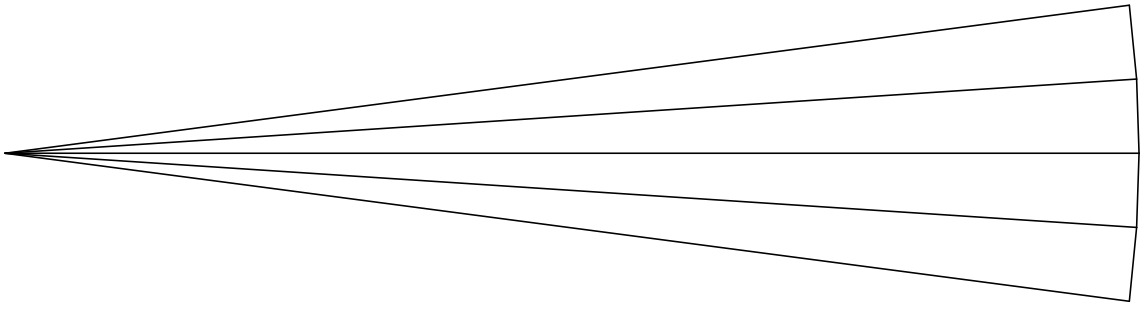
Ainsi on retrouve, pour un cercle de rayon r, les formules bien-connues pour aire et circonférence :

$$\text{aire} = \pi r^2 \quad \text{et} \quad \text{circonférence} = 2\pi r.$$

Pour un calcul approchée de la valeur de π, Archimède construit d'abord les n-gones réguliers inscrits et circonscrits d'un cercle de rayon r donné (on le fera en exercice) :



Ensuite il considère les polygones réguliers à 96 côtés (note : $96 = 3 \cdot 2^5$) ; le dessin suivant (qui consiste de triangles !) indique à quel point on est “proche” du cercle :



Par un calcul très astucieux des circonférences de ces deux 96-gones (qui prennent le cercle “en étau”), Archimède montre que

$$\frac{446}{71}r < 2\pi r < \frac{44}{7}r,$$

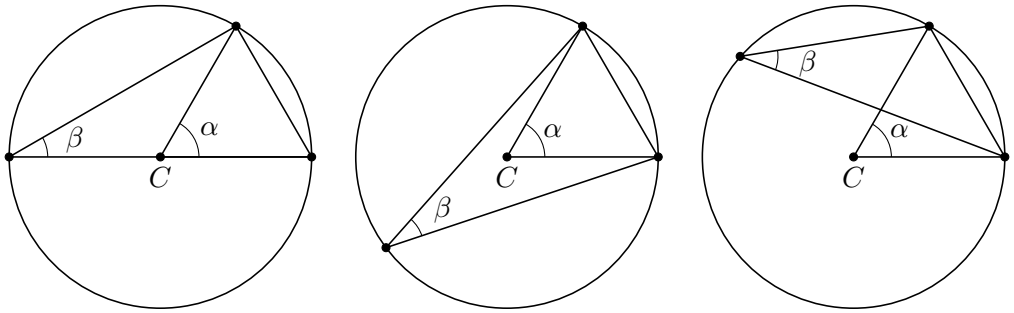
d'où finalement

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

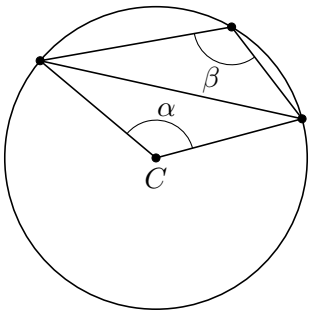
une approximation rationnelle encore souvent utilisée aujourd'hui.

Exercices

1. Montrer, dans les situations dessinées ci-dessous, que $\alpha = 2\beta$; dans chaque figure, le point C est le centre du cercle :

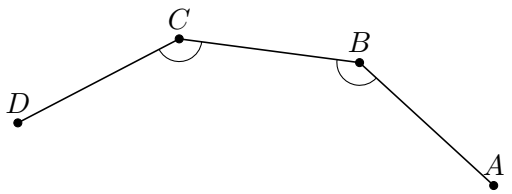


Et dans la figure suivante, quelle est la relation entre α et β ?



En déduire que tous les triangles inscrits dans un même cercle sur une même corde et coupant le même arc, ont le même angle intérieur opposé à cette corde. Montrer comment ceci généralise la Proposition 3.1.

2. Montrer qu'un quadrilatère est inscrit dans un cercle si et seulement si la somme des angles aux sommets opposés vaut $2 \cdot \perp$.
3. Démontrer : un triangle est rectangle si et seulement si le centre de son cercle circonscrit se trouve sur un des côtés ; et dans ce cas, le centre se trouve au milieu de l'hypothénuse. (Ceci contient une réciproque à la Proposition 3.1).
4. Dans la situation de la figure ci-joint, on suppose que $\angle ABC = \angle BCD$ et $|AB| = |BC| = |CD|$. Montrer que le point D est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.



5. Définition équilatéral-équiangle du polygone régulier. Etant donné un n-gone convexe dont les côtés sont égaux, montrer que les sommets se trouvent sur un cercle si et seulement si les angles intérieurs sont égaux ; il s'agit donc exactement d'un n-gone régulier. Si on a un n-gone convexe dont les n sommets se trouvent sur un cercle et les angles intérieurs sont égaux, s'agit-il nécessairement d'un n-gone régulier ?
6. Soit un triangle ABC avec AB une corde d'un cercle de centre C. Montrer qu'on a concourrance de la droite perpendiculaire sur CA en A, la droite perpendiculaire sur CB en B et la bissectrice de l'angle intérieure en C.
7. Etant donné un n-gone régulier inscrit dans un cercle donné, construire le n-gone circonscrit du même cercle : les sommets sont les points déterminés par le procédé de l'exercice précédent, si l'on prend pour ABC les triangles fondamentaux du n-gone inscrit.
8. Utiliser un hexagone régulier inscrit et un hexagone régulier circonscrit pour donner une estimation numérique de π. Il sera utile de vérifier que $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$.
9. Soit un polygone régulier à n sommets inscrit dans un cercle de rayon 1, et supposons qu'il est de côté d.
   a) Donner une formule (en fonction de d) pour le côté d'un polygone régulier à $2n$ sommets inscrit dans le même cercle.
   b) Donner une formule (en fonction de d) pour le côté d'un polygone régulier à n sommets circonscrit du même cercle.
   c) Utiliser les résultats précédents pour améliorer l'estimation de π en utilisant un dodécagone régulier, puis un 24-gone régulier, au lieu de l'hexagone régulier.
10. Le Théorème de Bezout dit que deux nombres entiers positifs, m et n, sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des nombres entiers r et s tels que $rm + sn = 1$. En déduire que, si le m-gone régulier et le n-gone régulier sont constructibles, et m et n sont premiers entre eux, alors aussi le mn-gone l'est.

— 4 —

Pentagone régulier

Nous définissons et développons la notion de semblabilité pour les triangles, notamment par le théorème de Thales. Ainsi nous sommes amenés à considérer des proportions de (longueurs de) segments, et nous traitons en détail la section d'or. Nous construisons et étudions les "triangles d'or" – triangles isocèles dont les côtés égaux sont en rapport d'or avec sa base – pour en déduire la construction du pentagone régulier. En exercice les notions du cours sont approfondies, et nous montrons qu'il existe exactement 5 polyèdres réguliers : les fameux solides de Platon.

Avec l'hexagone (dont la construction est on-ne-peut-plus-simple !) on arrive à construire les n-gones réguliers avec $n = 2^k$ ($k \geq 2$) ou $n = 3 \cdot 2^k$ ($k \geq 0$). Mais qu'en est-il pour $n = 5$, $n = 7$, $n = 9$, $n = 10$, $n = 11$, ... ? Le premier vrai défi est donc la construction du *pentagone régulier*—et c'est le seul autre polygone régulier qu'Euclide savait construire.

Théorème de Thales

Pour construire le pentagone régulier de façon élégante, nous allons diverger d'un traitement chronologique de ces mathématiques, pour parler d'abord de proportions et du nombre d'or. De plus, nous allons nous permettre de calculer avec des distances, des aires et des angles, comme si il s'agit de nombres réels. C'est à dire, nous mettons tout le travail d'Eudoxe sur les proportions entre parenthèses, pour nous permettre une approche plus moderne.

Ainsi nous pouvons définir simplement :

Définition 4.1 *Deux triangles sont* semblables *s'il existe une bijection entre leurs sommets telle que les angles correspondants sont égaux et les côtés correspondants sont dans une même proportion.*

Autrement dit, pour la *congruence* de triangles on se permet de transformer les figures par translation, rotation et réflexion ; pour la *semblabilité* de triangles il faut y ajouter les homothéties.

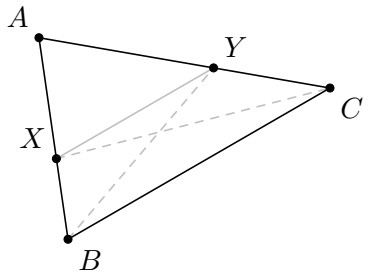
Tout comme le Théorème 1.25 identifie des conditions nécessaires-et-suffisantes pour la congruence de deux triangles, nous pouvons aussi ramener la semblabilité à quelques conditions plus simples que celles données dans la Définition 4.1. Pour cela, nous devons en particulier étudier les *proportions* (les *ratios* donc) de côtés de triangles.

Proposition 4.2 *Deux triangles de même hauteur ont des proportions identiques entre aires et bases.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule "aire $= \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$". □

Le résultat suivant est une version du Théorème de Thales ; il donne un critère de parallélisme exprimé non pas en termes d'*angles* (comme la Propostion 2.1) mais en termes de *distances* :

Proposition 4.3 (Théorème de Thales) *Soit un triangle ABC, X un point du segment AB et Y un point du segment AC.*



On a $XY /\!\!/ BC$ si et seulement si $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AY|}{|YC|}$.

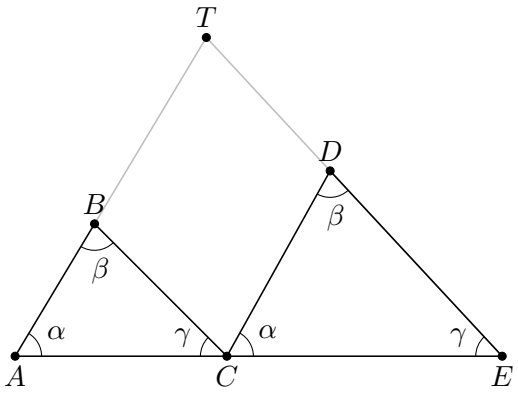
Démonstration. Supposons que $XY /\!\!/ BC$, alors les triangles XYB et XYC ont même base et même hauteur, donc même aires. Ainsi on peut calculer à l'aide de la proposition précédente :

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{\text{aire de } AXY}{\text{aire de } XBY} = \frac{\text{aire de } AYX}{\text{aire de } YCX} = \frac{|AY|}{|YC|}.$$

On démontrera l'implication réciproque en exercice. □

Proposition 4.4 *Deux triangles sont semblables s'ils ont des angles égaux 2-à-2.*

Démonstration. On place les deux triangles l'un à côté de l'autre de sorte que les angles correspondants soient "en même position" :



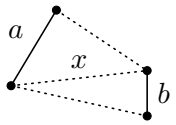
Par ce positionnement des angles, le Théorème 2.7 implique que $AB /\!\!/ CD$ et $BC /\!\!/ DE$. On note T le point d'intersection des droites AB et DE ; il vient que $AT /\!\!/ CD$ et $BC /\!\!/ TE$. Par le Théorème de Thales il suit que $\frac{|EC|}{|CA|} = \frac{|ED|}{|DT|}$ ainsi que $\frac{|AB|}{|BT|} = \frac{|AC|}{|CE|}$. Dans le parallélogramme $BCDT$ on a $|TD| = |BC|$ et $|TB| = |CD|$, d'où les égalités des proportions des côtés correspondants. □

Puisque la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits, il suffit d'en connaître deux pour en déduire le troisième ; donc deux triangles sont semblables si et seulement si *deux* angles sont égaux 2-à-2. Par ailleurs, en exercice on montrera que deux triangles sont semblables si et seulement si leurs côtés sont 2-à-2 dans la même proportion. Résumons ainsi :

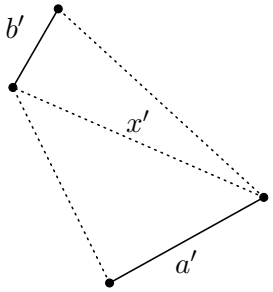
Théorème 4.5 *On a la semblabilité de deux triangles dans les situations suivantes :*

1. *ils ont deux angles égaux,*
2. *ils ont trois côtés proportionnels,*
3. *ils ont deux côtés proportionnels et l'angle inclus égal.*

On peut en déduire qu'une transformation du plan qui préserve les angles, préserve automatiquement (non-pas les distances mais) les proportions de distances. En effet, étant donné deux segments, de longueurs a et b disons, on peut les relier par un segment (de longueur x),



puis après une transformation préservant les angles on obtiendra des triangles semblables

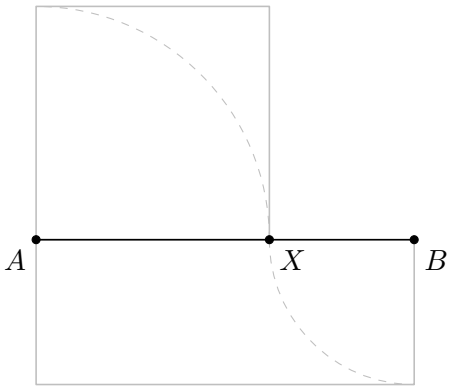


d'où $\frac{a}{b} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{b} = \frac{a'}{x'} \cdot \frac{x'}{b'} = \frac{a'}{b'}$.

Section d'or et pentagone

Pour des raisons qui deviendront claires d'ici peu, nous nous intéressons spécifiquement à :

Définition 4.6 *La* section d'or *d'un segment AB est la donnée du point X sur le segment tel que le carré sur AX est de même aire que le rectangle de côtés AB et BX.*



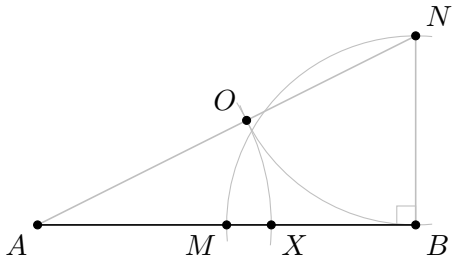
Avec la formule pour l'aire d'un rectangle, cela veut dire que l'on cherche le point X sur AB tel que $|AX|^2 = |AB| \cdot |BX|$. Bien sûr, cette aire (= *produit* de longueurs) dépend de la longueur du segment AB. Mais en passant à l'expression équivalente $\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{|AX|}{|BX|}$, on rend cette proportion (= *quotient* de longueurs) indépendente de la longueur du segment donné, et on montre :

Proposition 4.7 *Un point X est la section d'or d'un segment AB si et seulement si la proportion $\frac{|AB|}{|AX|}$ vaut $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; on l'appelle le* nombre d'or.

Ce calcul est laissé en exercice. Pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas, on aura besoin de :

Proposition 4.8 *Trouver la section d'or d'un segment.*

Démonstration. Soit un segment AB.

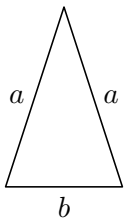


On construit d'abord son milieu M, puis un triangle ABN rectangle en B tel que $|BN| = |BM|$. Sur le côté AN on porte le point O tel que $|NO| = |BN|$. Finalement on porte sur le segment AB le point X tel que $|AX| = |AO|$. Si on note $a = |AM| = |BM| = |BN| = |NO|$, alors par le Théorème de Pythagore on trouve que $(2a)^2 + a^2 = |AN|^2$, et donc $|AN| = \sqrt{5}a$. Cela implique que $|AX| = |AN| - |ON| = \sqrt{5}a - a$ et donc aussi

$$\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{2a}{\sqrt{5}a - a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

comme voulu. □

Il est maintenant facile de construire un triangle isocèle



tel que

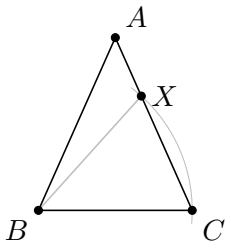
$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} (= \phi),$$

c'est à dire, les côtés égaux sont en rapport d'or avec la base. Par ailleurs, ce rapport est encore équivalent à

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

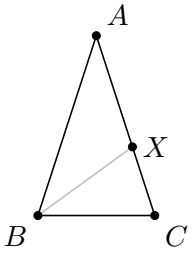
(car les deux égalités sont identiques à $a^2 - ab - b^2 = 0$). On appellera cela un *triangle d'or*.

Pour mieux comprendre l'énoncé suivant, on observera d'abord que, dans un triangle isocèle ABC de sommet A et base BC, le cercle de centre B et passant par C coupe le côté AC (en un point X, disons) si et seulement si $|BC| \leq |AB|$; et dans ce cas, le triangle ABC est semblable au triangle BCX (exercice).



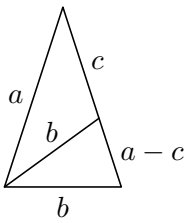
Si ABC est un triangle d'or, on a sûrement que sa base est de longueur inférieure à ces côtés egaux. Réciproquement, parmi les triangles isocèles dont la base est de longueur inférieure à celle des côtés egaux, les triangles d'or se manifestent ainsi :

Proposition 4.9 *Soit un triangle isocèle ABC tel que $|BC| \leq |AB| = |AC|$, dans lequel on construit un deuxième triangle isocèle semblable BCX,*



Alors ABC est un triangle d'or si et seulement si $|AX| = |BX|$ (et donc aussi XAB est isocèle).

Démonstration. Notons les longueurs des différents segments par

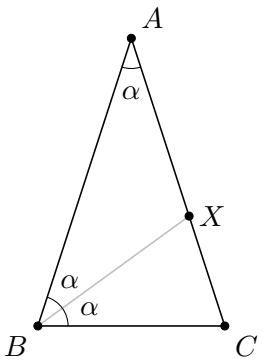


On sait donc que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-c}$ parce que le "grand" triangle est isocèle par hypothèse. Si $b = c$ on obtient $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ et ABC est un triangle d'or. Si ABC est un triangle d'or alors $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ et donc $\frac{b}{a-c} = \frac{b}{a-b}$, d'où $b = c$. □

Vient maintenant la propriété cruciale d'un tel triangle d'or :

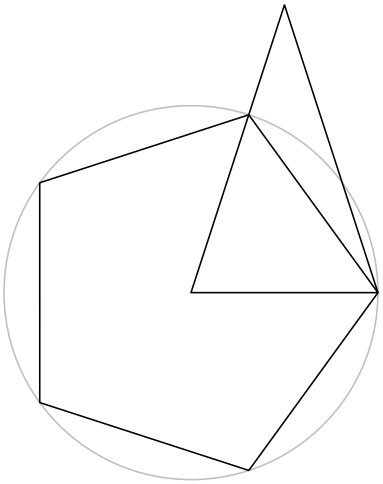
Proposition 4.10 *Dans un triangle d'or, l'angle au sommet est la moitié d'un angle de base.*

Démonstration. Par la proposition précédente on peut construire deux triangles isocèles dans un triangle d'or, dont un est semblable au triangle donné ; on peut exploiter cela pour identifier des angles :



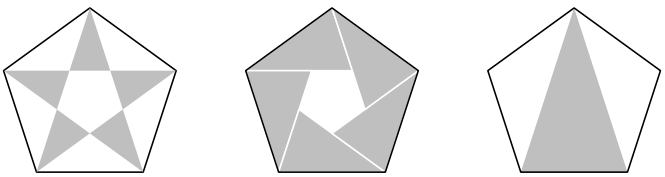
Le résultat suit immédiatement. □

Puisque la somme des angles de tout triangle vaut $2 \cdot \perp$, l'angle de base d'un triangle d'or vaut $\frac{4 \cdot \perp}{5}$. Et c'est exactement ce dont on a besoin pour construire un pentagone régulier :



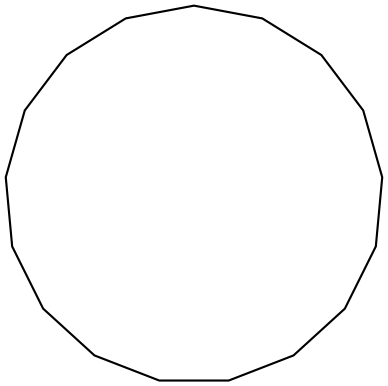
Si on veut inscrire le pentagone dans un cercle de centre et rayon donnés, alors on peut construire un triangle d'or quelconque et simplement reporter l'angle de base à l'aide de la Proposition 1.22.

