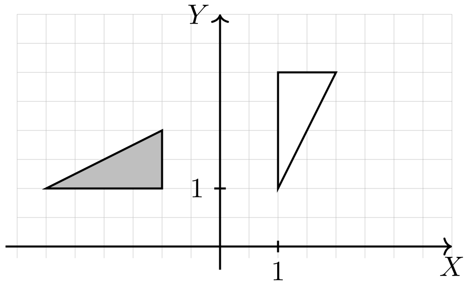
EXAMEN DE GÉOMÉTRIE EN L2 MATH DU 16/01/2026 DE 09H À 12H

Responsable: Isar STUBBE

Sans documents, sans calculatrice. Propositions d'Euclide reprises au verso.

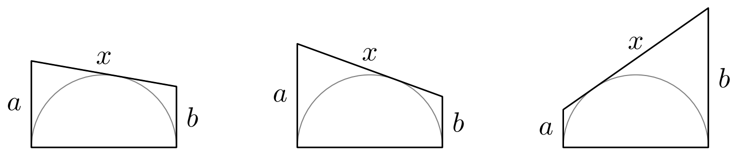
6 pts

1. (a) Définir la notion de 'triangles congruents'.
   (b) En n'utilisant que les Propositions 1 à 23 d'Euclide, démontrer la Propostion 26: "Si deux angles et le côté inclus d'un triangle sont égaux à deux angles et le côté inclus d'un autre triangle, alors ces triangles sont congruents."
   (c) Définir la notion de 'isométrie du plan $\mathbb{R}^2$'.
   (d) Enoncer (sans démonstration) le Théorème faisant le lien entre congruence et isométrie.
   (e) Calculer l'expression analytique de l'isométrie envoyant le triangle blanc sur le triangle gris, ou expliquer pourquoi cela n'est pas possible:



4 pts

2. (a) Compléter et démontrer le Théorème suivant: "Une droite Δ est tangente en un point A d'un cercle Γ si et seulement si ... "
   (b) Pour un trapèze avec un demi-circle inscrit (comme dans les dessins ci-dessous), montrer que la longueur du côté oblique est la somme des longueurs des côtés parallèles ($x = a + b$).



4 pts

3. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, calculer:
   (a) l'équation cartésienne de la droite Δ passant par les points $A = (3, 4)$ et $B = (0, 1)$,
   (b) les points d'intersection D et E de Δ avec le cercle de centre $C = (2, 1)$ et rayon 4,
   (c) l'aire du triangle CDE.

5 pts

4. Soit la section de conique $\Gamma : xy - x - y - 1 = 0$ dans le plan réel muni d'un repère $\mathcal{R}$.
   (a) Calculer sa forme réduite, en détaillant les changements de repère effectués.
   (b) Déterminer son type, et donner ses foyers et/ou sa droite directrice (par rapport au repère $\mathcal{R}$).

1 pt

5. Sur la feuille supplémentaire, construire avec règle et compas un carré dont l'aire est égal à l'aire du rectangle donné. Expliquer brièvement les étapes de la construction. (Ajouter cette feuille supplémentaire à la copie rendue.)

——— *fin* ———

20 pts

NOM et Prénom: ______________________________

1 abcd : voir cours.

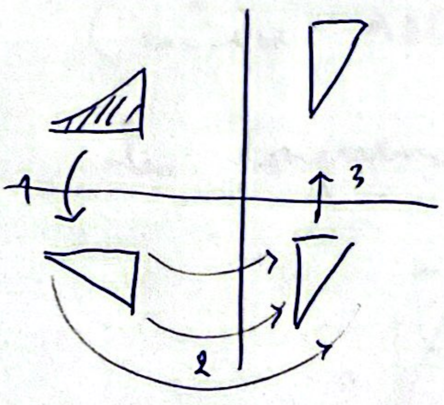
e : triangles congruents, donc $\exists !$ isométrie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

tq.
$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

on résoud deux systèmes linéaires et on trouve $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

alt : on "décompose" f :



$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$

f_3 : translat par $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

f_2 : rotat de $\pi/2$ et centre $(0,0)$

f_1 : réfl d'axe X

donc $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

$$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \theta = \pi/2$$

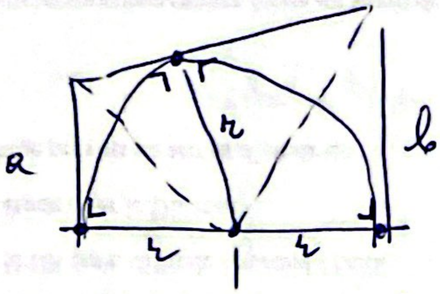
$$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

puis on calcule la composée.

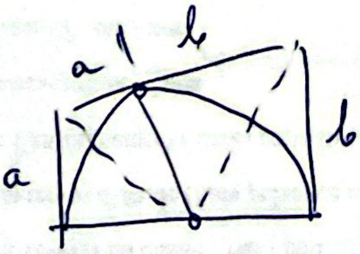
2 a. "... ssi la droite Δ est orthogonale au rayon au point A du cercle Γ."

démo : voir cours/TD. (ex. 8 p 46 du poly !)

b.



par perpendicularité du rayon du demi-cercle inscrit au côté oblique, et aux côtés parall., on a 2 fois 2 triangles congruents (critère ADCH), donc on peut identifier les longueurs



et il suit que "$x = a+b$".