Mais le pentagone régulier montre beaucoup plus de façettes du nombre d'or—et c'est pour cela qu'il était considéré comme une figure "mystique" par les Pythagoriciens. Par exemple, dans le pentagone régulier, les triangles en gris ci-dessous sont tous semblables,



et (par conséquent) des triangles d'or. Cette observation (et bien d'autres, cf. la littérature) permet une construction "directe" du pentagone régulier inscrit dans un cercle, sans passer par les triangles semblables.

Pour conclure, en -300 les grecs savaient donc construire le n-gone régulier, pour $n = 2^k$, $n = 2^k \cdot 3$, $n = 2^k \cdot 5$ et $n = 2^k \cdot 3 \cdot 5$. Mais qu'en est-il pour $n = 7, 9, 11, 13, ...$? Il faudra attendre plus de 2000 ans avant que Carl Friedrich Gauss ("le Prince des Mathématiques") construit en 1796 le *heptadécagone* ($n = 17$) ...



... et il faut toute une théorie d'extensions de corps pour montrer enfin que :

Théorème 4.11 (Gauss-Wantzel, ca. 1837) *Un n-gone régulier est constructible si et seulement si*

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot ... \cdot p_l$$

où $k \geq 0$ et $l \geq 0$, et les p_i's sont des nombres premiers de Fermat distincts.

Le m-ième *nombre de Fermat* F_m est, par définition, égal à $2^{2^m} + 1$. Contrairement à ce que pensait Pierre de Fermat lui-même en 1650, un tel nombre n'est pas toujours premier : en 1732, Leonard Euler a calculé que $F_5 = 641 \cdot 6700417$. En fait, les seuls nombres premiers de Fermat connus à ce jour sont $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$; et pour $5 \leq m \leq 32$ on sait aujourd'hui que F_m n'est pas premier. Au dela on ne sait tout simplement pas !

Exercices

1. Compléter la démonstration du Théorème de Thales (Proposition 4.3).
2. Détailler la démonstration de la Proposition 3.6 à l'aide du Théorème de Thales.
3. Compléter la démonstration du Théorème 4.5 : deux triangles sont semblables si et seulement si leurs trois côtés sont 2-à-2 dans la même proportion, si et seulement si ils ont deux côtés dans la même proportion et l'angle inclus égal.
4. Calculer le nombre d'or.
5. Suite de Fibonacci. Soit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres naturels, définie par $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, et ensuite $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour $n \geq 2$.

a) Si on suppose que la limite $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ existe, montrer qu'elle satisfait à l'équation $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$, et que donc il s'agit du nombre d'or.

b) Partant de l'équation $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$, on peut substituer l'$\alpha$ à droite par l'expression $1 + \frac{1}{\alpha}$, autant que l'on veut :

$$1 + \frac{1}{\alpha} \quad , \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} \quad , \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}}} \quad , \quad \dots$$

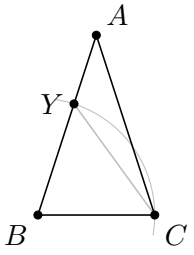
Si on estime ensuite que "$\frac{1}{\alpha}$ est quantité négligable", on obtient la suite de *fractions continues (finies)*

$$1 \quad , \quad 1 + \frac{1}{1} \quad , \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}} \quad , \quad \dots$$

Montrer qu'il s'agit de la suite $(\frac{f_{n+1}}{f_n})_{n\geq 0}$ des quotients d'éléments successifs de la suite de Fibonacci, et conclure que le nombre d'or est donc donné par la *fraction continue (infinie)*

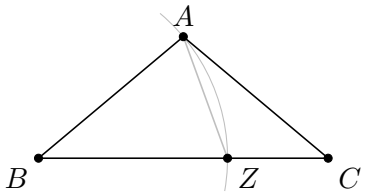
$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

6. Construire un triangle d'or.
7. Montrer que tout triangle semblable à un triangle d'or est aussi un triangle d'or.
8. La tangente à un cercle. Pour un cercle de centre A et passant par B, montrer que l'unique droite passant par B ne coupant le cercle en aucun autre point, est la perpendiculaire à AB.
9. Mener la tangente à un cercle à partir d'un point à l'extérieur du cercle.
10. Soit un triangle isocèle ABC avec $|AB| = |AC|$. Montrer que le cercle de centre B et passant par C coupe le côté AC (en un point X, disons) si et seulement si $|BC| \leq |AB|$. Montrer que le triangle isocèle BCX ainsi obtenu est semblable au triangle ABC donné.
11. On suppose que ABC est un triangle isocèle tel que $|BC| < |AB| = |AC|$. On considère le point d'intersection Y du segment AB avec le cercle de centre B et passant par C : ainsi on construit un triangle isocèle BCY.



Montrer que ABC n'est jamais semblable à BCY. Montrer que le triangle AYC est isocèle si et seulement si $\angle BAC = \frac{2\cdot\perp}{7}$; peut-on construire ce triangle avec règle et compas ?

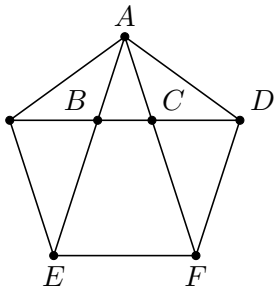
12. Soit un triangle isocèle ABC avec $|BC| > |AB| = |AC|$, et Z le point d'intersection de BC avec le cercle de centre B et passant par A.



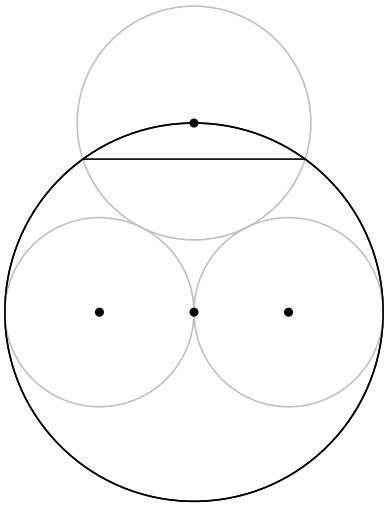
Le triangle ZAC peut-il être isocèle ? Si oui, sous quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et/ou suffisante(s) ?

13. Etant donné une droite, un point P sur sur cette droite et un point Q à l'extérieur de cette droite, construire un cercle passant par P et Q, ayant la droite comme tangente.

14. Dans le pentagone régulier ci-dessous, montrer que les triangles ABC, AEF et CDF sont semblables, et que ce sont tous des triangles d'or.

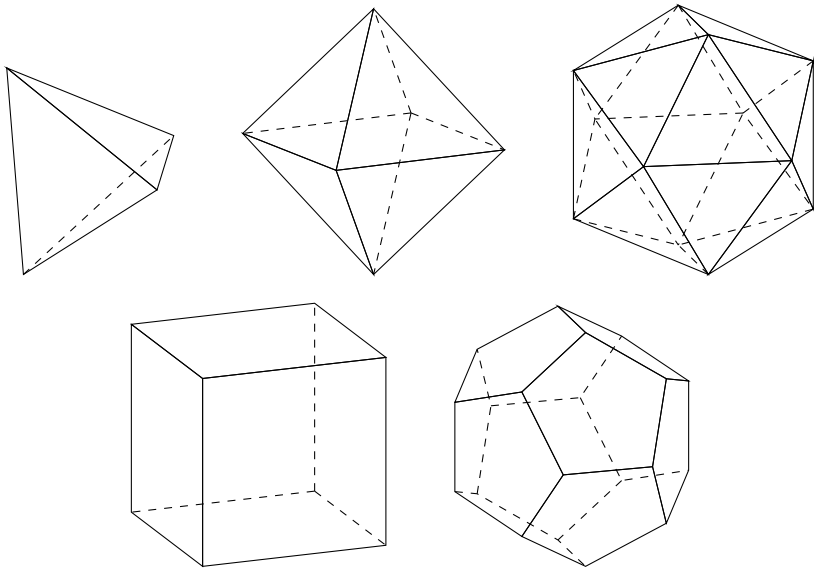


15. Soit un cercle donné (ci-dessous en noir). Reproduire, à l'aide de règle et compas, les cercles (en gris) dans le dessin suivant, sachant que tous les points marqués sont le centre d'un cercle :



Démontrer que l'arc de cercle est le côté d'un pentagone régulier, puis compléter ce pentagone.

16. Les solides de Platon. Un polyèdre est un solide convexe composé de sommets reliés par des arêtes formant des faces planes polygonales ; il est régulier si chaque face est un même polygone régulier et en chaque sommet on a le même nombre de faces.
    a) Observer que la somme des angles en un même sommet doit être strictement inférieur à 4 angles droits.
    b) Quels polygones peuvent donc éventuellement figurer comme faces d'un polyèdre régulier ?
    c) Construire des modèles de tous les polyèdres réguliers possibles.



17. Couper un ruban d'environ 3cm de large du côté long d'une feuille A4, en faire un noeud (classique), puis le serrer et enfin l'aplatir. Observation ? Explication ?

Deuxième partie

La géométrie par les coordonnées

Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterois le plaisir de l'apprendre de vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science.

René Descartes, *La Géométrie*, Livre I, page 301, 1637.

— 5 —

Repères

Dans le plan, choisissant une "origine" O et une "unité" I, nous construisons un repère (orthonormé) permettant de décrire tout point du plan par ses projections orthogonales sur les axes du repère. En identifiant chacun des axes du repère avec $\mathbb{R}$, nous retrouvons ainsi le plan cartésien réel, dont les points sont identifiés par leurs coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ensuite nous décrivons analytiquement les droites, les cercles, les distances et les angles, ainsi que les changements de repère par translation, rotation et réflexion. En exercice nous traitons des problèmes géométriques par des méthodes analytiques : parallélisme et perpendicularité de droites, concourance des trois hauteurs d'un triangle, distance d'un point à une droite, etc.

A peu près en même temps, Pierre de Fermat (1607-1665) et René Descartes (1595-1650) ont observé que l'on peut traiter des problèmes de géométrie par la voie de l'algèbre—en introduisant des coordonnées [1]. Nous allons étudier une version quelque peu modernisée des travaux de Fermat et Descartes.

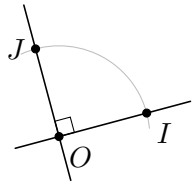
L'idée de base est simple : si, dans le plan, on *choisit*

- un point O, pour 'origine',
- un point I, pour 'unité',

alors on peut *construire*

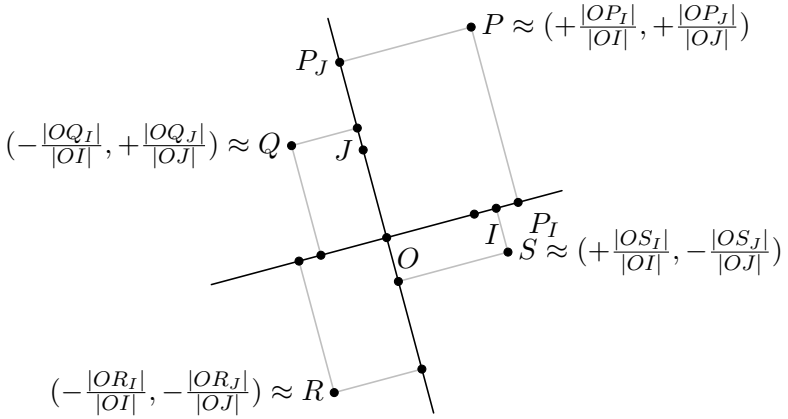
- une droite OI, soit 'l'axe X',
- une droite perpendiculaire à OI en O, soit 'l'axe Y',
- un point J sur la perpendiculaire de telle sorte que $|OI| = |OJ|$, soit 'l'unité' sur l'axe Y.

On appellera cela un *repère (orthonormé)* du plan, noté $\mathcal{R} = (O, I, J)$; le plus souvent on *choisira* l'orientation anti-horlogique du repère :



1. Drôlement, cette discipline s'appelle aujourd'hui la *géométrie analytique*. Le terme "géométrie algébrique" aurait été mieux, mais est réservé à autre chose...

Maintenant, en abaissant d'un point P quelconque du plan des perpendiculaires sur OI et OJ, on trouve des points P_I et P_J ; puis on peut associer au point P le couple de nombres (réels) exprimant les proportions de $|OP_I|$, resp. $|OP_J|$, par rapport à $|OI|$, resp. $|OJ|$; et pour distinguer les points des quatre quadrants du plan, on utilise des *signes* :



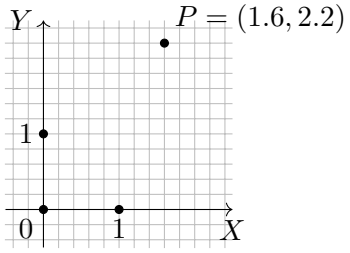
Ainsi nous ne faisons rien d'autre que de construire une *fonction de coordinatisation* : elle envoie tout point P du plan d'Euclide sur une (et une seule) paire de nombre réels. Bien sûr, les coordonnées d'un point P dépendent du repère $\mathcal{R}$ que l'on choisit ; notons donc Π pour le plan d'Euclide, et $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ pour l'ensemble des paires de nombres réels, alors la coordinatisation par rapport au repère $\mathcal{R}$ est la fonction

$$\mathcal{R} \colon \Pi \to \mathbb{R}^2 \colon P \mapsto P_{\mathcal{R}} = (\pm\frac{|OP_I|}{|OI|}, \pm\frac{|OP_J|}{|OJ|}) \tag{5.1}$$

(que nous notons donc abusivement aussi par $\mathcal{R}$).

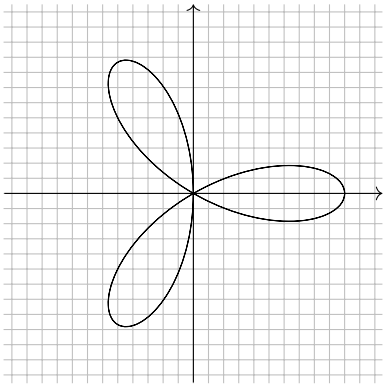
Il est assez évident que la fonction $\mathcal{R} \colon \Pi \to \mathbb{R}^2$ est *injective* (exercice). *En admettant que tout nombre réel est réalisable par une longueur de segment*, la fonction $\mathcal{R} \colon \Pi \to \mathbb{R}^2$ est aussi *surjective*. En effet, étant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on doit pouvoir trouver des points P_I (sur la droite OI) et P_J (sur la droite OJ) tels que $(x, y) = (\pm\frac{|OP_I|}{|OI|}, \pm\frac{|OP_J|}{|OJ|})$, pour ensuite construire l'(unique) point P ayant P_I et P_J pour projections. Somme toute, la fonction de coordinatisation est une bijection, et par abus de language on parle souvent "du plan cartésien $\mathbb{R}^2$", laissant sous-entendu qu'il s'agit du plan euclidien dans lequel on a choisit un repère $\mathcal{R}$ (avec $O_{\mathcal{R}} = (0, 0)$, $I_{\mathcal{R}} = (1, 0)$ et $J_{\mathcal{R}} = (0, 1)$ bien évidemment).

Dans la pratique, on identifie les deux axes du repère $\mathcal{R}$ avec $\mathbb{R}$, puis on identifie chaque point P du plan avec ses coordonnées (x, y), appelées *abscisse* et *ordonnée*. Par abus de language, on parlera souvent de "l'axe des x" et "l'axe des y" (ou même "l'axe X" et "l'axe Y"), et pour les indiquer dans un dessin on fera souvent comme suit :



Sauf mention explicite du contraire, on choisira toujours l'orientation anti-horlogique des axes du repère.

Maintenant on peut (essayer de) décrire des figures géométriques à l'aide d'(in)équations imposées aux coordonnées des points formant lesdites figures : on dit alors qu'une telle figure est *le locus* (ou *le lieu*) *de son (in)équation cartésienne.*



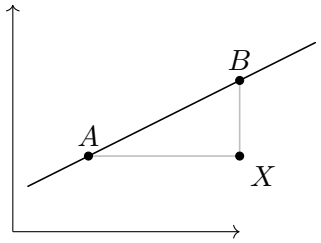
Le locus de l'équation cartésienne $(x^2 + y^2)^2 = x(x^2 - 3y^2)$.

En outre, cette approche permet de *choisir* un repère du plan, adapté à la situation que l'on souhaite étudier. Bien sûr, si on peut choisir plusieurs repères différents (comme "différents points de vues" sur une même situation), alors il est important de maîtriser aussi les *changements de repère.* On y reviendra.

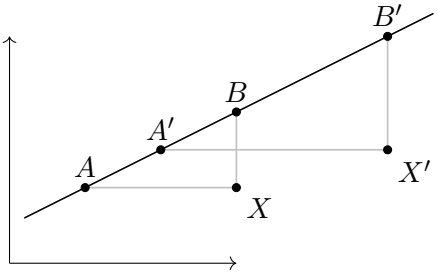
Droites, cercles

Commençons par la description analytique des figures fondamentales de la géométrie d'Euclide : la droite et le cercle. Pour bien préciser le passage de la géométrie descriptive d'Euclide à la géométrie analytique de Descartes, on démontre d'abord :

Lemme 5.1 *Soit une droite dans le plan muni d'un repère. Pour tout choix de deux points distincts A et B sur la droite, et le troisième sommet X du triangle rectangle ABX ayant AX parallèle à l'axe OI et BX parallèle à l'axe OJ, on a toujours la même proportion $\frac{|BX|}{|AX|}$. Si la droite est parallèle à l'axe OJ du repère, et donc $A = X$, il convient de dire que cette proportion vaut ∞.*



Démonstration. Si on a une autre paire de points, disons A' et B', et on construit un triangle rectangle avec troisième sommet X', alors on voit facilement que les triangles ABX et $A'B'X'$ sont semblables (par le parallélisme des côtés) :

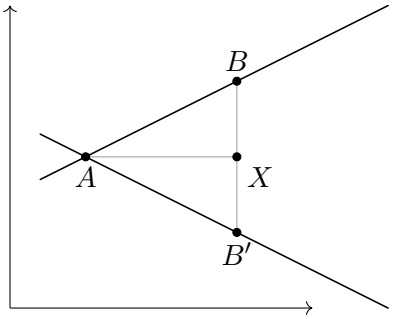


Ainsi on obtient $\frac{|A'X'|}{|AX|} = \frac{|B'X'|}{|BX|}$, et donc aussi $\frac{|BX|}{|AX|} = \frac{|B'X'|}{|A'X'|}$. □

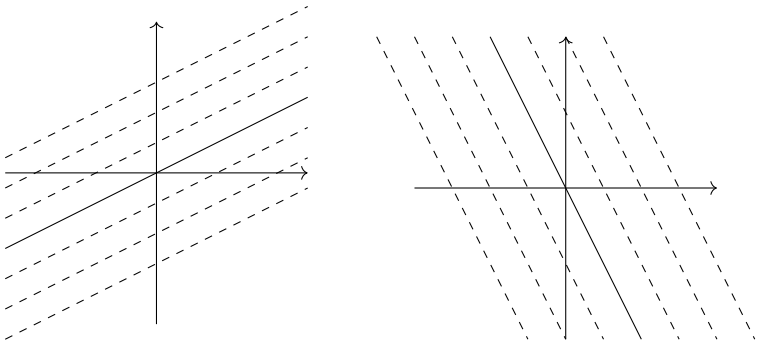
On laisse en exercice :

Lemme 5.2 *Dans le plan muni d'un repère, pour deux droites parallèles, le procédé du lemme précédent produit le même nombre (ou ∞, si les droites sont parallèles à l'axe OJ du repère).*

Dans les lemmes précédents, on semble donc découvrir la notion de *pente* d'une droite—à un détail près : puisqu'on la calcule comme une proportion de *longueurs* de segments, cette "pente" serait toujours positive... et donc les deux droites



seraient de même pente ! Pour éviter cela, on *signe* la pente d'une droite : si la droite parallèle passant par O est dans le premier et le troisième quadrant du plan, on dira que la pente est *positive* ; si cette droite parallèle est dans le deuxième et le quatrième quadrant, on dira que la pente est *négative*.



Ainsi, si une droite est horizontale alors sa pente est nulle ; et si une droite est verticale alors il convient de dire que sa pente est ∞. On résume :

Définition 5.3 *Dans le plan muni d'un repère, la pente d'une droite non-verticale est l'unique nombre réel dont la valeur absolue est calculée comme dans le Lemme 5.1 et le signe est déterminé par la position de la droite parallèle passant par O. La pente d'une droite verticale est, par convention*[2]*, ∞.*

Fort heureusement, en géométrie analytique la pente d'une droite se calcule facilement :

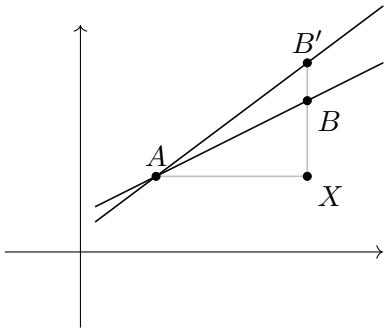
Lemme 5.4 *La pente de la droite passant par deux points distincts $A = (x_1, y_1)$ et $B = (x_2, y_2)$ est égale à $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; si $x_1 = x_2$ il convient de lire ceci comme ∞.*

Démonstration. Quelque soit le choix de points A et B sur une droite de pente positive, les différences $y_2 - y_1$ et $x_2 - x_1$ sont de même signe, et donc leur quotient est positif ; et de même, si la droite est de pente négative, les différences $y_2 - y_1$ et $x_2 - x_1$ sont de signe opposé, et donc leur quotient est négatif. Finalement, il est facile de voir que, en valeur absolue, ce quotient est exactement la proportion calculée au Lemme 5.1. On laisse les détails en exercice. □

Ayant mis au point la notion de *pente*, on obtient :

Lemme 5.5 *Dans le plan muni d'un repère, deux droites sécantes et de même pente sont identiques.*

Démonstration. Soit deux droites, de pentes positives et sécantes en un point A, et notons B et B' les points d'intersection avec une parallèle à l'axe OJ (ne passant pas par A) :



Par le procédé du Lemme 5.1, on observe que l'égalité des pentes de AB et AB', $\frac{|BX|}{|AX|} = \frac{|B'X|}{|AX|}$, implique que $B = B'$; et donc $AB = AB'$. L'argument est similaire pour deux droites de pentes négatives, nulles ou ∞. □

Une conséquence des lemmes précédents est que deux droites sont parallèles si et seulement si elles on la même pente (exercice) ; une autre conséquence est :

Proposition 5.6 *Dans le plan muni d'un repère, la droite passant par deux points $A = (x_1, y_1)$ et $B = (x_2, y_2)$ est le locus de l'équation $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.*

2. On peut parfaitement formaliser l'idée qu'une droite verticale est de pente ∞... mais là on est sur le terrain de la *géométrie projective* !

Démonstration. Pour qu'un point $P = (x, y)$ $(\neq A)$ appartienne à la droite AB, il faut et il suffit que $AB = AP$; mais ces deux droites sécantes en A sont identiques si et seulement si elles on la même pente (Lemme 5.5). D'après le Lemme 5.4, si $x_1 \neq x_2$, on trouve ainsi $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ comme condition nécessaire et suffisante, ou de manière équivalente, $(x_2-x_1)(y-y_1) = (y_2-y_1)(x-x_1)$. Si $x_1 = x_2$ (et donc $y_1 \neq y_2$ car $A \neq B$), la droite AB est la droite verticale d'équation $x = x_1$, qui – elle aussi – est équivalente à $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$. □

On peut observer que l'équation de la proposition précédente est linéaire en x et y, c'est à dire, de la forme $ax+by+c = 0$. Toute droite est donc le locus d'une équation linéaire. Réciproquement, on peut aussi démontrer :

Proposition 5.7 *Dans le plan muni d'un repère, le locus d'une équation linéaire est toujours une droite.*

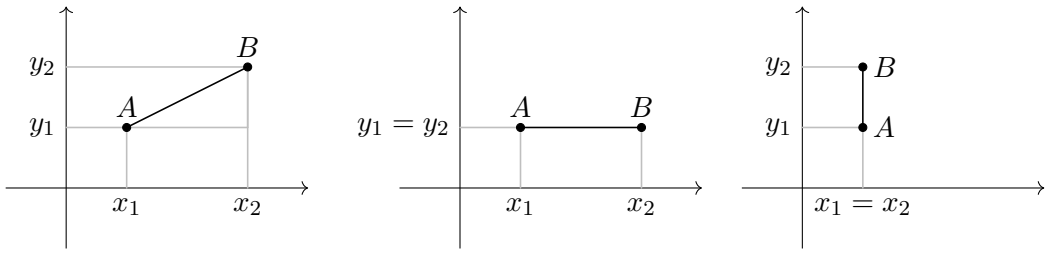
La démonstration est laissée en exercice. On peut conclure :

Corollaire 5.8 *Dans le plan muni d'un repère, les droites sont exactement les loci des équations linéaires.*

Après les droites, place aux cercles.

Proposition 5.9 *Dans le plan muni d'un repère, la distance entre deux points $A = (x_1, y_1)$ et $B = (x_2, y_2)$ est donnée par* $\mathrm{dist}(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Démonstration. On distingue trois situations possibles :



Dans la première situation, le Théorème de Pythagore produit le résultat souhaité ; dans les deux autres situations le résultat est immédiat. □

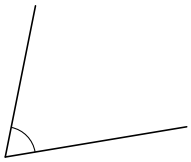
Il vient tout de suite que :

Proposition 5.10 *Dans le plan muni d'un repère, le cercle de centre $C = (x_1, y_1)$ et rayon $r \geq 0$ est le locus de l'équation $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$.*

Cette équation est du second degré en x et y, c'est à dire de la forme $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$. Le locus d'une telle équation n'est pas toujours un cercle ; dans le chapitre suivant nous allons découvrir les figures géométriques décrites par de telles équations.

Angles

Nous voulons décrire analytiquement les angles. Rappelons que pour Euclide un angle est tout simplement l'*ouverture* entre deux demi-droites :



Le seul angle qu'Euclide définit explicitement, est l'angle droit $\perp$; et par ailleurs, Euclide ne considère jamais des angles plus grand que deux angles droits. Pour *comparer* deux angles (en particulier pour noter l'égalité de deux angles), Euclide passe par les triangles congruents et semblables. Mais comment *caractériser* (voir *mesurer*) un tel angle ? Ci-dessous nous allons développer en détail les notions de *sinus* et *cosinus* d'un angle, et la mesure d'un angle en *radians*.

Tout d'abord, nous devons reconnaitre qu'un angle a une *orientation* : nous distinguerons l'orientation horlogique et l'orientation anti-horlogique, et nous parlerons ainsi, sans ambiguité, de la première, resp. la deuxième, jambe d'un angle.



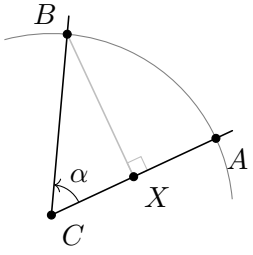
En géométrie analytique, il est souvent préférable de définir l'orientation d'un angle relatif à l'orientation du repère choisi dans le plan :

Définition 5.11 *Dans un plan muni d'un repère, si un angle a la même orientation que le repère, alors ont dit qu'il est d'orientation positive ; sinon on dit qu'il est d'orientation négative.*

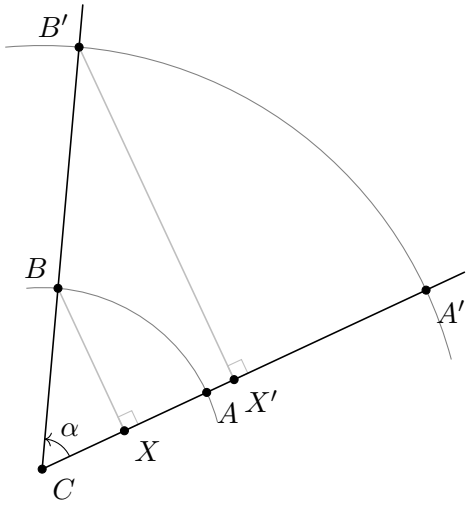
Sauf mention du contraire, le plan sera muni d'un repère d'orientation anti-horlogique ; et donc un angle sera postif s'il est d'orientation anti-horlogique. Quant aux notations, pour un angle orienté α, on notera par $-\alpha$ l'angle de même ouverture mais d'orientation opposée.

Par le Théorème de Thales (Proposition 4.3) on a ensuite l'observation suivante.

Lemme 5.12 *Soit un angle orienté α en un point C. On pose un cercle de centre C et de rayon r quelconque, et on note A le point d'intersection de ce cercle avec la première jambe de l'angle, B le point d'intersection avec la deuxième jambe de l'angle, et X la projection orthogonale du point B sur la droite AC. Les proportions $\frac{|XC|}{r}$ et $\frac{|BX|}{r}$ sont alors constantes.*



Démonstration. Si deux cercles (disons de rayons $r < r'$) sont tracées au point C,

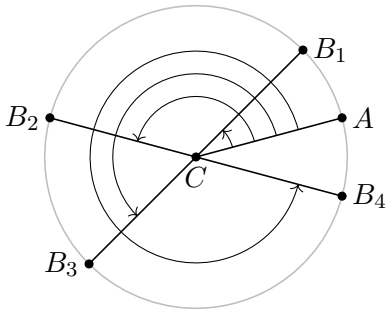


alors le Théorème de Thales assure que $\frac{|XC|}{|X'C|} = \frac{|BC|}{|B'C|}$, d'où $\frac{|XC|}{r} = \frac{|X'C|}{r'}$, et de même pour l'autre proportion. □

Autrement dit, les proportions calculées dans le lemme précédent, ne dépendent pas du rayon du cercle que l'on pose sur l'angle donné, mais uniquement de l'angle lui-même. Reprenant les notations du Lemme 5.12, ceci donne envie de *définir*

$$\cos(\alpha) = \frac{|XC|}{|AC|} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{|BX|}{|BC|} \tag{5.2}$$

(car $|AC| = |BC|$ est le rayon du cercle). Mais ceci pose un problème évident : les quatre angles distinctes $\angle ACB_i$ ($i \in \{1, .., 4\}$) ci-dessous



auraient même sinus et cosinus ! Autrement dit, pour distinguer ces quatre angles par leurs sinus et cosinus respectifs, nous devons *signer* les proportions de l'équation (5.2).

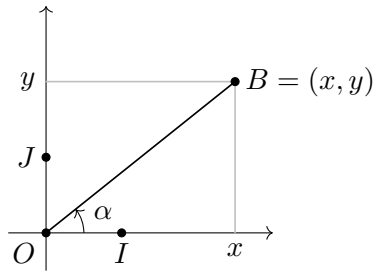
Définition 5.13 *Dans la situation du Lemme 5.12, le cosinus et le sinus de l'angle α sont :*

$$(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \begin{cases} (+\frac{|XC|}{|AC|}, +\frac{|BX|}{|BC|}) & \text{si } \alpha \text{ est entre } 0 \text{ et } \perp, \\ (-\frac{|XC|}{|AC|}, +\frac{|BX|}{|BC|}) & \text{si } \alpha \text{ est entre } \perp \text{ et } 2 \cdot \perp, \\ (-\frac{|XC|}{|AC|}, -\frac{|BX|}{|BC|}) & \text{si } \alpha \text{ est entre } 2 \cdot \perp \text{ et } 3 \cdot \perp, \\ (+\frac{|XC|}{|AC|}, -\frac{|BX|}{|BC|}) & \text{si } \alpha \text{ est entre } 3 \cdot \perp \text{ et } 4 \cdot \perp. \end{cases}$$

Ainsi, si on connait la demi-droite CA et $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, alors on peut dessiner l'unique demi-droite CB réalisant ainsi l'angle orienté α en question. Par ailleurs, on peut facilement déduire les relations usuelles telles que $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, $\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$, etc.

Heureusement, en géométrie analytique les choses se simplifient considérablement :

Lemme 5.14 *Dans le plan muni d'un repère, soit un angle orienté α au point $O = (0, 0)$ ayant la demi-droite OI pour première jambe, et dont la deuxième jambe est une demi-droite OB passant par un point $B = (x, y)$.*

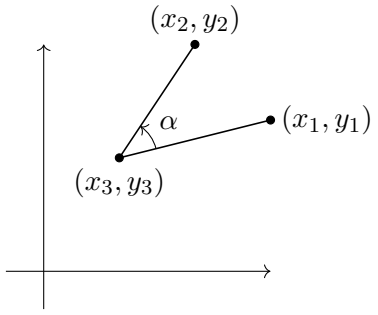


Alors on a que $(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$.

Démonstration. On pose le cercle de centre O et rayon $r = |OB|$, puis on procède comme dans le Lemme 5.12 ; on observe qu'en effet les signes de x et y correspondent aux signes posés dans la Définition 5.13. □

Finalement on peut établir en toute généralité que :

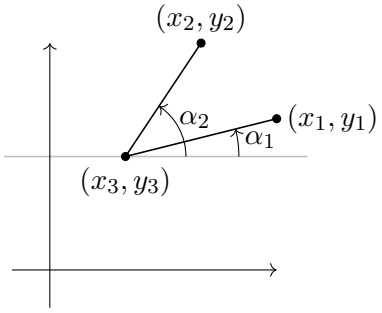
Proposition 5.15 *Dans le plan muni d'un repère, pour trois points faisant un angle orienté α,*



on a que

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{(x_1-x_3)(x_2-x_3)+(y_1-y_3)(y_2-y_3)}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}\,\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}, \\ \sin(\alpha) = \dfrac{(y_1-y_3)(x_2-x_3)-(x_1-x_3)(y_2-y_3)}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}\,\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}. \end{cases}$$

Démonstration. Si on trace une droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par (x_3, y_3), alors il vient naturellement que $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$:



Posant le cercle de centre (x_3, y_3) et passant par (x_1, y_1), resp. (x_2, y_2), on observe facilement que

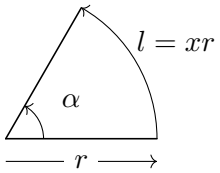
$$(\cos\alpha_i, \sin\alpha_i) = (\frac{x_i - x_3}{\sqrt{(x_i - x_3)^2 + (y_i - y_3)^2}}, \frac{y_i - y_3}{\sqrt{(x_i - x_3)^2 + (y_i - y_3)^2}}).$$

Par conséquent on peut calculer que

$$\cos\alpha = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \sin\alpha_1$$

(une formule que nous allons justifier en exercice), puis après simplification on obtient le résultat annoncé. Même type d'argument pour le sinus. □

Ci-dessus nous avons défini et calculé le cosinus et le sinus d'un angle (orienté)—et cela nous sera utile dans la suite. Mais comment *mesurer* alors un angle ? Voici la méthode préféré des mathématiciens. Soit l la longueur de l'arc d'un cercle de rayon r, soutenu par un angle α : on a alors l'égalité des proportions $\frac{l}{2\pi r} = \frac{\alpha}{4 \cdot \perp}$. Ainsi la constante $x = \frac{l}{r}$ est indépendant du cercle choisi, et mesure donc l'angle α par un nombre sans unité (puisqu'on divise deux longueurs), positif ou négatif selon l'orientation de α.

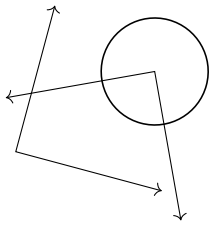


Réciproquement, sur un cercle de rayon r, tout $x \in \mathbb{R}$ détermine un arc de cercle de longueur $l = xr$, et donc un angle α (unique à un multiple de $4 \cdot \perp$ près) de mesure $\frac{l}{r} = x$. Un arc de cercle de longueur $l = r$ est appelé un *radian*, et la mesure d'un angle par le rapport entre l'arc de cercle qu'il soutient, et le rayon de ce cercle, est sa mesure "en radians" : on l'écrit comme $\alpha = x\,\text{rad}$. Le rayon du cercle étant sans importance, dans la pratique on travaille le plus souvent sur un cercle de rayon 1 (le *cercle trigonométrique*), et on laisse alors tomber le "rad" dans une mesure d'angle. C'est ainsi que nous retrouvons l'expression habituelle pour l'angle droit, $\perp = \frac{\pi}{2}$; et c'est ainsi que nous pouvons calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$.

Changement de repère

Si on choisit deux repères différents, disons $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, alors tout point P du plan Π d'Euclide peut être décrit par différentes paires de nombres réels, $P_{\mathcal{R}} = (x, y)$ et $P_{\mathcal{R}'} = (x', y')$. On souhaite

comprendre la relation exacte entre les différentes descriptions par coordonnées d'un même point, voire d'une même figure, d'un repère à l'autre.



Chaque choix de repère dans le plan Π détermine une fonction de coordinatisation, cf. (5.1). Pour deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, nous avons donc deux fonctions (bijectives)

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{R} \nearrow & \mathbb{R}^2 \\ \Pi & & \\ & \mathcal{R}' \searrow & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Le *changement de repère* (aussi appelé *changement de variables*) est une fonction

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto f(x,y)$$

qui "recalcule" les coordonnées d'un point P d'un repère à l'autre : elle fait *commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{R} \nearrow & \mathbb{R}^2 \\ \Pi & & \Big\downarrow f \\ & \mathcal{R}' \searrow & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

En mots, pour tout $P \in \Pi$, on a que $f(P_{\mathcal{R}}) = P_{\mathcal{R}'}$. Pour éviter d'écrire ce diagramme commutatif, on écrira souvent tout simplement

$$f\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}')\colon (x,y) \mapsto f(x,y) \tag{5.3}$$

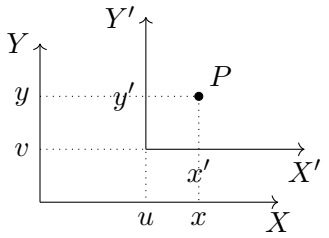
pour "le changement de repère de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$".

Par bijectivité de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, une telle fonction f existe et est unique—en fait, f est la composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}^{-1}$. Mais cette formulation étant peu pratique, nous allons décrire analytiquement trois changements de repère : le changement de repère par *translation*, par *rotation*, et par *réflexion* (= *symétrie orthogonal*).

Proposition 5.16 *Si $\mathcal{R}'$ est un repère du plan, obtenu par translation d'un repère $\mathcal{R}$ de telle sorte que $O'_{\mathcal{R}} = (u,v)$, alors le changement de repère est*

$$f\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}')\colon (x,y) \mapsto (x-u, y-v).$$

Démonstration. Une esquisse de la situation,

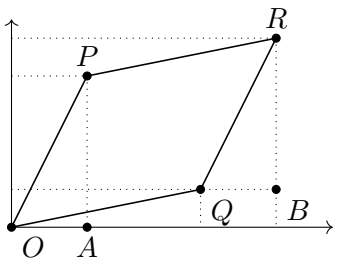


explique tout (et on laisse les détails en exercice). □

Pour décrire les rotations, nous avons besoin de :

Lemme 5.17 *Etant donné deux points $P = (x_1, y_1)$ et $Q = (x_2, y_2)$ dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R}$, le quatrième sommet du parallélogramme $OPQR$ est $R = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.*

Démonstration. Soit le parallélogramme $OPQR$. Avec des droites parallèles aux axes du repère, passant par P, Q et R, on obtient des triangles congruents OAP et QBR :



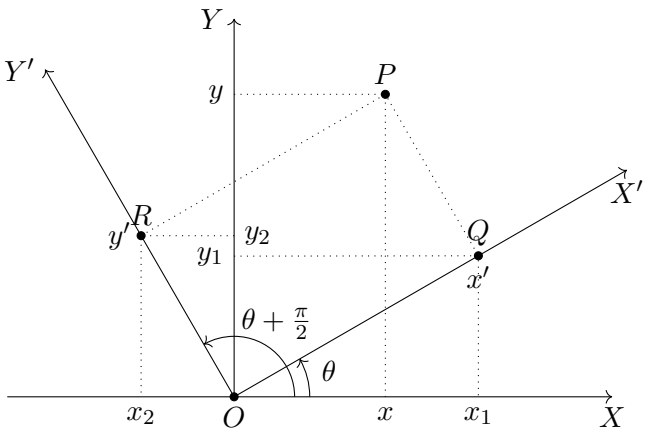
Le résultat suit facilement (exercice !). □

Par un calcul élémentaire, on peut aussi trouver le sommet P si on connait Q et R, et Q si on connait P et R. Et par ailleurs, aussi le cas où le quatrième sommet n'est pas O est facile à décrire (exercice).