3\. a Δ : $(x-3)(1-4) = (y-4)(0-3)$

$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

b. Γ : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4^2$

$\Delta \cap \Gamma$: résolution de système

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ (x-2)^2 + ((x+1)-1)^2 = 4^2 \end{cases}$$

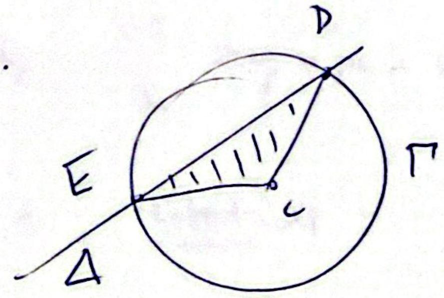
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ 2x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

donc $D = (1+\sqrt{7}, 2+\sqrt{7})$

$E = (1-\sqrt{7}, 2-\sqrt{7})$

c.



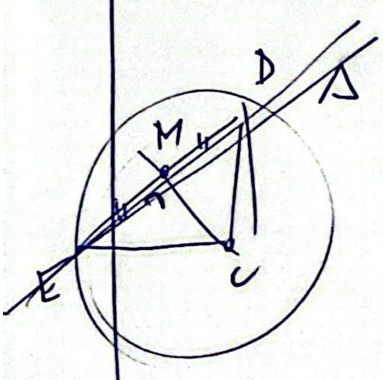
$$\text{aire} = \frac{\text{dist}(C,\Delta)\,.\,\text{dist}(D,E)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\cdot\sqrt{\left((1+\sqrt{7})-(1-\sqrt{7})\right)^2+\left((2+\sqrt{7})-(2-\sqrt{7})\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8\cdot 7} = \cancel{\ } 2\,.\sqrt{7}.$$

<u>alt</u> : M = milieu du segment DE

$$= \text{"}\frac{D+E}{2}\text{"} = (1,2)$$



et triangle isocèle donc

$$d(C,\Delta) = d(C,M) = \sqrt{2}.$$

4) $\Gamma'_{\mathcal{R}} : xy - x - y - 1 = 0$

• <u>rotation</u> : $\tan\theta = \frac{a-c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{b}\right)^2 + 1}$

$$= \pm 1$$

donc $\theta = \pm \pi/4$

donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

ainsi

$$\Gamma_{\mathcal{R}'} : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)$$

$$- \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - \sqrt{2}x' - 1 = 0$$

<u>translation</u> :

$$\frac{1}{2}x'^2 - \sqrt{2}x' = \frac{1}{2}\left(x'^2 - 2\sqrt{2}x'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x' - \sqrt{2})^2 - 2\right]$$

donc $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - \sqrt{2} \\ y' \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' + \sqrt{2} \\ y'' \end{pmatrix}$

ainsi

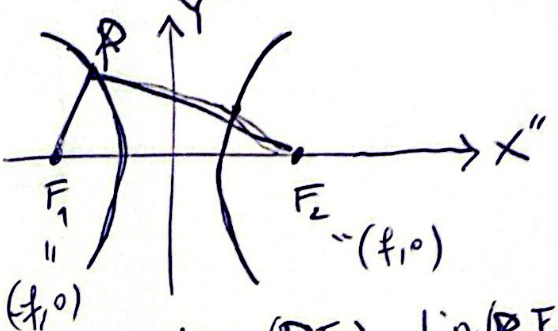
$$\Gamma_{\mathcal{R}''} : \quad \frac{1}{2}\left(x''^2 - 2\right) - \frac{1}{2} y''^2 - 1 = 0$$

$$\iff \quad \frac{1}{4} x''^2 - \frac{1}{4} y''^2 = 1$$

b. hyperbole,

"$\frac{1}{e^2}x^2 + \frac{1}{e^2 - f^2} y^2 = 1$"

(et $f > e$)



$$\left|\mathrm{dist}(R, F_1) - \mathrm{dist}(R, F_2)\right| = 2e$$

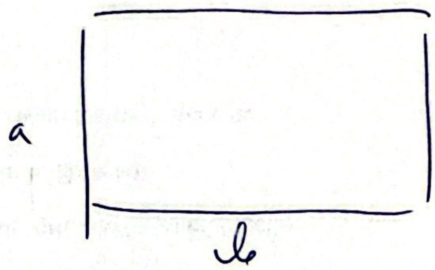
donc $\begin{cases} e = 2 \\ f = \pm\sqrt{8} \end{cases}$

donc $(F_1)_{\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix}$, $(F_2)_{\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où $(F_1)_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} + \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $(F_2)_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} + \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

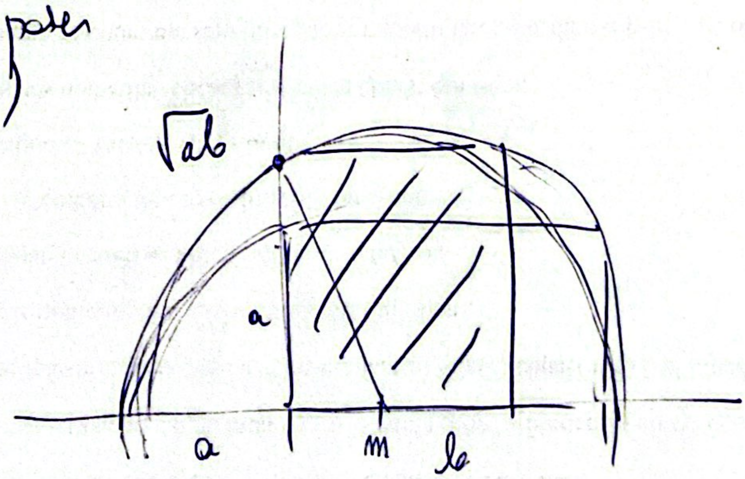
et finalement

$$(F_1)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} +3 \\ +3 \end{pmatrix}, \quad (F_2)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



$\sqrt{ab}$

(on peut poser $a=1$)



m = milieu de a+b