Proposition 5.18 *Si $\mathcal{R}'$ est un repère du plan, obtenu par rotation de centre O et d'angle orienté θ d'un repère $\mathcal{R}$, alors le changement de repère est*

$$f\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) \mapsto (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}')\colon (x, y) \mapsto (\cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y, -\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y).$$

Démonstration. Soit un point P du plan ; on note $P_{\mathcal{R}} = (x, y)$ et $P_{\mathcal{R}'} = (x', y')$. Avec des parallèles aux axes (des deux repères) on visualise ces coordonnées :



On note Q et R les points du plan obtenus par projection orthogonale de P sur les axes du repère $\mathcal{R}'$, et on indique également leurs coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ avec des parallèles aux axes : $Q_{\mathcal{R}} = (x_1, y_1)$ et $R_{\mathcal{R}} = (x_2, y_2)$. Puisque P est le quatrième sommet du parallélogramme $OQRP$, on sait par le lemme précédent que $(x, y) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Par définition de sinus et cosinus, on sait aussi que $(x_1, y_1) = (x' \cos(\theta), x' \sin(\theta))$ et $(x_2, y_2) = (y' \cos(\theta + \frac{\pi}{2}), y' \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-y' \sin(\theta), y' \cos(\theta))$. En notation matricielle nous avons donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et puisque cette matrice 2×2 est orthogonale il suit que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

comme voulu. (Si le point P est situé p.e. dans le premier quadrant de $\mathcal{R}$ mais dans le quatrième de $\mathcal{R}'$, alors un même type d'argument mène aussitôt au même résultat final.) □

Nous laissons en exercice :

Proposition 5.19 *Si $\mathcal{R}'$ est un repère du plan, obtenu par réflexion par rapport à l'axe OI d'un repère $\mathcal{R}$, alors le changement de repère est*

$$f\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) \mapsto (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}')\colon (x, y) \mapsto (x, -y).$$

La composée de changements de repère est toujours un changement de repère ; on peut donc composer translations, rotations et réflexions pour effectuer d'autres changements de repère. Réciproquement, tout changement de repère $f\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}')$ peut être décrit par une composée de translations, rotations et réflexions (sous l'hypothèse que l'unité de longueur est identique dans les deux repères). En effet, on peut toujours

- d'abord faire une translation pour faire coïncider O avec O' ; on obtient un repère intermédiaire $\mathcal{R}_1 = (O_1, I_1, J_1)$,
- ensuite faire une rotation pour faire coïncider I_1 avec I' ; on obtient un repère intermédiaire $\mathcal{R}_2 = (O_2, I_2, J_2)$,

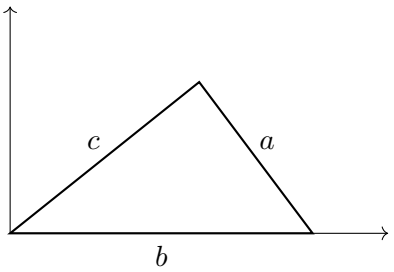
– et finalement faire (si nécessaire) une réflexion pour faire coïncider J_2 avec J'.

Notons finalement que la fonction inverse d'un changement de repère $f\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}')$ est, elle aussi, un changement de repère $f^{-1}\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}') \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$.

Exercices

Sauf mention contraire, on travaille dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$. Un 'point' est donc un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, une 'droite' est une équation $ax + by + c = 0$, etc.

1. Calculer sinus et cosinus de $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\}$, puis tous les $\alpha + k\frac{\pi}{2}$ (pour $k \in \mathbb{Z}$).
2. Montrer que le locus d'une équation linéaire est toujours une droite. Quand est-ce que deux équations linéaires, disons $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, on le même locus ?
3. Montrer analytiquement que deux droites distinctes ont au plus un point en commun. Qu'en est-il pour l'intersection d'une droite et un cercle ? Deux cercles distincts ?
4. Trouver un critère analytique de parallélisme de droites d'équations données. Etant donné un point et une droite, donner l'équation de l'unique droite parallèle passant par ce point.
5. Trouver un critère analytique de perpendicularité de droites d'équations données. Etant donné un point et une droite, donner l'équation de l'unique droite perpendiculaire passant par ce point.
6. Trouver un critère analytique pour dire qu'un quadrilatère $PQRS$ soit un parallélogramme.
7. Montrer par des méthodes analytiques que les trois hauteurs d'un triangle s'intersectent. (Indication : à changement de repère près on peut supposer que les sommets du triangle se trouvent sur les axes du repère.)
8. Le Théorème de Al Kashi (généralisation du Théorème de Pythagore). Soit un triangle quelconque, dans lequel on note a, b et c les longueurs des côtés et θ l'angle au sommet opposé au côté de longueur a. On a alors que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$. Indication : choisir un repère adéquat, comme suggéré par ce dessin,



déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle, puis calculer $\cos\theta$. (Et de même si $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$.)
9. Soit un segment d'extrémités A et B. Montrer analytiquement que l'ensemble des points équidistants à A et B est exactement la droite perpendiculaire au segment passant par son milieu ; c'est donc la médiatrice du segment. Donner une expression analytique pour le milieu du segment ainsi que pour la médiatrice. Appliquer à $A = (-2, 3)$ et $B = (4, -1)$.

10. Démontrer analytiquement que trois points non-collinéaires déterminent un unique cercle. Donner l'équation du cercle circonscrit du triangle de sommets $A = (-2, 3)$, $B = (1, 5)$ et $C = (2, 2)$, et déterminer son centre et son rayon.

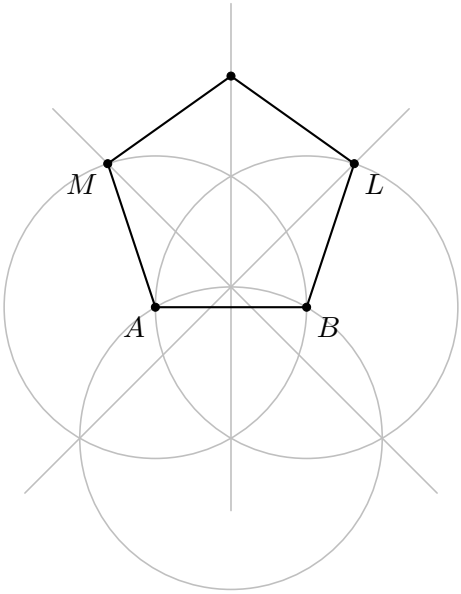
11. Donner une formule pour la distance entre un point P et une droite Δ. (Indication : considérer la droite perpendiculaire à Δ passant par P.) Appliquer à $P = (4, -1)$ et $\Delta : y = -3x + 2$.

12. Donner l'équation de la droite tangente en un point d'un cercle donné. (Indication : une tangente est perpendiculaire au rayon du cercle.)

13. On note $R_\theta \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{R}')$ le changement de repère par rotation d'angle (orienté) θ. Justifier que $R_{\theta+\tau} = R_\theta \circ R_\tau$ et en déduire des formules pour $\cos(\theta + \tau)$ et $\sin(\theta + \tau)$ en fonction de $\sin(\theta)$, $\sin(\tau)$, $\cos(\theta)$ et $\cos(\tau)$.

14. Coordonnées polaires. Si on choisit deux points distincts dans le plan, O et I, observer que tout point $P \neq O$ est complètement déterminé par l'angle orienté $\widehat{IOP} \in [0, 2\pi[$ et la distance $|OP| \in \mathbb{R}_0^+$. Donner la bijection entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires ainsi obtenue si $O = (0, 0)$ et $I = (1, 0)$. Donner l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et rayon $R \in \mathbb{R}_0^+$ en coordonnées polaires.

15. Le pentagone presque régulier de Dürer. Soit un segement AB. Avec règle et compas on fait le dessin ci-dessous. Démontrer que le pentagone ainsi obtenu n'est *pas* régulier.



Indication : On peut supposer ("à changement d'échelle près") que $|AB| = 1$. En plaçant un repère ayant AB pour axe X et sa médiatrice pour axe Y, on calcule les coordonnées des points M et L, puis on montre que $|ML|$ n'est pas le nombre d'or.

— 6 —

Coniques

Par changements de repère successifs, nous ramenons tout polynôme de degré 2 en x et y, et à coefficients réels, à une des trois formes possibles : $ax^2+by^2 = 1$, $ax^2+by^2 = 0$, $y = ax^2$ (avec $a \neq 0$). Les cas non-triviaux étant $ax^2 + by^2 = 1$, $ax^2 - by^2 = 1$ et $y = ax^2$ (avec $a, b > 0$), nous découvrons que les lieux des points déterminés par ces équations sont l'éllipse, l'hyperbole et la parabole—les trois coniques. Nous décrivons ces courbes planes à l'aide de leur(s) foyer(s) et/ou droite directrice et/ou eccentricité. Faute de temps, nous montrons l'origine historique du terme "section de conique" sans en élaborer les détails. Plusieurs démonstrations sont laissées en exercice, ainsi que des exemples concrets.

Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $\mathcal{R}$, le cercle de centre (a, b) et de rayon $r > 0$ est donné par l'équation cartésienne

$$\gamma : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

C'est donc une équation de second degré en x et y. Plus généralement, on va s'intéresser aux équations de second degré,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{6.1}$$

et aux figures géométriques que ces équations décrivent. Pour y voir plus clair, l'idée est de simplifier l'équation en faisant un certain nombre de changements de repère.

Réduction d'une équation du second degré

Tout d'abord, on veut "éliminer" le terme en xy de l'équation (6.1). Pour cela, on se propose de faire un changement de repère par rotation [1] de centre $(0, 0)$ et d'angle θ. En notation matricielle on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et ainsi on peut calculer que

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

1. On peut se demander, *pourquoi une rotation ?* La réponse simpliste est *parce que ça marche*. La réponse plus profonde est expliquée en exercice, où on fera le lien avec le Théorème Spectral de l'Algèbre Linéaire.

$$
\begin{aligned}
&= a(\cos\theta\cdot x' - \sin\theta\cdot y')^2 + b(\cos\theta\cdot x' - \sin\theta\cdot y')(\sin\theta\cdot x' + \cos\theta\cdot y') \\
&\qquad +c(\sin\theta\cdot x' + \cos\theta\cdot y')^2 + d(\cos\theta\cdot x' - \sin\theta\cdot y') + e(\sin\theta\cdot x' + \cos\theta\cdot y') + f \\
&= (a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)x' + (2(c-a)\sin\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta))x'y' \\
&\qquad +(a\sin^2\theta - b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)y'^2 + (d\cos\theta + e\sin\theta)x' \\
&\qquad\qquad +(-d\sin\theta + e\cos\theta)y' + f
\end{aligned}
$$

Pour annuler le terme en $x'y'$, (il faut et) il suffit de déterminer un angle α tel que

$$2(c-a)\sin\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0.$$

En divisant par $\cos\theta$ (qui est nécessairement non-nul, car sinon la rotation d'angle θ est le changement de variables $x' = \pm y$ et $y' = \mp x$, ce qui transformerait bxy en $-bx'y'$... avec $b \neq 0$!) cela devient

$$-b\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 2(c-a)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + b = 0,$$

et donc

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{c-a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c-a}{b}\right)^2 + 1}. \tag{6.2}$$

En admettant que la fonction

$$\tan\theta\colon\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}\colon\ \theta\mapsto\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{6.3}$$

est bijective [2], on peut conclure que, par le changement de repère par la rotation d'angle

$$\theta = \arctan\left(\frac{c-a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c-a}{b}\right)^2 + 1}\right),$$

on aura effectivement éliminé le terme en xy dans (6.1) !

On a donc démontré :

Proposition 6.1 *A un changement de repère près, toute équation du second degré en deux variables peut s'écrire comme*

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0. \tag{6.4}$$

Ensuite, on souhaite "éliminer" les termes en x et/ou en y de l'équation (6.4). Pour cela, on propose de faire un changement de repère par translation comme décrite dans la Proposition 5.16 : en notation matricielle on propose donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer que

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e$$

2. Voir tout bon cours d'Analyse de fonctions en une variable réelle.

$$= a(x'+u)^2 + b(y'+v)^2 + c(x'+u) + d(y'+v) + e$$
$$= ax'^2 + by'^2 + (2au+c)x' + (2bv+d)y' + (au^2+bv^2+cu+dv+e)$$

Pour annuler les termes en x' et/ou en y', on doit distinguer trois cas :

- si $a \neq 0 \neq b$, en posant $(u,v) = (-\frac{c}{2a}, -\frac{d}{2b})$ l'équation (6.4) est équivalente à

$$ax'^2 + by'^2 + (e - \frac{c^2}{4a} - \frac{d^2}{4b}) = 0, \tag{6.5}$$

- si $a \neq 0 = b$, en posant $(u,v) = (-\frac{c}{2a}, 0)$ l'équation (6.4) est équivalente à

$$ax'^2 + dy' + (e - \frac{c^2}{4a}) = 0, \tag{6.6}$$

- si $a = 0 \neq b$, en posant $(u,v) = (0, -\frac{d}{2b})$ l'équation (6.4) est équivalente à

$$cx' + by'^2 + (e - \frac{d^2}{4b}) = 0, \tag{6.7}$$

Nous avons donc démontré que :

Proposition 6.2 *A un changement de repère près, toute équation du second degré en deux variables peut s'écrire comme*

- *soit* $ax^2 + by^2 + c = 0$ *avec* $a \neq 0 \neq b$,
- *soit* $ax^2 + by + c = 0$ *avec* $a \neq 0$,
- *soit* $ax + by^2 + c = 0$ *avec* $b \neq 0$.

Bien sûr, les équations $ax^2 + by + c = 0$ et $ax + by^2 + c = 0$ "sont la même chose", à un échange de x et y près. Mais cet échange de variables, formellement

$$(x', y') = (y, x),$$

correspond au changement de repère obtenu par une réflexion par rapport à l'axe X suivie par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ainsi on peut dire :

Proposition 6.3 *A un changement de repère près, toute équation du second degré en deux variables peut s'écrire comme*

- *soit* $ax^2 + by^2 + c = 0$ *avec* $a \neq 0 \neq b$,
- *soit* $ax^2 + by + c = 0$ *avec* $a \neq 0$.

Ensuite, un peu de "toilettage" (purement algébrique) :

- Pour $ax^2 + by^2 + c = 0$, avec $a \neq 0 \neq b$,
  - si $c \neq 0$, on a l'équation équivalente $-\frac{a}{c}x^2 - \frac{b}{c}y^2 = 1$,
  - si $c = 0$, on a l'équation équivalente $ax^2 + by^2 = 0$.
- Pour $ax^2 + by + c = 0$, avec $a \neq 0$,
  - si $b \neq 0$, on a l'équation équivalente $y = -\frac{a}{b}x^2 - \frac{c}{b}$,

– si $b = 0$ et $c = 0$, on a l'équation équivalente $ax^2 = 0$,

– si $b = 0$ et $c \neq 0$, on a l'équation équivalente $-\frac{a}{c}x^2 = 1$.

Bref, cela montre que :

Proposition 6.4 *A un changement de repère près, toute équation du second degré en deux variables peut s'écrire comme*

– *soit* $ax^2 + by^2 = 1$ *avec* $a \neq 0 \neq b$,

– *soit* $ax^2 + by^2 = 0$ *avec* $a \neq 0 \neq b$,

– *soit* $y = ax^2 + b$ *avec* $a \neq 0$,

– *soit* $ax^2 = 0$ *avec* $a \neq 0$,

– *soit* $ax^2 = 1$ *avec* $a \neq 0$.

Mais – encore une dernière manipulation ! – l'équation $y = ax^2+b$ est équivalente à $y-b = ax^2$ et donc, si on pose $(x', y') = (x, y - b)$ alors on peut l'écrire comme $y'^2 = ax'^2$. Ce changement de variables correspond à un changement de repère par translation. Puisque $ax^2 = 0$ (resp. $ax^2 = 1$) peut être vu comme un cas particulier de $ax^2 + by^2 = 0$ (resp. $ax^2 + by^2 = 1$), si on laisse tomber la condition que $b \neq 0$, on arrive finalement au résultat principal :

Théorème 6.5 (Equations réduites du second degré) *A un changement de repère près, toute équation du second degré en deux variables peut s'écrire comme*

– *soit* $ax^2 + by^2 = 1$,

– *soit* $ax^2 + by^2 = 0$,

– *soit* $y = ax^2$,

avec $a \neq 0$.

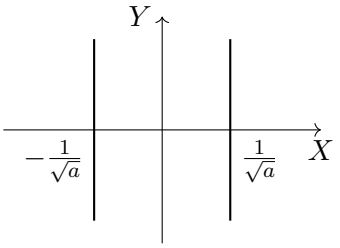
Loci des équations réduites du second degré

Dans la suite de ce chapitre nous allons découvrir à quelles *figures géométriques* correspondent les équations réduites du second degré. Pour simplifier l'écriture, nous allons *désormais toujours utiliser les lettres a et b pour des nombres réelles strictement positifs.* Ainsi, d'après le Théorème 6.5, les équations possibles sont *a priori* les suivantes :

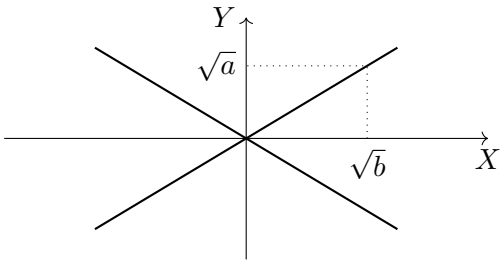
(1.a) $ax^2 + by^2 = 1$	(2.a) $ax^2 + by^2 = 0$	(3.a) $y = ax^2$
(1.b) $ax^2 - by^2 = 1$	(2.b) $ax^2 - by^2 = 0$	(3.b) $y = -ax^2$
(1.c) $-ax^2 + by^2 = 1$	(2.c) $-ax^2 + by^2 = 0$	
(1.d) $-ax^2 - by^2 = 1$	(2.d) $-ax^2 - by^2 = 0$	
(1.e) $ax^2 = 1$	(2.e) $ax^2 = 0$	
(1.f) $-ax^2 = 1$	(2.f) $-ax^2 = 0$	

Mais nous pouvons écarter tout de suite quelques cas dégénérés :

- L'équation (1.d) n'admet pas de solution, et représente donc la figure vide.
- L'équation (1.e) est équivalente à $(x - \frac{1}{\sqrt{a}})(x + \frac{1}{\sqrt{a}}) = 0$ et représente donc deux droites verticales distinctes :



- L'équation (1.f) n'admet pas de solution, et représente aussi la figure vide.
- Les équations (2.a) et (2.d) admettent l'origine comme unique solution, elles représentent donc un point.
- Les équations (2.b) et (2.c) sont équivalentes à $(\sqrt{a}x + \sqrt{b}y)(\sqrt{a}x - \sqrt{b}y) = 0$ et elles représentent donc deux droites qui s'intersectent à l'origine :



- Les équations (2.e) et (2.f) sont équivalentes à $x = 0$ et représente l'axe Y du repère.

Quitte à échanger les variables (réalisable par un changement de repère !), on peut toujours supposer que $a \leq b$ dans l'équation (1.a). De même, à un échange de variables près, les équations (1.b) et (1.c) représentent un même type de figure. Et enfin, par le changement de variables $(x, y) \mapsto (x, -y)$ (réalisé par un changement de repère par réflexion), les équations (3.a) et (3.b) représentent un même type de figure.

Ainsi nous arrivons à la classification suivante des coniques non-dégénérées :

Théorème 6.6 (Equations réduites non-dégénérées de second degré) *A un changement de repère près, les équations non-dégénérées du second degré en deux variables peuvent s'écrire comme*

- *soit* $ax^2 + by^2 = 1$, *avec* $0 < a \leq b$,
- *soit* $ax^2 - by^2 = 1$, *avec* $0 < a, 0 < b$,
- *soit* $y = ax^2$, *avec* $0 < a$.

Bien sûr on peut reparamétrer ces équations pour retrouver $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$, $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$ et $y = (ax)^2$, formules que l'on voit dans certaines références.

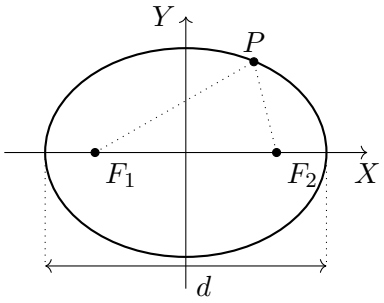
Reste à découvrir la géométrie de ces équations.

Proposition 6.7 *Les coordonnées d'un point P satisfont à une équation du type $ax^2 + by^2 = 1$ avec $0 < a \leq b$ (dans un repère "bien choisi") si et seulement s'il existe deux points F_1 et F_2, et une distance $d \in \mathbb{R}^+$ strictement plus grande que* $\mathrm{dist}(F_1, F_2)$*, tels que*

$$\mathrm{dist}(P, F_1) + \mathrm{dist}(P, F_2) = d. \tag{6.8}$$

Le lieux des points ainsi décrit est une ellipse*, dont F_1 et F_2 sont les* foyers*.*

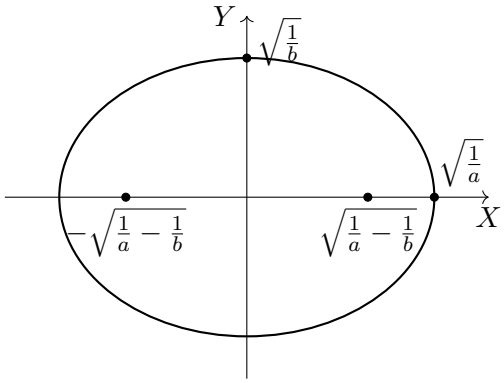
Démonstration. Etant donné deux points F_1 et F_2 du plan et un nombre $d > \mathrm{dist}(F_1, F_2)$, on *choisit* le repère de la façon suivante :



Ainsi nous avons $F_1 = (-f, 0)$ et $F_2 = (f, 0)$ pour un certain $f \in \mathbb{R}^+$. Etant donné une distance $d \in \mathbb{R}^+$ strictement plus grande que $\mathrm{dist}(F_1, F_2) = 2f$, en posant $d = 2r$, on a par hypothèse que $f < r$. Maintenant on calcule :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}(P, F_1) + \mathrm{dist}(P, F_2) = d \\
&\iff \sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2r \\
&\iff ((x+f)^2 + y^2) + ((x-f)^2 + y^2) + 2\sqrt{((x+f)^2 + y^2)((x-f)^2 + y^2)} = (2r)^2 \\
&\iff 4r^2 - 2(x^2 + f^2 + y^2) = 2\sqrt{(x+f)^2(x-f)^2 + (x+f)^2 y^2 + y^2(x-f)^2 + y^4} \\
&\iff 4r^2 - 2(x^2 + f^2 + y^2) = 2\sqrt{(x^2 + f^2 + y^2)^2 - 4x^2 f^2} \\
&\iff (4r^2 - 2(x^2 + f^2 + y^2))^2 = 4((x^2 + f^2 + y^2)^2 - 4x^2 f^2) \\
&\iff 16r^4 - 16r^2(x^2 + f^2 + y^2) + 4(x^2 + f^2 + y^2)^2 = 4(x^2 + f^2 + y^2)^2 - 16x^2 f^2 \\
&\iff r^4 - r^2(x^2 + f^2 + y^2) = -x^2 f^2 \\
&\iff (r^2 - f^2)x^2 + r^2 y^2 = r^2(r^2 - f^2) \\
&\iff \frac{1}{r^2}x^2 + \frac{1}{r^2 - f^2}y^2 = 1 \\
&\iff \text{“}ax^2 + by^2 = 1\text{” (avec } 0 < a \leq b)
\end{aligned}$$

Réciproquement, étant donné l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ avec $0 < a \leq b$, on pose $r = \sqrt{a^{-1}}$ et $f = \sqrt{a^{-1} - b^{-1}}$. Ainsi l'ellipse de foyers $F_1 = (-f, 0)$ et $F_2 = (f, 0)$ et distance $d = 2r$ est exactement celle décrite par l'équation donnée :



□

Cette description géométrique (focale) de l'ellipse suggère la construction suivante : on fixe deux points (les foyers), on attache les extrémités d'une corde de longueur d à ces points, puis on fait ballader son crayon en tendant la corde : ainsi on dessine exactement tous les points dont la somme des distances aux foyers est égale à d.

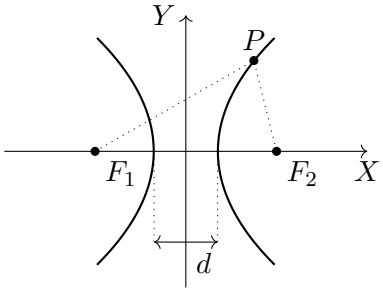
On laisse en exercice les démonstrations des propositions suivantes, qui se font par la même manière que la démonstration donnée ci-dessus :

Proposition 6.8 *Les coordonnées d'un point P satisfont à une équation du type $ax^2 - by^2 = 1$ avec $0 < a$ et $0 < b$ (dans un repère "bien choisi") si et seulement s'il existe deux points F_1 et F_2, et une distance $d \in \mathbb{R}^+$ strictement plus petite que* $\mathrm{dist}(F_1, F_2)$*, tels que*

$$|\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)| = d. \tag{6.9}$$

Le lieux des points ainsi décrit est une hyperbole*, dont F_1 et F_2 sont les* foyers*.*

Pour la première partie de la démonstration, étant donné deux points F_1 et F_2 et un nombre $d < \mathrm{dist}(F_1, F_2)$, on choisira un repère de manière suivante :



Réciproquement, pour une équation $ax^2 - by^2 = 1$ avec $0 < a$ et $0 < b$, on pose $r = \sqrt{a^{-1}}$ et $f = \sqrt{a^{-1} + b^{-1}}$, puis on vérifie que c'est l'équation de l'hyperbole de foyers $F_1(-f, 0)$ et $F_2 = (f, 0)$ et de distance $d = 2r$.

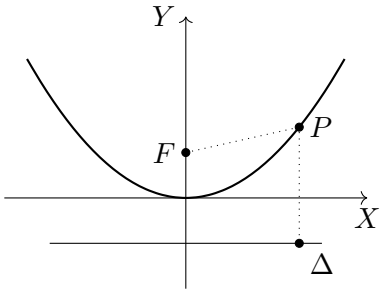
Par ailleurs, avec un peu d'analyse on peut facilement montrer que l'hyperbole d'équation $ax^2 - by^2 = 1$ admet les droites d'équations $y = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}x$ comme asymptotes.

Proposition 6.9 *Les coordonnées d'un point P satisfont à une équation du type $y = ax^2$ avec $0 < a$ (dans un repère "bien choisi") si et seulement s'il existe un point F et une droite Δ ne passant pas par F, tels que*

$$\mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, \Delta). \tag{6.10}$$

Le lieux des points ainsi décrit est une parabole*, dont F est le* foyer *et Δ la* droite directrice*.*

Dans cet énoncé, par $\mathrm{dist}(P, \Delta)$ on veut bien sûr dire la distance de P à sa projection orthogonale sur Δ, comme nous l'avons développé dans un exercice. Pour la première partie de la démonstration, on choisira un repère de manière suivante :

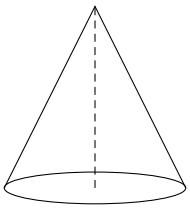


Réciproquement, pour une équation $y = ax^2$ avec $0 < a$ on posera $f = (4a)^{-1}$, puis on vérifie que c'est l'équation de la parabole de foyer $F = (0, f)$ et droite directrice $\Delta : y = -f$.

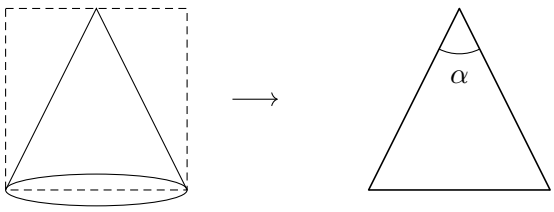
Commentaire historique

On termine ce chapitre avec quelques commentaires historiques, sur l'origine de la terminologie. C'est Menaechmus (env. -375) qui propose les termes *ellipse*, *hyperbole* et *parabole*, dans le cadre suivant.

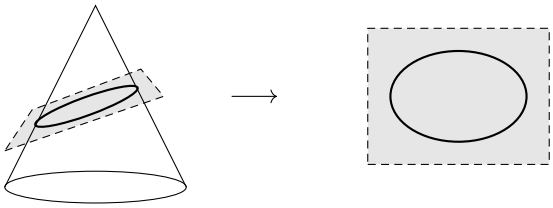
Soit, dans l'espace, un *cône droit* : sa base est un cercle et son sommet est situé sur une droite passant par le centre de la base et perpendiculaire au plan contenant la base.



Si on coupe ce cône par un plan contenant un diamètre de la base et le sommet,



alors il se produit un triangle isocèle dont on appelle l'angle au sommet α. Ensuite on considère une *section du cône* par un plan perpendiculaire à une génératrice, c'est à dire, une droite passant par le sommet du cône ainsi que par un point de sa base.

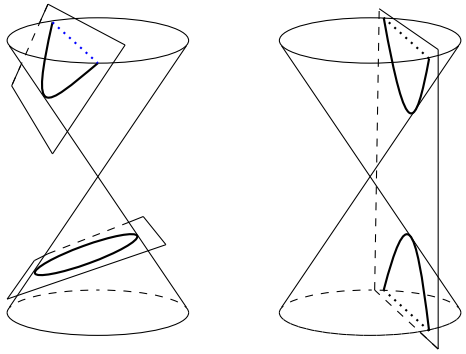


Alors Menaechmus montre que l'intersection du plan Π avec le cône droit Γ est

- une courbe décrite par une équation du type $ax^2 + by^2 = 1$ si et seulement si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, et il l'appelle une *ellipse*,
- une (branche de) courbe décrite par une équation du type $ax^2 - by^2 = 1$ si et seulement si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, et il l'appelle une *hyperbole*,
- une courbe décrite par une équation du type $y = ax^2$ si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et il l'appelle une *parabole*.

Aux exercices nous allons esquisser une démonstration de cela—mais avec les moyens analytiques dont nous disposons désormais... et que Menaechmus n'avait pas !

Ensuite c'est le grand mathématicien Appolonius (env. -250) qui va améliorer le résultat de Menaechmus, en démontrant que *toute section* de *tout (double) cône* (de base circulaire mais éventuellement oblique) est soit une ellipse, soit (une branche d')une hyperbole, soit une parabole (en outre des cas dégénérés) :



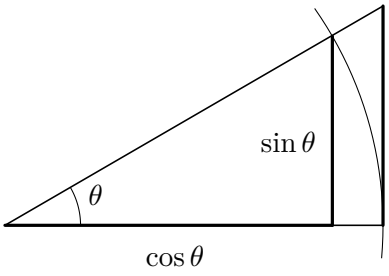
Appolonius – surnommé le *maître des coniques* – décrit ces courbes par leurs foyers et directrices. Deux millénaires plus tard, Fermat (encore lui) montrera que toute équation du second degré en deux variables peut être réalisée comme la section d'un cône.

Jusqu'à ce jour on parle donc de *sections de coniques*, pour désigner l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, ou plus largement pour toute équation de second degré en deux variables.

Exercices

1. La formule (6.2) permet de retrouver un angle de rotation à faire pour éliminer le terme en xy dans $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$... à condition de connaître l'arctan, inverse de la fonction en (6.3) ! Mais on n'a pas besoin de θ pour effectuer le changement de repère par rotation—on a uniquement besoin de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

a) Montrer comment on retrouve $\cos\theta$ et $\sin\theta$ si on connaît $\tan\theta$ (sans passer par arctan). Indication : montrer d'abord par Thalès que l'on a, dans un cercle de rayon 1, la figure ci-dessous ; puis penser à utiliser Pythagore.



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

b) Appliquer à $x^2 + 2xy + 3y^2$.

2. Elimination du terme en xy par le Théorème Spectral de l'Algèbre Linéaire. Soit le polynôme $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ avec $b \neq 0$.

a) Trouver une matrice symétrique $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et une matrice $N \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ telles que

$$p(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f. \tag{6.11}$$

b) La symétrie de la matrice M est cruciale pour le résultat suivant [3] :

Théorème 6.10 (Théorème Spectral) *Une matrice réelle M est symétrique si et seulement s'il existe une matrice orthogonale spéciale B et une matrice diagonale D telles que $M = BDB^t$.*

Montrer que les matrices réelles orthogonales spéciales de taille 2×2 sont exactement celles de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi[.$$

c) Soit maintenant une diagonalisation $M = BDB^t$ pour la matrice symétrique M de l'équation (6.11) ; on peut donc supposer que

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrer que, par le changement de repère par rotation donnée par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

on élimine le terme en xy du polynôme $p(x, y)$.

3. Voir tout bon cours d'Algèbre Linéaire ou une référence classique dans la matière. Pour rappel, une matrice orthogonale est une matrice réelle inversible dont l'inverse est la transposée ; et elle est spéciale si son déterminant est égale à 1. Une matrice diagonale est une matrice carrée ayant tous ses éléments non-diagonaux égaux à 0. Par un calcul de valeurs et vecteurs propres de la matrice M on peut trouver la matrice B et la matrice D dont le résultat ci-dessus fait mention.

3. Compléter la description focale de l'hyperbole (et ses asymptôtes).
4. Compléter la description focale de la parabole.
5. Eccentricité. On fixe un point F (appelé foyer) et une droite Δ (appelée directrice) tel que $F \notin \Delta$, et on considère le lieu Γ des points P tels que la proportion

$$\varepsilon := \frac{\mathrm{dist}(P,F)}{\mathrm{dist}(P,\Delta)}$$

est une constante. Montrer que $\varepsilon < 1$ si et seument si Γ est une ellipse, $\varepsilon = 1$ si et seument si Γ est une parabole, et $\varepsilon > 1$ si et seument si Γ est une hyperbole. Que se passe-t-il lorsque ε tend vers 0 ?

6. Donner l'équation de :
   a) la parabole de foyer $F = (1,1)$ et droite directrice $\Delta : x + y = 0$,
   b) l'ellipse de foyers $F = (-2,5)$ et $G = (1,6)$, et $d = 4$,
   c) l'ellipse de foyer $F = (2,1)$, droite directrice $\Delta : -x + 3y = 2$ et eccentricité $\frac{1}{3}$,
   d) l'hyperbole de foyers $F = (0,3)$ et $G = (2,4)$, et $d = 2$,
   e) l'hyperbole de foyer $F = (5,2)$, droite directrice $\Delta : 3x = 2$ et eccentricité 3.
7. Déterminer la nature des coniques suivantes ; s'il s'agit d'une ellipse ou une hyperbole, préciser les foyers, et s'il s'agit d'une parabole, préciser foyer et directrice :
   a) $x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$
   b) $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 = 0$
   c) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$
8. Diagonales conjugées d'une ellipse. Montrer que les milieux de cordes parallèles d'une ellipse sont collinéaires. Donner explicitement l'équation de (la droite prolongée de) la corde passant par le centre de l'ellipse et observer qu'aussi la droite contenant tous les milieux des cordes parallèles y passe. Indication : à changement de repère près, on peut supposer que l'ellipse est d'équation $ax^2 + by^2 = 1$ avec $a, b > 0$.
9. Généralisation du résultat précédent. Montrer que les milieux des cordes parallèles d'une conique quelconque sont collinéaires. Indication : à changement de repère près, on peut supposer que les cordes sont parallèles à l'axe des abscisses.
10. Déterminer les équations des paraboles tangentes [4] aux axes en $(0,3)$ et $(1,0)$. Indication : puisqu'une conique – a priori d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ – est une parabole si et seulement si, après une rotation pour éliminer le terme en xy, on aura aussi éliminé le terme en x^2 ou le terme en y^2, on peut supposer qu'une parabole est nécessairement d'équation $(ax + by)^2 + cx + dy + e = 0$ avec $a^2 + b^2 = 1$.
11. Sections de coniques à la Menaechmus [5]. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère un cône droit inversé : c'est le graphe de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto R^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$, où $R \in \mathbb{R}_0^+$.

4. On admettra qu'une droite est tangente à une conique si et seulement si leur intersection est un singleton.
5. Cet exercice fait appel à la géométrie analytique dans $\mathbb{R}^3$: il faut en particulier utiliser que l'équation du plan perpendiculaire à une direction (a,b,c) est d'équation $ax + by + cz = d$.

a) Montrer que chaque section horizontale du cône par un plan strictement au-dessus du plan XY, est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

b) Montrer que la section verticale du cône par un plan contenant l'axe Z, est formée par deux demi-droites, appelées des génératrices du cône. Montrer que l'angle (non-orienté) α ainsi formé est égal à $\pi/2$ si et seulement si $R = 1$, que $\alpha < \pi/2$ si et seulement si $R < 1$, et que que $\alpha > \pi/2$ si et seulement si $R > 1$. Indication : par symétrie de la figure, on peut se limiter au calcul de la section par le plan horizontale XZ.

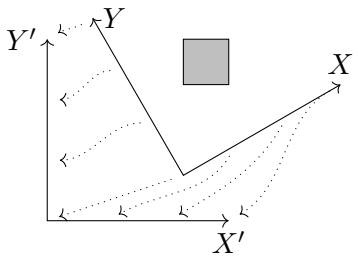
c) Montrer que chaque section du cône par un plan perpendiculaire à une génératrice est une ellipse si et seulement si $R = 1$, une parabole si et seulement si $R > 1$, et une hyperbole si et seulement si $R < 1$. Indication : par symétrie de la figure, on peut se limiter au calcul de la section par un plan perpendiculaire à une génératrice dans le plan XZ.

— 7 —

Isométrie et similitude

Nous introduisons les isométries, bijections de $\mathbb{R}^2$ préservant les distances, et insistons sur leur interprétation passive (changement de repère, donnant un "alias" à chaque point du plan) et leur interprétation active (transformation du plan, donnant un "alibi" à chaque point du plan). Les isométries du plan forment un groupe, et chaque isométrie détermine, et est déterminée par, la congruence de deux triangles. Nous démontrons que toute isométrie est la composée de au plus trois réflexions, et nous donnons l'expression analytique des isométries. De manière analogue, nous définissons les similitudes, bijections de $\mathbb{R}^2$ multipliant toute distance par un facteur non-nul ; et toute similitude détermine, et est déterminée par, la semblabilité de deux triangles. Les similitudes forment un groupe dont les isométries constituent un sous-groupe. Finalement, à l'aide des homothéties, nous donnons l'expression analytique des similitudes. En exercice nous classifions les isométries du plan – en réflexions, rotations, translations et réflexions glissées – et nous calculons quelques exemples concrets d'isométries et de similitudes.

Lorsqu'on fait un changement de repère dans le plan, on considère *une même figure géométrique* (point, droite, conique, ...) *dans un autre repère* :

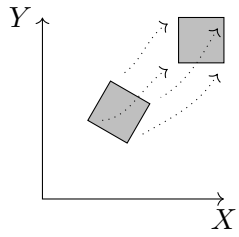


Autrement dit, on donne un *alias* (un "autre nom", une "autre description") à ladite figure. En termes de coordonnées, ceci est exprimée par l'unique fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{R} & \\ \Pi & \nearrow & \mathbb{R}^2 \\ & & \downarrow f \\ & \mathcal{R}' & \mathbb{R}^2 \end{array} \tag{7.1}$$

Soulignons que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection préservant les distances (comme on les calcule dans $\mathbb{R}^2$, cf. Proposition 5.9), tout simplement parce qu'elle "ne bouge pas les points du plan" et ne modifie donc pas les distances entre les points.

Mais on peut aussi s'intéresser aux *transformations* du plan : *dans un même repère on déplace la figure* (les points, les droites, etc.) :



On donne ainsi un *alibi* (un "autre lieu") à la figure. Pour préserver toutes les caractéristiques "euclidiennes" du plan Π, on a intérêt à exiger qu'une telle transformation soit bijective et préserve les distances (exercice : elle préservera alors aussi les angles, les droites, les cercles) : c'est une *transformation isométrique* (aussi appelée *isométrie*) *du plan*. En termes de coordonnées, une transformation isométrique du plan, disons $F\colon \Pi \to \Pi$, est décrite par l'unique fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \mathbb{R}^2 \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Pi & \xrightarrow[\mathcal{R}]{} & \mathbb{R}^2 \end{array} \tag{7.2}$$

Autrement dit, pour tout point $P \in \Pi$ et pour un repère $\mathcal{R}$ donné, on aura que $(F(P))_{\mathcal{R}} = f(P_{\mathcal{R}})$. Bien sûr, cette fonction f, qui n'est rien d'autre que la composée $\mathcal{R} \circ F \circ \mathcal{R}^{-1}$, est bijective et préserve toutes les distances.

Il est remarquable que ces deux notions géométriques – changement de repère, transformation isométrique – sont décrites analytiquement par un même type de fonction :

Définition 7.1 *Une* isométrie *de* $\mathbb{R}^2$ *est une bijection*[1] $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$\operatorname{dist}((x,y),(x',y')) = \operatorname{dist}(f(x,y),f(x',y'))$$

pour tout $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

Réciproquement, toute isométrie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ admet *deux* interpretations géométriques. D'un côté, son *interpretation passive* consiste à considérer le $\mathbb{R}^2$ du domaine de f comme la coordinatisation du plan euclidien par un repère $\mathcal{R} = (O, I, J)$ tel que $O_{\mathcal{R}} = (0,0)$, $I_{\mathcal{R}} = (1,0)$ et

1. Il est facile de voir qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui preserve les distances est toujours injective. Par un argument topologique (on montre que f est continue et on en déduit que f est surjective) ou un argument algébrique (on montre que f est affine et on en déduit que f est surjective) on peut montrer qu'une telle fonction est, en fait, toujours bijective. Mais dans ce cours, pour éviter un tel argument topologique ou algébrique, on mettra la condition de la bijectivité dans la définition d'*isométrie*.

$J_{\mathcal{R}} = (0,1)$, et de voir f comme l'expression analytique d'un changement de repère vers un *autre* repère $\mathcal{R}' = (O', I', J')$ donnant lieu au $\mathbb{R}^2$ du codomaine de f :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{R} \nearrow & \mathbb{R}^2 \\ \Pi & & \downarrow f \\ f \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}' & \searrow & \mathbb{R}^2 \end{array} \tag{7.3}$$

Pour visualiser ce nouveau repère $\mathcal{R}' = (O', I', J')$ par rapport au repère initial $\mathcal{R}$, on peut observer que $O'_{\mathcal{R}} = f^{-1}(O'_{\mathcal{R}'}) = f^{-1}(0,0)$ puisque $O'_{\mathcal{R}'} = f(O'_{\mathcal{R}})$, et de même pour $I'_{\mathcal{R}} = f^{-1}(1,0)$ et $J'_{\mathcal{R}} = f^{-1}(0,1)$. Mais de l'autre côté, on peut aussi considérer le $\mathbb{R}^2$ du domaine et le $\mathbb{R}^2$ du codomaine de f comme la coordinatisation du plan euclidien par un *même* repère $\mathcal{R} = (O, I, J)$, et voir f comme l'expression analytique d'une transformation isométrique des points du plan :

$$\begin{array}{ccc} & \Pi \xrightarrow{\mathcal{R}} & \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{R}^{-1} \circ f \circ \mathcal{R} = F & \vdots & \downarrow f \\ & \Pi \xrightarrow[\mathcal{R}]{} & \mathbb{R}^2 \end{array} \tag{7.4}$$

On appelle ceci l'*interprétation active* de f. Pour visualiser cette transformation isométrique du plan, on peut calculer que $(FO)_{\mathcal{R}} = (\mathcal{R} \circ F)(O) = f(O_{\mathcal{R}}) = f(0,0)$, et de même $(FI)_{\mathcal{R}} = f(1,0)$ et $(FJ)_{\mathcal{R}} = f(0,1)$.

Dans la suite, nous allons toujours considérer les isométries de $\mathbb{R}^2$ par leur interprétation active. Par abus de notation, nous omettrons toute mention explicite du plan euclidien Π muni du repère $\mathcal{R}$, et nous nous permettrons d'écrire $P = (x, y)$ pour un point du plan cartésien $\mathbb{R}^2$, ainsi que $f(P) = f(x, y)$ pour son image par une isométrie $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Proposition 7.2 *Les isométries de $\mathbb{R}^2$ forment un groupe pour la composition des fonctions.*

Démonstration. On vérifie facilement que la composition de deux isométries est une isométrie, que la fonction identité (= neutre pour la composition) est une isométrie, et que la fonction inverse d'une isométrie (existe et) est une isométrie. □

Nous avons déjà décrit analytiquement les changements de repère par translation, rotation et réflexion par rapport à l'axe X. Ces mêmes fonctions peuvent être considérées – en passant de l'interprétation passive à l'interpretation active – comme des transformations isométriques du plan cartésien $\mathbb{R}^2$. Pour les raisons expliquées ci-dessus, on doit alors inverser ces fonctions ; c'est à dire :

- la transformation isométrique du plan cartésien par translation de $(0,0)$ vers (a,b) est la fonction
$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y) \mapsto (x+a, y+b),$$
- la transformation isométrique du plan cartésien par rotation de centre $(0,0)$ et angle θ est la fonction
$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

– la transformation isométrique du plan cartésien par réflexion par rapport à l'axe X est la fonction

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y) \mapsto (x, -y).$$

En composant ces isométries de $\mathbb{R}^2$ bien connues, on peut en décrire d'autres, p.e. toute réflexion (par rapport à une droite quelconque) est une isométrie, dont on peut donner une expression analytique explicite (si l'on connait une équation de la droite) ; nous le ferons en exercice.

Congruence

Nous allons maintenant formaliser la notion de congruence de triangles d'Euclide, à l'aide des isométries. Par la Proposition 1.10 il est évident que :

Proposition 7.3 *Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie. Tout triangle ABC est congruent au triangle $f(A)f(B)f(C)$.*

Nous voulons montrer la réciproque : que toute congruence de triangles détermine une (et une seule) isométrie. Pour cela, nous montrons d'abord que tout point P du plan est entièrement déterminé par ses distances aux sommets d'un triangle donné :

Lemme 7.4 *Soit ABC un triangle. Si pour deux points P et Q du plan on a*

$$\mathrm{dist}(P, A) = \mathrm{dist}(Q, A),\ \mathrm{dist}(P, B) = \mathrm{dist}(Q, B)\ \textit{et}\ \mathrm{dist}(P, C) = \mathrm{dist}(Q, C)$$

alors $P = Q$.

Démonstration. Supposons que $P \neq Q$. Par hypothèse, les points A, B et C sont équidistants des points P et Q, et par conséquent ils se trouvent sur la médiatrice du segment PQ. Mais trois sommets d'un triangle ne sont jamais collinéaires. □

On peut en déduire l'*unicité* d'une éventuelle isométrie réalisant une congruence de triangles :

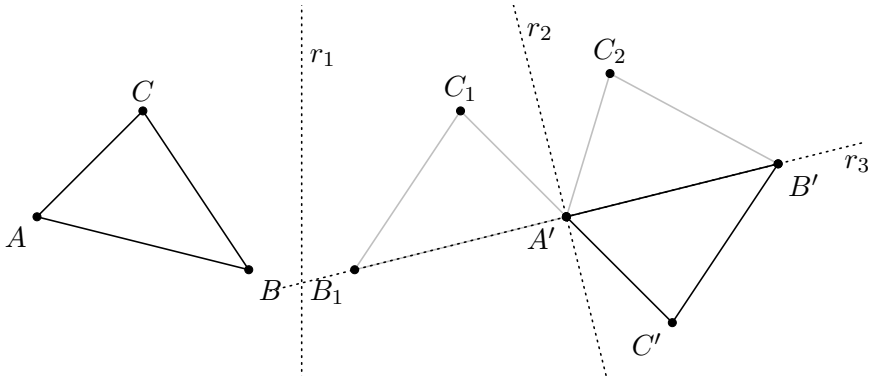
Proposition 7.5 *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles congruents. Alors il existe au plus une isométrie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.*

Démonstration. Pour tout point P donné, il existe – par le lemme précédent – au plus un point P' tel que $\mathrm{dist}(A, P) = \mathrm{dist}(A', P')$, $\mathrm{dist}(B, P) = \mathrm{dist}(B', P')$ et $\mathrm{dist}(C, P) = \mathrm{dist}(C', P')$. Si f est une isométrie envoyant ABC sur $A'B'C'$, alors nécessairement $f(P) = P'$. □

Finalement il n'est pas difficile d'établir aussi l'*existence* d'une isométrie réalisant une congruence de triangles :

Proposition 7.6 *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles congruents. Alors il existe une isométrie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, composée de au plus trois réflexions, telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.*

Démonstration. Cette démonstration se fait en trois étapes, illustrées par ce dessin :



Plus précisément : (1) Si $A \neq A'$ alors on fait une réflexion $r_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par rapport à la médiatrice du segment AA' : on obtient ainsi que

$$A_1 = r_1(A) = A', \quad B_1 = r_1(B) \quad C_1 = r_1(C),$$

et le triangle $A_1B_1C_1$ est congruent au triangle ABC parce que r_1 est une isométrie. (2) Si $B_1 \neq B'$ alors on fait une réflexion $r_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par rapport à la médiatrice du segment B_1B'. Cette médiatrice contient le point $A_1 = A'$, parce que

$$\operatorname{dist}(A', B') = \operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(A_1, B_1) = \operatorname{dist}(A', B_1),$$

et donc A_1 est un point fixe de la réflexion r_2. On obtient que

$$A_2 = r_2(A_1) = A_1 = A', \quad B_2 = r_2(B_1) = B', \quad C_2 = r_2(C_1) = r_2(r_1(C)),$$

et le triangle $A_2B_2C_2$ est congruent aux triangles $A_1B_1C_1$ et ABC. (3) Si $C_2 \neq C'$ alors on fait une réflexion $r_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par rapport à la médiatrice du segment C_2C'. Pour terminer, on vérifie que $A_2 = A'$ et $B_2 = B'$ sont des points fixes de r_3 (exercice !), et que la composée $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ est donc l'isométrie recherchée. □

Ainsi nous avons démontré le résultat suivant :

Théorème 7.7 *Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont congruents si et seulement s'il existe une (nécessairement unique) isométrie $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.*

Et notons aussi le corollaire important disant que :

Corollaire 7.8 *Toute isométrie $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est la composée de au plus trois réflexions.*

En particulier est-il donc possible d'écrire toute translation et toute rotation comme une composée de au plus trois réflexions. On étudiera l'affaire dans les exercices, où on établira également la *classification des isométries du plan.*

Pour des raisons théoriques il est certainement intéressant de savoir que toute isométrie est la composée de réflexions—et on peut regretter qu'Euclide n'ait pas eu l'idée de formaliser la notion de congruence de triangles par le Théorème 7.7 et son Corollaire 7.8 ! En effet, la notion de réflexion est tout à fait "euclidienne" (et non pas "cartésienne"), et les démonstrations

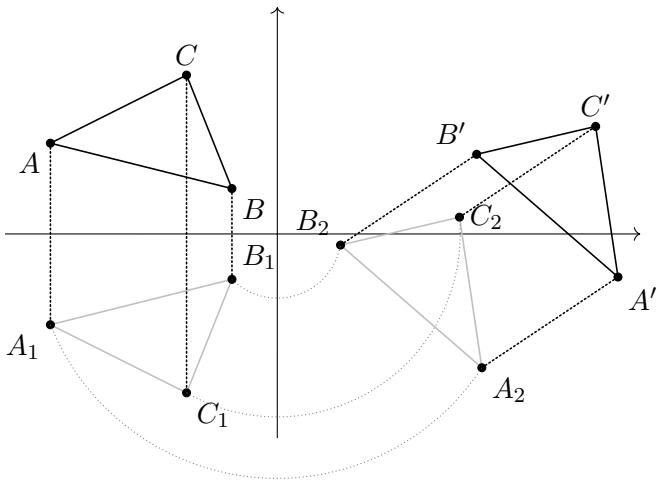
données ci-dessus – de la Proposition 7.3 jusqu'au Corollaire 7.8 – ne dépendent en rien d'une coordinatisation du plan euclidien. Par contre, pour faire des calculs concrets, il est intéressant d'avoir une expression analytique (une "formule" pour $f(x, y)$ donc).

Proposition 7.9 *Une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une isométrie si et seulement si*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

pour certains $i \in \{0, 1\}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Démonstration. Toute isométrie détermine, et est déterminée par, la congruence de deux triangles. On se donne donc un triangle ABC quelconque, on considère le triangle congruent $A'B'C' = f(A)f(B)f(C)$, puis – dans $\mathbb{R}^2$, considéré comme coordinatisation du plan d'Euclide – on écrit explicitement la congruence de ces deux triangles, en trois étapes, illustrées par ce dessin :



C'est à dire : (1) D'abord, pour *orienter* les deux triangles de la même façon, on fait (si nécessaire) une réflexion par rapport à l'axe X : analytiquement, c'est la fonction

$$f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où on convient que $i = 0$ si les deux triangles ont déjà la même orientation (et alors f_1 est l'application identité) et $i = 1$ sinon (et alors f_1 est ladite réflexion). Notons donc $A_1 = f_1(A)$, $B_1 = f_1(B)$ et $C_1 = f_1(C)$. (2) Puis, pour obtenir le *parallélisme* des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ avec ceux du triangle $A'B'C'$, on fait une rotation de centre $O = (0, 0)$ et par l'angle orienté θ formé par la droite A_1B_1 et la droite $A'B'$:

$$f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et on notera $A_2 = f_2(A_1)$, $B_2 = f_2(B_1)$ et $C_2 = f_2(C_1)$. (3) Finalement, pour faire *coïncider* les sommets de $A_2B_2C_2$ avec ceux de $A'B'C'$, on fait une translation :

$$f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

et celle-ci a pour effet que $A' = f_3(A_2)$, $B' = f_3(B_2)$ et $C' = f_3(C_2)$. En calculant $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ on obtient alors facilement la description analytique souhaitée. □

Le résultat suivant, dont la démonstration est un exercice, permet de donner une description plus élégante :

Lemme 7.10 *Une matrice réelle est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^i$$

avec $i \in \{0, 1\}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ si et seulement si elle est orthogonale.

Il vient alors :

Théorème 7.11 *Une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une isométrie si et seulement si*

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + V$$

où $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est une matrice orthogonale et $V \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ est une colonne quelconque.

Semblabilité

Ayant formalisé la notion de congruence, nous souhaitons faire pareil pour la notion de *semblabilité*. Nous avons démontré (en exercice) que deux triangles sont semblables si et seulement si leurs côtés sont 2-à-2 en même proportion. Pour formaliser la semblabilité, on doit donc s'intéresser aux transformations du plan qui preservent les proportions de (longueurs de) segments.

Regardons d'abord un exemple simple :

Exemple 7.12 L'*homothétie* de $\mathbb{R}^2$ de facteur $k \in \mathbb{R}_0^+$ et de centre $(0, 0)$ est la fonction

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x, y) \mapsto (kx, ky).$$

Cette fonction est une bijection, et on a $\operatorname{dist}(f(P), f(Q)) = k \operatorname{dist}(P, Q)$ pour tous les points P et Q du plan. Elle préserve donc les proportions de segments : pour deux segments AB et CD du plan on a toujours

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|f(A)f(B)|}{|f(C)f(D)|}.$$

Plus généralement, on pose la définition suivante :

Définition 7.13 *Une* similitude de ratio $k \in \mathbb{R}_0^+$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est une bijection*[2] $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$\operatorname{dist}(f(x,y), f(x',y')) = k \operatorname{dist}((x,y),(x',y'))$$

pour tout $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

De manière équivalente, une similitude est une bijection préservant les proportions des segments (exercice). Une similitude de ratio $k = 1$ est exactement une isométrie. La démonstration de l'énoncé suivant se fera en exercice :

Proposition 7.14 *Les similitudes de* $\mathbb{R}^2$ *forment un groupe, dont les isométries forment un sous-groupe.*

Cette proposition implique en particulier qu'en composant des translations, des rotations, des réflexions et des homothéties, on obtient toujours une similitude. (Et si on se restreint aux translations, rotations et réflexions, on obtient toujours une isométrie.) On peut en particulier considérer :

Exemple 7.15 L'*homothétie de* $\mathbb{R}^2$ *de facteur* $k \in \mathbb{R}_0^+$ *et de centre* (a,b) est la fonction

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (k(x-a)+a, k(y-b)+b);$$

c'est la translation $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x-a, y-b)$ suivi par l'homothétie de l'Exemple 7.12, suivi par l'inverse de t.

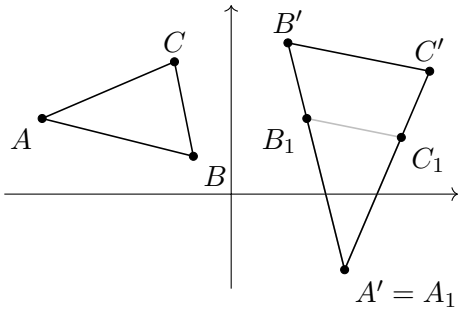
Pour montrer une sorte de réciproque à ce résultat, c'est à dire pour montrer que toute similitude est la composée d'isométries et d'une homothétie, nous allons faire le lien avec les triangles semblables—tout comme nous avons aussi fait le lien entre isométries et congruences de triangles. On peut facilement adapter les démonstrations des Propositions 7.3 et 7.5 au cas des similitudes (exercice) :

Proposition 7.16 *Soit* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *une similitude. Tout triangle* ABC *est semblable au triangle* $f(A)f(B)f(C)$.

Proposition 7.17 *Soient* ABC *et* $A'B'C'$ *deux triangles semblables. Alors il existe au plus une similitude* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ *et* $f(C) = C'$.

Disposant de l'*unicité* d'une éventuelle similitude réalisant une semblabilité de triangles, on se penche maintenant sur l'*existence*. Pour cela, supposons que ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables :

2. Comme pour les isométries, la bijectivité de f est en fait une conséquence de la condition imposée sur les distances.



Par une isométrie on peut "déplacer" le triangle ABC sur le triangle congruent $A_1B_1C_1$ tel que $A_1 = A'$, $B_1 \in A'B'$ et $C_1 \in A'C'$: c'est exactement la semblabilité de ABC avec $A'B'C'$ qui garantit que l'angle en A est égal à l'angle en A' ! Notons cette isométrie

$$f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + V,$$

comme dans la Proposition 7.11. Par congruence de $A_1B_1C_1$ avec ABC, et semblabilité de ABC avec $A'B'C'$, on obtient la semblabilité de $A_1B_1C_1$ avec $A'B'C'$; notons

$$\frac{|A'B'|}{|A_1B_1|} = \frac{|A'C'|}{|A_1C_1|} = \frac{|B'C'|}{|B_1C_1|} =: k \in \mathbb{R}_0^+.$$

Par la situation de ces triangles, l'homothétie de centre $A_1 = A' = (a, b)$ et ratio k,

$$f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto k \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

va "gonfler" le premier pour couvrir exactement le deuxième. La composée $f_2 \circ f_1$ est alors une similitude envoyant le triangle ABC sur le triangle semblable $A'B'C'$. C'est à dire :

Proposition 7.18 *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables. Il existe alors une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, composée d'une isométrie et d'une homothétie, telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.*

Pour résumer :

Théorème 7.19 *Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement s'il existe une (nécessairement unique) similitude $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.*

En calculant explicitement la composée $f = f_2 \circ f_1$ d'une isométrie avec une homothétie, on obtient après reparamétrisation une expression analytique pour toute semblabilité (exercice) :

Théorème 7.20 *Une application $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une similitude si et seulement si*

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto kM \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + V$$

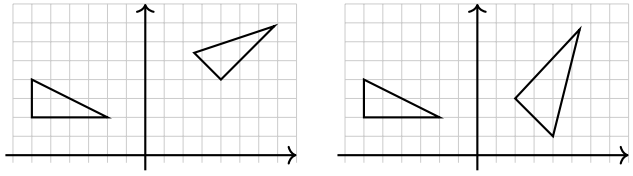
où $k \in \mathbb{R}_0^+$, $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est une matrice orthogonale et $V \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ est une colonne quelconque.

Exercices

1. Montrer que la fonction inverse d'une isométrie (resp. similitude) est encore une isométrie (resp. similitude). Montrer que la composée de deux isométries (resp. similitudes) est encore une isométrie (resp. similitude). Conclure qu'on a un groupe d'isométries et un groupe de similitudes, et que l'un est un sous-groupe de l'autre. Ces groupes, sont-ils commutatifs ?
2. Décrire analytiquement la réflexion par rapport à une droite $\Delta : ax + by + c = 0$. Quels sont les points fixes d'une réflexion ?
3. Décrire analytiquement la translation envoyant un point (a, b) sur un point (a', b'). Quels sont les points fixes d'une translation ? Montrer que toute translation peut s'écrire comme composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles. Montrer que deux droites parallèles Δ et Γ déterminent la même translation que deux droites parallèles Δ' et Γ' si et seulement s'il existe une translation envoyant Δ sur Δ' et Γ sur Γ'.
4. Décrire analytiquement la rotation d'angle θ et de centre (a, b). Quels sont les points fixes d'une rotation ? Montrer que toute rotation peut s'écrire comme composée de deux réflexions par rapport à des droites sécantes. Montrer que deux droites sécantes Δ et Γ déterminent la même rotation que deux droites sécantes Δ' et Γ' si et seulement s'il existe une rotation envoyant Δ sur Δ' et Γ sur Γ'.
5. Réflexion glissée. Montrer qu'une composée de trois réflexions est toujours la composée d'une réflexion par rapport à une droite Δ avec une translation dans la direction de Δ (cette translation pouvant être l'identité). Décrire analytiquement une telle réflexion glissée pour une droite $\Delta : ax + by + c = 0$ et une translation de déplacement $d \in \mathbb{R}$. Quels sont les points fixes d'une réflexion glissée ?
6. Classification des isométries du plan. Démontrer qu'une isométrie du plan est soit une réflexion, soit une translation, soit une rotation, soit une réflexion glissée.
7. Montrer que l'ensemble $\{\sigma \circ \tau \mid \sigma \text{ et } \tau \text{ sont des réflexions}\}$ est un sous-groupe des isométries. En décrire les éléments et leurs composées en termes géométriques.
8. Montrer que les translations du plan forment un sous-groupe du groupe des isométries. Est-ce le cas pour les rotations (de centres quelconques) ? Est-ce le cas pour les rotations de même centre ?
9. Montrer que, si $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ et $C = (x_3, y_3)$ sont les trois sommets d'un triangle, alors la matrice
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$
est inversible. En déduire que, pour trois points $A' = (x'_1, y'_1)$, $B' = (x'_2, y'_2)$ et $C' = (x'_3, y'_3)$, il existe une unique application
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Observer que f est une similitude (resp. isométrie) si et seulement si $A'B'C'$ est un triangle semblable (resp. congruent) à ABC.

10. Donner l'expression analytique de l'isométrie déterminée par la congruence du triangle de sommets $(-3, 1)$, $(-1, 1)$ et $(-3, 2)$ avec le triangle de sommets $(2, 2)$, $(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ et $(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}})$. Donner l'expression analytique de la similitude déterminée par la semblabilité du triangle de sommets $(-3, 1)$, $(-1, 1)$ et $(-3, 2)$ avec le triangle de sommets $(1, \frac{3}{2})$, $(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2} + \frac{1}{2})$ et $(2, \frac{1}{2})$.



11. Montrer qu'une matrice réelle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si $(a, c) = (\pm d, \mp b)$ et $a^2 + c^2 = 1$, et que A est orthogonale spéciale si et seulement A est la matrice d'une rotation. Montrer que toute matrice réelle orthogonale 2×2 est le produit d'une matrice orthogonale spéciale avec une puissance 0 ou 1 de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

— 8 —

Points constructibles

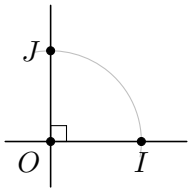
Dans le plan $\mathbb{R}^2$, nous définissons, dans l'esprit d'Euclide, la notion de 'point constructible par règle et compas'. Par une série de lemmes nous montrons qu'un point est constructible si et seulement si ses coordonnées peuvent être obtenu de 0 et 1 par une série finie d'opérations parmi $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$. Ainsi nous sommes amenés à définir le corps K des nombres constructibles, et nous indiquons les inclusions strictes de corps $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$. Nous pouvons alors résumer que la géométrie plane d'Euclide est la géométrie de K^2, la partie constructible de $\mathbb{R}^2$. Nous terminons avec quelques commentaires sur la géométrie du plan F^2 pour F un corps quelconque, dont certains exemples sont détaillés en exercice.

Dans les trois chapitres précédents nous avons vue comment le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ est un *modèle* de la géométrie d'Euclide : les cinq Postulats d'Euclide sont satisfaits si on considère :

- comme *points* tous les couples $P = (p, q) \in \mathbb{R}^2$,
- comme *droites* les lieux d'équations du type $ax + by + c = 0$,
- comme *cercles* les lieux d'équations du type $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,
- comme *congruences* les isométries,
- comme *critère de parallélisme de droites* le fait d'avoir la même pente.

Ce modèle de Descartes est très utile, p.e. pour classifier les sections des coniques. Mais Euclide, ne connaissant pas les nombres réels, faisait toute sa géométrie à la règle et au compas. Vient naturellement la question : est-ce qu'Euclide et Descartes font "la même géométrie" ?

Rappelons que, pour introduire des coordonnées, on choisit d'abord deux points, O et I, et qu'ensuite (à la règle et au compas !) on *construit* un repère cartésien :



De là, les méthodes divergent :

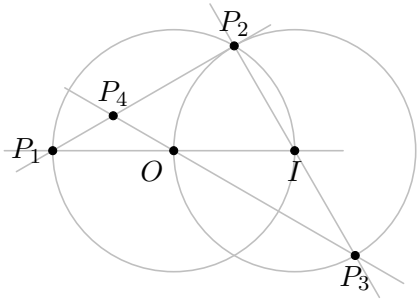
- Descartes identifie chacune des droites OI et OJ avec $\mathbb{R}$ (de façon que $|OI| = |OJ| = 1$) et considère que chaque paire de coordonnées réelles correspond à un (et un seul) point du plan,

– alors qu'Euclide ne considère que des points d'intersection de droites et de cercles construits (à la règle et au compas !) auparavant.

Nous allons donc comparer les "points constructibles" d'Euclide avec les couples de coordonnées réelles de Descartes.

Définition 8.1 *Dans le plan avec deux points O et I choisis, un point P est* constructible *s'il est l'intersection de droites passant par deux points déjà construits et/ou de cercles ayant un centre déjà construit et passant par un point déjà construit.*

Par exemple, en traçant des droites et cercles à partir de O et I, on peut retrouver progressivement des points constructibles P_1, P_2, P_3, P_4, ... :



Mais peut-on retrouver *tout* point de $\mathbb{R}^2$ de cette manière ? La réponse à cette question est le résultat suivant :

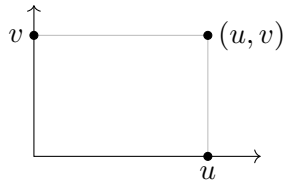
Théorème 8.2 (Descartes) *Un point du plan est constructible à partir de deux points O et I si et seulement si ses coordonnées (dans le repère construit sur O et I) peuvent être obtenus par une séquence finie d'opérations parmi $\{+, -, \times, \div, \sqrt{\ }\}$ de 0 et 1.*

La démonstration se fera par une suite de lemmes.

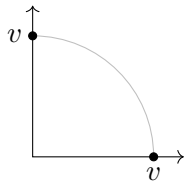
D'abord, en faisant un peu de géométrie, nous vérifions que tout point, dont les coordonnées sont obtenues par $\{+, -, \times, \div, \sqrt{\ }\}$ de 0 et 1, est constructible à la règle et au compas.

Lemme 8.3 *Un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est constructible si et seulement si $(u, 0)$ et $(0, v)$ sont constructibles, si et seulement si $(u, 0)$ et $(v, 0)$ sont constructibles.*

Démonstration. La construction des droites parallèles peut se faire à la règle et au compas ; donc, étant donné un point $P = (u, v)$, on peut construire les points $(u, 0)$ et $(0, v)$, et *vice versa* :



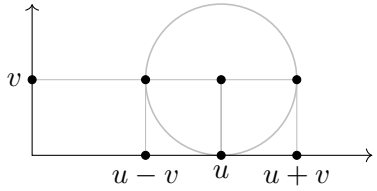
De même, par un cercle de centre $O = (0, 0)$, étant donné le point $(0, v)$, on peut construire le point $(v, 0)$, et *vice versa* :



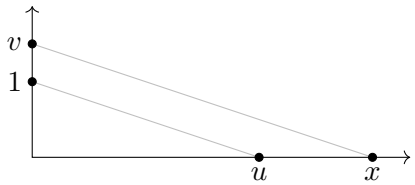
□

Lemme 8.4 *Si les points* $(u, 0)$ *et* $(v, 0)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont constructibles, alors il en est de même pour les points* $(u + v, 0)$*,* $(u - v, 0)$*,* $(uv, 0)$ *et* $(\frac{u}{v}, 0)$ *(si* $v \neq 0$ *pour ce dernier).*

Démonstration. Par le lemme précédent, on peut supposer que les points (u, v), $(u, 0)$ et $(0, v)$ sont construits. Il suffit de tracer un cercle de centre (u, v) et passant par $(u, 0)$ pour trouver, par intersection avec une droite parallèle à la droite OI, les points $(u + v, v)$ et $(u - v, v)$, que l'on peut projeter sur la droite OI pour retouver $(u + v, 0)$ et $(u - v, 0)$:



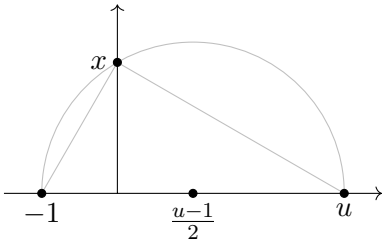
Quant à $(uv, 0)$, on trace la droite passant par $(u, 0)$ et $J = (0, 1)$, puis la droite parallèle passant par $(0, v)$:



Le point d'intersection $(x, 0)$ a pour propriété – par le Théorème de Thales – que $\frac{x}{u} = \frac{v}{1}$, et donc $x = uv$ comme voulu. Pour construire $(\frac{u}{v}, 0)$ on doit légèrement modifier cet argument (exercice). □

Lemme 8.5 *Si* $(u, 0) \in \mathbb{R}^2$ *est un point constructible, et* $u \geq 0$*, alors il en est de même pour le point* $(\sqrt{u}, 0)$*.*

Démonstration. Par la construction suivante,



on obtient les deux triangles semblables $(-1,0)(0,0)(0,x)$ et $(0,x)(0,0)(u,0)$ (exercice : donner les détails). Il suit que $\frac{x}{u} = \frac{1}{x}$, et on a ainsi construit $(0,x) = (0,\sqrt{u})$, ce qui suffit pour construire aussi $(\sqrt{u},0)$. □

Les lemmes 8.3–8.5 montrent déjà que, en démarrant avec les points $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$, on peut construire *tous* les points $P = (x,y)$ dont les deux coordonnées peuvent être obtenues par $\{+,-,\times,\div,\sqrt{}\}$ de 0 et 1 : parce que chacune de ces opérations arithmétiques correspond à une construction géométrique précise, cf. Lemmes 8.4 et 8.5. Par exemple, une écriture comme $(\frac{3+\sqrt{7}}{3}, \sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{11}}})$ comprend les instructions pour la construction de ce point—aussi compliquée qu'elle puisse être.

Remarquons qu'en particulier le point $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},0)$ est constructible (comparer avec la Proposition 4.7)—et cela suffit pour constuire le pentagone régulier inscrit dans le cercle $x^2+y^2=1$. En 1796, Gauss (qui a alors 19 ans) montre que

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$$

ce qui implique qu'aussi le 17-gone régulier est constructible !

Il nous reste à voir pourquoi, en démarrant avec les points $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$, *seuls* les points $P = (x,y)$ dont les deux coordonnées peuvent être obtenus par $\{+,-,\times,\div,\sqrt{}\}$ de 0 et 1, sont constructibles. Pour cela, nous devons faire un peu d'algèbre.

Lemme 8.6 *Si une droite passe par deux points (a_1,b_1) et (a_2,b_2) de $\mathbb{R}^2$, alors son équation est $ux+vy=w$ avec u,v,w obtenus par $\{+,-,\times,\div\}$ de a_1,b_1,a_2,b_2.*

Démonstration. Par Proposition 5.6, l'équation de la droite passant par (a_1,b_1) et (a_2,b_2) est donnée par $(a_2-a_1)(y-b_1) = (b_2-b_1)(x-a_1)$. En simplifiant cette expression on confirme le résultat. □

Par un même type d'argument on démontre aussi :

Lemme 8.7 *Si un cercle est de centre (a_1,b_1) et passe par (a_2,b_2) dans $\mathbb{R}^2$, alors son équation est $x^2+y^2 = ux+vy+w$ avec u,v,w obtenus par $\{+,-,\times,\div\}$ de a_1,b_1,a_2,b_2.*

Par les Lemmes 8.6 et 8.7, les coefficients de l'équation d'une droite ou d'un cercle déterminé par deux points dont les coordonnées peuvent être obtenues par $\{+,-,\times,\div,\sqrt{}\}$ de 0 et 1, peuvent eux-mêmes être obtenus de cette manière. Etudions ensuite les intersections de droites et/ou de cercles en fonction des coefficients de leurs équations.

Lemme 8.8 *Si (x,y) est le point d'intersection d'une droite d'équation $ux+vy=w$ avec une droite d'équation $u'x+v'y=w'$ dans $\mathbb{R}^2$, alors x et y sont obtenus par $\{+,-,\times,\div\}$ de u,v,w,u',v',w'.*

Démonstration. Pour calculer (x, y) on doit résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} ux + vy = w \\ u'x + v'y = w' \end{cases}$$

et cela se fait en effectuant un certain nombre d'opérations élémentaires sur la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{array}\right)$$

Mais une telle opération consiste à faire adéquatement des $+$, $-$, $\times$ et $\div$ sur les éléments de cette matrice. Ainsi le résultat suit. □

Lemme 8.9 *Si (x, y) est un point d'intersection d'une droite d'équation $ux + vy = w$ avec un cercle d'équation $x^2 + y^2 = u'x + v'y + w'$ dans $\mathbb{R}^2$, alors x et y peuvent être obtenus par $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ de u, v, w, u', v', w'.*

Démonstration. Pour calculer ce point d'intersection, on doit résoudre le système (non-linéaire !)

$$\begin{cases} ux + vy = w \\ x^2 + y^2 = u'x + v'y + w' \end{cases}$$

Puisqu'on ne peut avoir $u = 0 = v$, on peut supposer (quitte à échanger x et y) que $u \neq 0$. Ainsi la première équation du système est équivalent à

$$x = -\frac{v}{u}y + \frac{w}{u},$$

et par substitution dans la deuxième equation du système on en déduit une équation de degré 2 en y :

$$(-\frac{v}{u}y + \frac{w}{u})^2 + y^2 = u'(-\frac{v}{u}y + \frac{w}{u}) + v'y + w'.$$

En réécrivant cette équation comme $ry^2 + sy + t = 0$, on voit bien que ses coefficients r, s et t sont des expressions rationnelles en u, v, w, u', v', w'. En outre, cette équation possède au plus deux racines, qui sont alors données par la formule bien connue

$$y = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4st}}{2r},$$

c'est à dire une expression écrite à l'aide de $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ en r, s et t, et donc aussi en u, v, w, u', v' et w'. Finalement, par son expression en fonction de y donnée auparavant, la même chose est vraie pour x. □

Lemme 8.10 *Si (x, y) est un point d'intersection d'un cercle d'équation $x^2 + y^2 = ux + vy + w$ avec un cercle d'équation $x^2 + y^2 = u'x + v'y + w'$ dans $\mathbb{R}^2$, alors x et y peuvent être obtenus par $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ de u, v, w, u', v', w'.*

Démonstration. En principe on doit résoudre le système (non-linéaire)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ux + vy + w \\ x^2 + y^2 = u'x + v'y + w' \end{cases}$$

mais remplaçant la deuxième équation par la soustraction des deux équations, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ux + vy + w \\ (u - u')x + (v - v')y + (w - w') = 0 \end{cases}$$

et maintenant le lemme précédent s'applique. □

Les Lemmes 8.8–8.10 impliquent que, lorsque deux droites et/ou cercles sont déterminés par des points dont les coordonnées peuvent être obtenues par $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ de 0 et 1, alors la même chose est vraie pour leur(s) point(s) d'intersection. Somme toute, les coordonnées de chaque point constructible sont ultimement données par des opérations parmi $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ à partir des coordonnées des "deux premiers points" $O = (0, 0)$ et $I = (1, 0)$, c'est à dire, de 0 et 1.

Et ainsi nous avons démontré le Théorème 8.2 !

Pour mieux articuler la relation entre la géométrie "constructible" d'Euclide et la géométrie "réelle" de Descartes, il est utile de définir :

Définition 8.11 *Un nombre $a \in \mathbb{R}$ est* constructible *s'il peut être obtenu par une séquence finie d'opérations parmi $\{+, -, \times, \div, \sqrt{}\}$ de 0 et 1.*

Ainsi, on peut dire élégamment qu'un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est constructible si et seulement si les nombres $a, b \in \mathbb{R}$ sont constructibles. Il existe des nombres non-constructibles ; les exemples les plus célèbres sont :

- $\sqrt[3]{2}$, car son inconstructibilité signifie que l'on ne peut pas "dupliquer le cube",
- $\cos \frac{\pi}{9}$, et donc on ne peut pas trisecter l'angle $\frac{\pi}{3}$,
- $\sqrt{\pi}$, ce qui dit exactement que la quadrature du cercle est impossible.

Dans ce cours nous ne pouvons pas donner une démonstration complète de ces résultats—il faudrait un cours adéquat sur la Théorie des Nombres [1]. Néanmoins, nous ne pouvons pas clôturer ce chapitre – et ce cours – sans faire quelques commentaires sur la structure des nombres constructibles. Commençons par :

Proposition 8.12 *Les nombres constructibles forment un sous-corps K de $\mathbb{R}$, comprenant le corps $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{R}$.*

Démonstration. Puisqu'un nombre rationnel est exactement un nombre qui peut être obtenu par $\{+, -, \times, \div\}$ de 0 et 1, il est clair que $\mathbb{Q} \subseteq K$; mais puisque p.e. $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, cette inclusion est stricte. L'inclusion $K \subseteq \mathbb{R}$ est trivial, et l'existence de nombres réels

1. P.-L. Wantzel démontre en 1837 que, si un nombre $a \in \mathbb{R}$ est constructible, alors le degré de son polynôme minimale sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2. Ce n'est pas le cas pour $\sqrt[3]{2}$ (dont le polynôme minimale est $x^3 - 2$), et non plus pour $\cos \frac{\pi}{9}$ (de polynôme minimale $8x^3 - 6x - 1$), d'où l'inconstructibilité de ces nombres. Quand à $\sqrt{\pi}$, c'est F. von Lindemann qui démontre en 1882 que $\sqrt{\pi}$ n'est pas une racine d'un polynôme sur $\mathbb{Q}$; et donc l'inconstructibilité suit une fois de plus par le résultat de Wantzel.

non-constructibles affirme qu'aussi cette inclusion est stricte. Reste à voir que K est un *corps* intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: mais 0 et 1 sont certainement des éléments de K, et le Lemme 8.4 confirme que toute somme, toute opposée, tout produit et tout invers, d'éléments de K (comme calculés dans $\mathbb{R}$) est encore un élément de K. □

La différence entre la géométrie d'Euclide et celle de Descartes est donc que le premier considère le "plan" K^2, alors que pour le deuxième le "plan" est $\mathbb{R}^2$.

De manière générale on peut, en fait, considérer le "plan" F^2 pour tout corps F. Et, quelque soit le corps F, on peut toujours définir une *droite* dans F^2 comme le lieux de points (dans F^2 !) d'une équation linéaire en deux variables à coefficients dans F. Ainsi, par le Lemme 8.6, on peut toujours calculer l'équation de la droite passant par deux points de F^2 ; et par le Lemme 8.8 on peut toujours calculer l'intersection de deux droites dans F^2.

Par contre, la définition de distance, ou celle d'angle, ou même celle de cercle, n'est pas toujours possible dans F^2 ; et le "comportement" de ces figures géométriques dans F^2 ne correspond pas toujours avec notre intuition "réelle" (i.e. de $\mathbb{R}^2$) ou "constructible" (i.e. de K^2) ! Autrement dit, la *géométrie* de F^2 est (en partie) déterminée par l'*algèbre* de F, et vice versa.

Exemple 8.13 Dans $\mathbb{Q}^2$, le cercle d'équation $x^2 + y^2 = p$ avec p un nombre premier et la droite d'équation $x - y = 0$ ne s'intersectent pas. Pourtant un dessin pourrait suggérer le contraire...

Exemple 8.14 Dans $\mathbb{C}^2$, les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(i, 0)$ sont collinéaires, mais on ne peut pas dire si $(1, 0)$ est entre $(0, 0)$ et $(i, 0)$, ou si $(i, 0)$ est entre $(0, 0)$ et $(1, 0)$. (En fait, le corps $\mathbb{C}$ ne peut pas être ordonné.)

On détaillera d'autres examples quelque peu étonnants en exercice.

Exercices

1. Construire le nombre $\frac{2\sqrt{3}+4}{5}$.
2. Dans un cercle de rayon 1, on considère l'angle α au centre sur une corde de longueur d. Montrer que $d = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha)}$. Calculer les longueurs des côtés d'un décagone régulier et d'un pentagone régulier inscrits dans un cercle de rayon 1, puis en déduire qu'ils sont constructibles à la règle et au compas.
3. Plan d'Euclide. On définit une 'isométrie constructible' du plan cartésien réel comme une isométrie envoyant un point constructible sur un point constructible. Montrer (analytiquement et/ou géométriquement) que toute réflexion par une droite constructible d'un point constructible est un point constructible. En déduire que toute congruence de triangles de sommets constructibles peut être effectuée par une isométrie constructible. Montrer finalement que les isométries constructibles ont pour expression analytique la même formule que les isométries, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + V$, mais avec des nombres constructibles dans les matrices M et V. Ainsi on peut conclure que, dans le plan d'Euclide K^2, on peut toujours formaliser la congruence de triangles par des isométries (constructibles). Et, par conséquent, on peut faire des changements de repère constructibles dans K^2, si besoin il y a.

4. Soit une parabole donnée par son foyer et sa droite directrice. Montrer comment on peut construire à la règle et au compas tout point d'intersection de la parabole avec une droite perpendiculaire à la directrice. Indication : montrer que le changement de repère effectuant la réduction de l'équation de la parabole est constructible.

5. Quadrature de la parabole. Soit une parabole donnée par son foyer et sa droite directrice. Soit ensuite une droite coupant la parabole en deux points, définissant ainsi une aire. Démontrer qu'il est possible de construire à la règle et au compas un carré de même aire. Indication : faire une isométrie constructible pour réduire l'équation de la parabole, montrer que les points d'intersection avec la droite sont constructibles, puis calculer l'aire entre les courbes par une intégrale.

6. Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments. "Dessiner" tous les points du plan $(\mathbb{F}_2)^2$ et "tracer" toutes les droites. Observer qu'il existe un parallélogramme dans ce plan dont les diagonales sont parallèles.

7. Soit un corps $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un triangle équilatéral dans le plan F^2 si et seulement si $\sqrt{3} \in F$.

8. Plan de Hilbert. Soit un corps $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que la distance entre toute paire de points de F^2 est un élément de F si et seulement si, pour tout $c \in F$, on a $\sqrt{1+c^2} \in F$. Montrer que le plus petit corps ayant cette propriété consiste des nombres réels que l'on peut obtenir à partir de $\mathbb{Q}$ en faisant un nombre fini d'opérations $+, -, \times, \div$ et $c \mapsto \sqrt{1+c^2}$; c'est le 'corps de Hilbert', noté Ω. On peut montrer que $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \Omega$; ainsi Ω est strictement contenu dans le corps K des nombres constructibles. On appelle Ω^2 le plan de Hilbert : c'est le plus petit plan dans lequel on peut mesurer des distances.

Bibliographie

[1] F. Borceux, *Invitation à la Géométrie*, CIACO, 1986.

[2] F. Borceux, *Geometric Trilogy*, Springer, 2014.

[3] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry (2nd Edition)*, Wiley, 1969.

[4] R. Hartshorne, *Geometry : Euclid and Beyond*, Springer, 2000.

[5] J. Stillwell, *The Four Pillars of Geometry*, Springer, 2005.

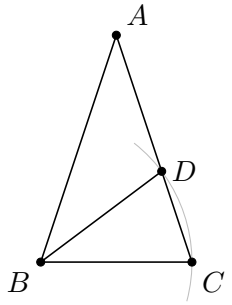
Annexe : Annales d'examens

Voici les sujets des examens des années précédentes. Attention : un 'examen partiel' porte sur les quatre premiers chapitres de cours seulement ! Pour aide-mémoire, la feuille intitulée "Quelques Propositions d'Euclide" (voir p. 109) est distribuée en même temps que le sujet de l'examen. Aucun autre document n'est autorisé pendant l'examen (et évidemment pas de calculatrice non plus).

Partiel de Novembre 2024

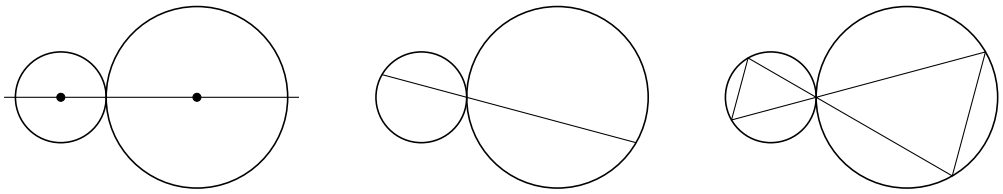
1. a) Enoncer les cinq Postulats d'Euclide.
   b) Utiliser les Postulats 1 à 4 et les Propositions 1 à 6 d'Euclide pour démontrer la Proposition 8 : deux triangles sont congruents s'ils ont leurs trois côtés égaux deux-à-deux.
2. a) Donner une équation que vérifie le *nombre d'or*, puis le calculer.

   Soit maintenant un triangle ABC avec $|AB| = |AC| > |BC|$, et notons D le point d'intersection du segment AC et le cercle de centre B et passant par C.



   b) Démontrer que les triangles ABC et BCD sont semblables.
   c) Démontrer que $\frac{|AB|}{|BC|}$ est le nombre d'or si et seulement si $|AD| = |BD|$.
   d) Pourquoi un tel *triangle d'or* est-il utile pour la construction du pentagone régulier ? Justifier la réponse.
3. a) Montrer que, si deux cercles sont tangents, alors la droite reliant leurs centres passe par le point de tangence (voir figure à gauche ci-dessous).
   b) Soient deux cercles tangents, et une droite quelconque passant par le point de tangence (voir figure au milieu ci-dessous). Montrer que les longueurs des deux cordes ainsi obtenues sont en même proportion que les rayons des cercles.

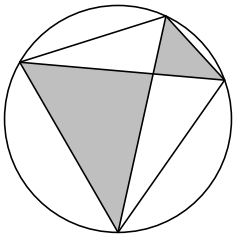
c) Soient deux cercles tangents, et deux droites (distinctes) quelconques passant par le point de tangence (voir figure à droite ci-dessous). Montrer que les cordes opposées au point de tangence sont parallèles.



4. On considère un quadrilatère (convexe) qui satisfait les conditions suivantes : ses diagonales sont perpendiculaires, et il a deux côtés consécutifs de même longueur. Que peut-on dire de plus sur ce quadrilatère ? Justifier la réponse.

Examen de Janvier 2025

1. a) Utiliser au besoin les Propositions d'Euclide pour démontrer qu'un point P appartient à la médiatrice d'un segment d'extrémités A et B si et seulement si $|PA| = |PB|$.
   b) En déduire que tout point du plan est complètement déterminé par ses distances aux sommets d'un triangle donné.
2. a) Définir 'triangles semblables'.
   b) Enoncer (sans démonstration) le Théorème de Thalès vu en cours.
   c) Montrer que deux triangles sont semblables s'ils ont deux côtés proportionnels et l'angle inclus égal.
   d) Pour tout quadrilatère inscrit dans un cercle, montrer que les triangles de même couleur sont semblables :



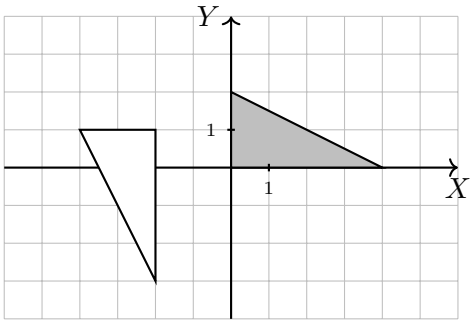
3. Dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$, on considère les points $A = (2, 3)$, $B = (-5, 4)$ et $C = (-3, -2)$.
   a) Donner l'équation de la droite perpendiculaire à la droite (BC) et passant par A.
   b) Calculer la distance de A à la droite (BC).
   c) Calculer l'aire du triangle ABC.
4. Déterminer la nature de la conique suivante :

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 + 17\sqrt{2}x + 19\sqrt{2}y + 54 = 0.$$

   S'il s'agit d'une ellipse ou hyperbole, préciser les foyers ; s'il s'agit d'une parabole, préciser le foyer et la droite directrice.
5. a) Définir 'isométrie de $\mathbb{R}^2$'.

b) Démontrer que les isométries forment un groupe (et en préciser les opérations).

c) Existe-t-il une isométrie envoyant le triangle blanc sur le triangle gris ? Si oui, calculer son expression analytique ; sinon, expliquer pourquoi pas.



Rattrapage de juin 2025

1. a) Définir 'parallélogramme'.

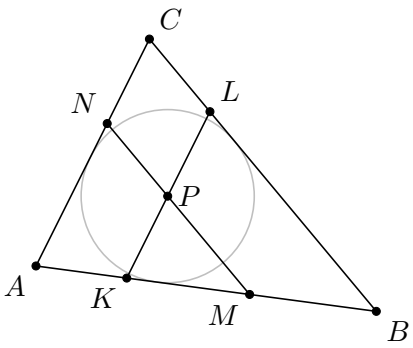
   b) Utiliser les Propositions 1 à 33 d'Euclide pour démontrer que, dans tout parallélogramme, les angles opposés sont égaux.

   c) Démontrer que les seuls parallélogrammes inscrits dans un cercle sont les rectangles. (Pour cela, on peut utiliser tous les résultats vus dans le cours.)

2. a) Définir 'triangles semblables'.

   b) Enoncer et démontrer le Théorème de Thalès vu en cours.

   Soit maintenant un triangle ABC et son cercle inscrit de centre P. On trace les parallèles à AC et à BC, passant par P.



   c) Montrer que le triangle ABC est semblable au triangle KMP.

   d) Montrer que le quadrilatère $PNCL$ est un losange.

3. Dans le plan réel muni d'un repère, on considère les points $A = (-2, 1)$, $B = (6, 5)$ et $C = (6, 3)$, et on note Δ la droite passant par A et B.

   a) Donner une équation cartésienne de la droite Γ parallèle à Δ et passant par C.

   b) Donner une équation cartésienne de la médiatrice Λ du segment de sommets A et B.

4. Soit la conique $\Gamma : 2xy - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ dans le plan réel muni d'un repère $\mathcal{R}$.

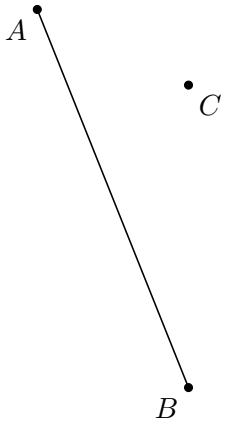
   a) Calculer sa forme réduite, en détaillant les changements de repère effectués.

b) Déterminer son type.
c) Donner ses foyer(s) et/ou sa droite directrice (par rapport au repère $\mathcal{R}$).

5. a) Donner la définition de 'isométrie du plan $\mathbb{R}^2$'.
b) Enoncer (sans démonstration) le théorème faisant le lien entre isométries et triangles congruents.
c) Donner (sans démonstration) l'expression analytique d'une isométrie.
d) Donner (sans démonstration) la classification des isométries du plan.

Partiel de Novembre 2025

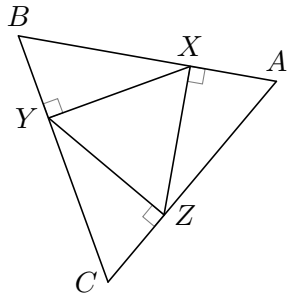
1. Construire avec règle et compas un triangle ayant le segment AB comme côté et le point C pour centre de son cercle inscrit ; justifier la construction.



2. a) Utiliser les quatre premiers Postulats et les Propositions 1 à 26 d'Euclide pour démontrer la Proposition 27 : "Si une droite en coupe deux autres de sorte que les angles alternes internes soient égaux, alors les droites sont parallèles."
b) Enoncer le 5e Postulat d'Euclide.
c) Utiliser les cinq Postulats et les Propositions 1 à 28 d'Euclide pour démontrer la Proposition 29 d'Euclide : "Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes internes sont égaux et la somme des angles internes d'un même côté égale deux angles droits." Indiquer bien où le cinquième Postulat est utilisé.

3. a) Définir 'triangles semblables'.
b) Donner (sans démonstration) trois critères équivalents pour la semblabilité de triangles.
c) Compléter et démontrer l'assertion suivante : "Si deux n-gones réguliers sont inscrits dans deux cercles, alors les aires de ces polygones sont dans la même proportion que ... ."
d) Définir la 'constante d'Archimède' π, et justifier cette définition.

4. Dans un triangle équilatéral ABC on construit un nouveau triangle XYZ de telle manière que les côtés de l'un sont orthogonaux aux côtés de l'autre :



Démontrer les assertions suivantes :

a) XYZ est équilatéral,

b) les trois triangles rectangles sont congruents,

c) $\angle YBX$ est le double de $\angle YXB$,

d) $|BX|$ est le double de $|BY|$,

e) l'aire de ABC est trois fois l'aire de XYZ.

Examen de janvier 2026

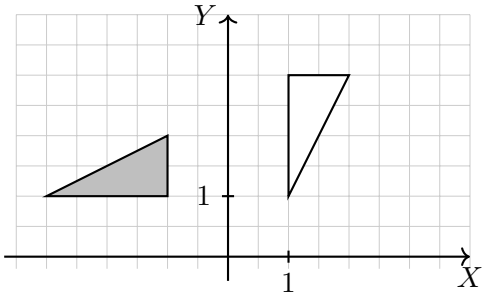
1. a) Définir la notion de 'triangles congruents'.

   b) En n'utilisant que les Propositions 1 à 23 d'Euclide, démontrer la Propostion 26 : "Si deux angles et le côté inclus d'un triangle sont égaux à deux angles et le côté inclus d'un autre triangle, alors ces triangles sont congruents."

   c) Définir la notion de 'isométrie du plan $\mathbb{R}^2$'.

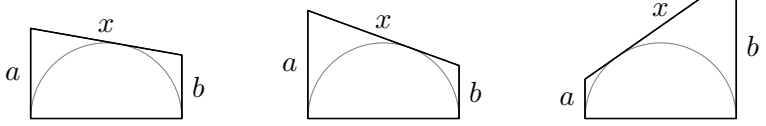
   d) Enoncer (sans démonstration) le Théorème faisant le lien entre congruence et isométrie.

   e) Calculer l'expression analytique de l'isométrie envoyant le triangle blanc sur le triangle gris, ou expliquer pourquoi cela n'est pas possible :



2. a) Compléter et démontrer le Théorème suivant : "Une droite Δ est tangente en un point A d'un cercle Γ si et seulement si ... "

   b) Pour un trapèze avec un demi-circle inscrit (comme dans les dessins ci-dessous), montrer que la longueur du côté oblique est la somme des longueurs des côtés parallèles ($x = a + b$).



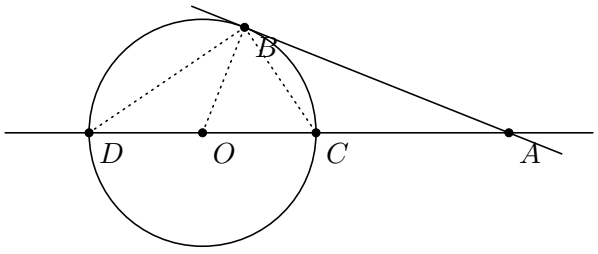
3. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, calculer :
   a) l'équation cartésienne de la droite Δ passant par les points $A = (3, 4)$ et $B = (0, 1)$,
   b) les points d'intersection D et E de Δ avec le cercle de centre $C = (2, 1)$ et rayon 4,
   c) l'aire du triangle CDE.
4. Soit la section de conique $\Gamma : xy - x - y - 1 = 0$ dans le plan réel muni d'un repère $\mathcal{R}$.
   a) Calculer sa forme réduite, en détaillant les changements de repère effectués.
   b) Déterminer son type, et donner ses foyers et/ou sa droite directrice (par rapport au repère $\mathcal{R}$).
5. Construire avec règle et compas un carré dont l'aire est égal à l'aire du rectangle donné. Expliquer brièvement les étapes de la construction.



Rattrapage de juin 2026

1. a) Définir (éventuellement avec un dessin) les notions 'angle intérieur' et 'angle extérieur' d'un triangle.
   b) Montrer que, pour tout triangle, tout angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés. On pourra utiliser les Propositions 1 à 15 d'Euclide.
2. a) Définir 'triangles semblables'.
   b) Enoncer (sans démonstration) le Théorème de Thales vu en cours.
   c) Démontrer : si deux triangles ont deux angles égaux, alors ils sont semblables.

   Soit maintenant la figure suivante, où la droite AB est tangente au cercle de centre O :



   d) Démontrer que $|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|$. (On pourra utiliser tous les résultats des quatre premiers chapitres du cours.)
3. Dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$, on considère les points $A = (-2, 1)$ et $B = (4, 3)$.
   a) Calculer l'équation de la droite Δ passant par A et B.
   b) Calculer l'équation de la droite Γ, perpendiculaire à Δ et passant par l'origine $O = (0, 0)$.
   c) Calculer l'équation du cercle de centre A et passant par O.
4. Soit la conique $\Gamma : xy + 3x + 5y - 3 = 0$ dans le plan réel muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Calculer sa forme réduite, en détaillant les changements de repère effectués.

5. a) Définir ‘isométrie de $\mathbb{R}^2$’.
   b) L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   est-elle une isométrie ? Justifier la réponse.

6. a) Définir “point constructible” et “nombre réel constructible”.
   b) Enoncér (sans démonstration) le théorème faisant le lien entre ces deux notions.
   c) Soient une droite $\Delta : ax + by + c = 0$ et un cercle $\Gamma : x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ dans $\mathbb{R}^2$, et supposons que a, b, c, a', b', c' sont des *nombres réels constructibles*. Montrer que les points d'intersection de Δ et Γ sont des *points constructibles*.

Propositions d'Euclide

Voici les Propositions du Premier Livre d'Euclide – avec la numérotation originale d'Euclide, mais dans l'ordre d'apparition dans notre cours – que nous avons démontrées dans les deux premiers chapitres du cours. Les propositions marquées d'un astérisque ne se trouvent pas ainsi formulées chez Euclide, mais nous les avons démontrées pour faciliter le développement de la matière.

1. Construire un triangle équilatéral sur un segment donné.
2. Construire à partir d'un point un segment de longueur donnée.
4. Si deux côtés et l'angle inclus d'un triangle sont égaux à deux côtés et l'angle inclus d'un autre triangle, alors ces triangles sont congruents.
5. Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.
6. Si un triangle a deux angles égaux, alors les côtés qu'ils sous-tendent sont égaux.
8. Deux triangles sont congruents s'ils ont leurs trois côtés égaux deux-à-deux.
9. Bissecter un angle.
10. Bissecter un segment.
11. Elever une droite perpendiculaire en un point d'une droite.
12. Abaisser une droite perpendiculaire d'un point sur une droite.
13. Si en un point d'une droite on élève une demi-droite alors la somme des angles ainsi formés vaut deux angles droits.
15. Lors de l'intersection de deux droites, les angles opposés sont égaux.
16. Dans un triangle, tout angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés.
18. Dans un triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle.
19. Dans un triangle, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.
20. Dans un triangle, la somme de deux côtés est supérieure au troisième.
22. Construire un triangle de côtés données, chacune des longueurs étant inférieure à la somme des deux autres.
23. En un point d'une droite, tracer une demi-droite faisant un angle donné.
26. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, et si ces deux triangles ont aussi un côté égal – soit le côté inclus entre les angles égaux, soit le côté opposé à un des angles égaux – alors ces triangles sont congruents.

(∗) Si deux triangles rectangles ont même hypothénuse et un autre côté égal, alors ils sont congruents.

27. Si une droite en coupe deux autres de sorte que les angles alternes internes soient égaux, alors les droites sont parallèles.
31. Par un point à l'extérieur d'une droite, mener une parallèle à cette droite.

(∗) La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est unique.

29. Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes internes sont égaux et la somme des angles internes d'un même côté égale deux angles droits.

(∗) La parallèle à une droite passant par un point à l'extérieur de la droite est unique.

30. Deux droites parallèles à une troisième droite, sont parallèles entre elles.
32. Dans un triangle, un angle externe égale la somme des deux angles internes opposés, et la somme des angles internes égale deux angles droits.
33. Si, dans un quadrilatère, deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur, alors il est de même des deux autres côtés opposés.
34. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux, les angles opposés sont égaux, et les diagonales bissectent le parallélogramme en deux triangles congruents.
35. Si deux parallélogrammes ont un côté commun et le côté opposé sur une même droite, alors ils ont même aire.
37. Si deux triangles de même base ont le sommet opposé sur une droite parallèle à la base, alors ils ont même aire.
41. Si un triangle et un parallélogramme ont la même base, et si le sommet opposé à la base du triangle est sur la droite déterminée par le côté opposé du parallélogramme, alors l'aire du parallélogramme est deux fois l'aire du triangle.
46. Elever un carré sur un segment donné.
47. Le carré élevé sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle égale la somme des aires des carrés élevés sur les deux autres côtés.
48. Si le carré construit sur un côté d'un triangle est la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.